Un panorama de la TAD
An overview of ATD

Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico
Apports de la théorie anthropologique du didactique
Contributions of the anthropologic theory of the didactic

Un panorama de la TAD
An overview of ATD

Marianna Bosch
Josep Gascón
Alicia Ruiz Olarría
Michèle Artaud
Alain Bronner
Yves Chevallard
Gisèle Cirade
Caroline Ladage
Mirène Larguier

Centre de Recerca Matemàtica
Campus de Bellaterra, Edifici C
08193 Bellaterra (Barcelona)

First edition: November 2011

ISSN 2014-2323 (printed edition)
ISSN 2014-2331 (electronic edition)

Legal deposit:

Índice

Eje 3. Teoría y práctica de las actividades y los recorridos de estudio e investigación (AEI y REI) // Axe 3. Théorie et pratique des activités et des parcours d’étude et de recherche (AER et PER) // Axis 3. Theory and practice of study and research activities and courses (SRA and SRC)

Presentación

Yves Chevallard recibió en 2009 el premio Hans Freudenthal que otorga bienalmente la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) en reconocimiento por el desarrollo de un gran programa de investigación en didáctica de las matemáticas (*a major cumulative program of research in mathematics education*). El programa que se reconoce con este premio, y que la propia ICMI califica como «muy original, fructífero e influyente», es la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), de la que ofrecemos aquí un panorama, fruto de los trabajos presentados en el Tercer congreso internacional sobre la TAD, que se celebró en Sant Hilari Sacalm (Girona) en enero de 2010.

Más allá de su valor simbólico, el reconocimiento internacional que supone el premio Hans Freudenthal constituye una nueva evidencia del proceso de consolidación que ha vivido en estos últimos años la comunidad de investigadores que trabajan en el enfoque antropológico. El Primer congreso internacional sobre la TAD, celebrado en 2005 en Baeza (Jaén), coincidiendo con los 25 años de transposición didáctica, ya respondía a un importante enriquecimiento de este programa de investigación que rompía con la visión dominante en materia de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y no ha cesado de evolucionar durante estos últimos treinta años. Sin embargo, sigue siendo hoy en día una tarea tan vigente como necesaria para el desarrollo de la investigación didáctica el profundizar en las rupturas iniciadas por los primeros análisis de la transposición didáctica.

El texto de Yves Chevallard con el que se inicia este libro presenta estas rupturas, la mayoría de las cuales están todavía en proceso de consolidación. Su realización responde a una exigencia metodológica de articulación de la investigación con sus objetos de estudio. La primera y más fundamental de estas rupturas es el reconocimiento de la existencia de fenómenos didácticos —en el sentido propuesto por Guy Brousseau con el nacimiento de la teoría de las situaciones didácticas—, que constituye la principal razón de ser de la ciencia de lo didáctico. La ampliación del ámbito empírico y de la unidad de análisis de los procesos didácticos, más allá del ámbito de la clase y del contexto escolar, es otro rasgo característico del enfoque que propone la TAD y conduce a situar los objetos de estudio de la didáctica en relación con las condiciones y restricciones propias a la ecología institucional de los saberes.

Es evidente que esta perspectiva supone romper con el punto de vista dominante sobre los problemas educativos y, en particular, distanciarse de las problemáticas de sus actores —alumnos y profesores, principalmente— así como de su manera de vivirlas. Esta toma de distancia epistemológica es básicamente estratégica y no significa ningún tipo de desentendimiento, ni mucho menos desapego. Al contrario, permite una articulación que asegura un reconocimiento pleno de los problemas vividos por los actores y crea al mismo tiempo las condiciones indispensables para su estudio científico efectivo. Como nos recordaba el sociólogo alemán Norbert Elias, el distanciamiento es una condición necesaria para, precisamente, poderse involucrar de manera eficaz, a corto y largo plazo, en el estudio y la solución de los problemas sociales.

Los cuatro ejes que estructuran este volumen designan distintos ámbitos de intervención donde la TAD muestra su potencial de acción. El primero, y sin duda el más interno a la propia comunidad investigadora, aunque no por ello con menor consecuencia práctica, se titula *La TAD en el continente didáctico hoy*. En él se estudia la relación de la TAD con otros enfoques didácticos, incluyendo los discursos que se presentan como una fundamentación de algunas de las prácticas docentes más habituales. La profesión docente, y con ella el conjunto de problemas a los que debe enfrentarse como tal profesión, constituye también un punto clave de intervención de la TAD. Los trabajos que abordan esta problemática quedan recogidos en el segundo eje de este volumen, *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*. El tercer eje, *Teoría y práctica de las actividades y los recorridos de estudio e investigación*, reúne las aportaciones de la TAD al diseño, experimentación y evaluación de dispositivos didácticos que permiten superar el paradigma imperante de la «visita de las obras» para avanzar hacia el paradigma del «cuestionamiento del mundo». Este paradigma emergente supone también una nueva concepción de la noción de estudio que la aproxima a las prácticas de investigación. Su evolución requiere la concepción y difusión de nuevos gestos de estudio que permitan una relación renovada con los instrumentos de obtención y contrastación de la información, instrumentos a los que se dedica el cuarto eje del congreso bajo el título *La dialéctica de los media y los medios.*[*]

[*] La edición de este libro se ha realizado con la ayuda del proyecto «Los recorridos de estudio e investigación como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática» (EDU2008-02750/EDUC) del Plan Nacional de I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Présentation

Yves Chevallard a reçu en 2009 le prix Hans Freudenthal qu'attribue tous les deux ans l'*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) en reconnaissance du développement d'un programme de recherche majeur en didactique des mathématiques (*a major cumulative program of research in mathematics education*). Le programme que l'attribution de ce prix veut honorer, et que l'ICMI qualifie de « très original, fécond et influent », est la théorie anthropologique du didactique (TAD), dont nous offrons ici un panorama, fruit des travaux présentés au Troisième congrès international sur la TAD qui s'est déroulé à Sant Hilari Sacalm (Gérone, Espagne) en janvier 2010.

Au-delà de sa valeur symbolique, la reconnaissance internationale que suppose le prix Hans Freudenthal constitue un nouveau témoignage du processus de consolidation qu'a vécu au cours de ces dernières années la communauté des chercheurs travaillant dans le cadre de l'approche anthropologique. Le Premier congrès international sur la TAD s'est tenu en 2005 à Baeza (Jaén, Espagne). Le 25e anniversaire de la transposition didactique qui se fêtait alors faisait écho à un enrichissement très important, poursuivi désormais durant plus d'une trentaine d'années, de ce programme de recherche. L'approfondissement des ruptures amorcées par les analyses menées, dès les années 1980, en termes de transposition didactique n’en apparaît pas moins, aujourd’hui encore, à l’ordre du jour de l’effort de recherche en didactique.

Le texte d’Yves Chevallard avec lequel commence cet ouvrage présente un tableau de ces ruptures, dont l’accomplissement encore inachevé répond à une exigence méthodologique de bonne articulation de la recherche avec ses objets d’étude. La reconnaissance de l’existence de phénomènes didactiques – au sens originaire proposé par Guy Brousseau avec la naissance de la théorie des situations didactiques –, qui constitue la principale raison d’être de la science du didactique, est la première et la plus fondamentale de ces ruptures. L’élargissement du champ empirique et de l’unité d’analyse des processus didactiques, au-delà des phénomènes circonscrits au cadre de la classe et du contexte scolaire, est un autre trait distinctif de l’approche que propose la TAD, qui conduit à situer les objets d’étude de la didactique relativement aux conditions et contraintes propres à l’écologie institutionnelle des savoirs.

Cette perspective suppose de rompre avec le point de vue dominant sur les problèmes éducatifs et, en particulier, de prendre une distance vis-à-vis des problématiques des acteurs – élèves et professeurs principalement – et de leur manière de les vivre. Une telle prise de distance épistémologique est stratégique et n’implique ni désintérêt, ni abandon. Tout au contraire, elle permet une articulation qui assure une pleine reconnaissance des problèmes des acteurs en même temps qu’elle crée les conditions indispensables à leur étude scientifique effective. Comme le rappelait le sociologue allemand Norbert Elias, cette distanciation est une condition nécessaire pour pouvoir s’engager de manière efficace, à court et long termes, dans l’étude et la résolution des problèmes sociaux.

Les quatre axes qui structurent cet ouvrage désignent différents cadres d’intervention où la TAD montre ici son potentiel d’action. Le premier axe, le plus interne peut-être à la communauté de chercheurs, mais dont les enjeux pratiques ne sauraient être sous-estimés, s’intitule *La TAD dans le continent didactique aujourd’hui.* On y étudie les relations de la TAD avec d’autres approches, y compris avec les discours qui tentent de fonder certaines des pratiques courantes d’enseignement. La profession de professeur, et l’ensemble des problèmes qu’elle doit affronter en tant que telle, constitue un autre point clé d’intervention de la TAD. Les travaux qui abordent cette problématique se rassemblent autour du deuxième axe de l'ouvrage, *Enseigner les mathématiques : la profession et ses problèmes*. Le troisième axe, *Théorie et pratique des activités et des parcours d'étude et de recherche*, réunit les apports de la TAD dans la création, l'expérimentation et l'analyse de dispositifs didactiques permettant de dépasser le paradigme dominant de la « visite des œuvres » pour avancer vers le paradigme du « questionnement du monde ». Ce paradigme émergent suppose une conception renouvelée − plus proche des pratiques de recherche − de la notion d'étude. Une telle évolution requiert la conception et la diffusion de nouveaux gestes d'étude permettant une relation repensée aux moyens d'obtention et de vérification de l'information, moyens auxquels est consacré le quatrième axe du congrès sous le titre *La dialectique des médias et des milieux.*[*]

[*] L'édition de ce livre a été réalisée avec le soutien du projet « Les parcours d'étude et de recherche comme proposition didactique pour l'enseignement de la modélisation mathématique » (EDU2008-02750/EDUC) du Plan National R+D+i du Ministère de la Science et de l'Innovation espagnol.

Presentation

In 2009, Yves Chevallard received the Hans Freudenthal medal, which the *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) awards every two years in recognition of the development of “a major cumulative program of research in mathematics education”. The program rewarded, qualified by the ICMI as “very original, fruitful and influential”, is the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), a panorama of which is here offered, composed of papers presented at the Third International Congress on the ATD, which was held in Sant Hilari Sacalm (Girona, Spain) in January 2010.

Beyond its symbolic value, the international recognition of the Hans Freudenthal award constitutes one more proof of the consolidation process that the community of researchers working on the anthropological approach have experienced over the last few years. The First International Congress on the ATD, held in 2005 in Baeza (Jaén, Spain) coinciding with the 25 years of didactic transposition, was then echoing an important enrichment of this research program which has been in permanent evolution during these last thirty years, breaking with the prevailing vision of teaching and learning mathematics. However, the paradigmatic breaks introduced by the first analyses in terms of didactic transposition carried out since the 1980s are still in force and continue to be necessary for the current developments of didactic investigation.

Yves Chevallard initiates this book by introducing these breaks, most of which still need to be consolidated. Their achievement responds to a methodological requirement of articulating research with its objects of study. Recognizing the existence of didactic phenomena—in the original sense proposed by Guy Brousseau since the inception of the theory of didactic situations—, which constitutes the main *raison d'être* of the science of the didactic, is the first and most fundamental of the aforementioned breaks. The expansion of the empirical field and of the unit of analysis of didactic processes, beyond the limits of the classroom and the school context, is another characteristic feature of the approach put forward by the ATD. It leads to situating the objects of study of didactics in relation to the conditions and restrictions of the institutional ecology of knowledge.

It is obvious that this perspective supposes breaking up with the dominant viewpoint on educational problems, and more particularly requires a detachment from the problems of its actors—mainly students and teachers—and the way of experiencing them. This epistemological distancing is basically strategic and does not mean a lack of interest, and much less indifference. To the contrary, it enables a coordination that ensures full recognition of the problems experienced by the actors. At the same time, it establishes the necessary conditions for its efficient scientific study. As the German sociologist Norbert Elias reminded us, detachment is a necessary condition to get efficiently involved in the study of and the solution to social problems, in the short or medium run.

The four axes that structure this book refer to different fields of intervention in which ATD shows its full action potential. The first axis, *The ATD within the field of educational research disciplines,* which is also the most internal to the research community itself, is not for that devoid of practical consequences. It is devoted to the study of the relation of ATD with other didactic approaches, including the discourses presented as the basis of some of the most common teaching practices. The teaching profession, along with the set of problems it needs to face as such, also constitutes a key point of intervention of ATD. The papers dealing with these problems feature in the second axis of this book, *Teaching mathematics: the profession and its problems*. The third axis, *Theory and practice of study and research activities and courses*, contains the contributions of ATD to the elaboration, experimentation and evaluation of didactic devices making it possible to overcome the prevailing paradigm of “visiting works” in order to progress towards the paradigm of “questioning the world”. This emerging paradigm also implies a new notion of study closer to the research practices. This development requires the creation and spreading of new study gestures that enable a renewed relation with the tools used to obtain and check information, a point on which the fourth axis of the congress focuses, under the title *The dialectic of media and milieus.*[*]

[*] The edition of this book has been supported by the project “Study and Research Courses as a didactic proposal for the teaching of mathematical modelling” (EDU2008-02750/EDUC) of the Spanish National Plan for Scientific Research, Development and Technological Innovation of the Ministry of Science and Innovation.

Conferencias

Conférences

Lectures

Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD ?

Yves Chevallard
UMR P3 ADEF, Université Aix-Marseille 1, France

Abstract. It is the ambition of this presentation to sketch what the future of research in ATD will possibly be. The style adopted is decidedly terse, reflecting thus the intrinsic limits of such an endeavour.

Resumen. La ambición de esta ponencia es la de esbozar el futuro posible de la investigación en TAD. De manera voluntaria, la presentación utiliza un lenguaje conciso para una mejor expresión de los límites intrínsecos de tal empeño.

Résumé. L'ambition de cette présentation est de suggérer ce que pourrait être l'avenir de la recherche en TAD. Le style adopté est volontairement concis et reflète en cela les limites intrinsèques d'un tel exercice.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 23-32)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Une rupture épistémologique inachevée

La didactique naît du désir de créer, aux objets didactiques, *un autre rapport*, qui ne soit pas un simple calque « savant » du rapport professoral à ces objets. Cette exigence est affirmée de façon explicite dès les années 1980.

Pour connaître adéquatement le rapport des professeurs (et des autres acteurs de l'école) aux objets « didactiques », les didacticiens ont dû créer un rapport propre, sui generis, à ces objets, au lieu de « recopier » les rapports existants.

Cette rupture épistémologique, proclamée indispensable, est demeurée incomplète : elle est aujourd'hui encore inachevée, et, sur certains aspects, à peine amorcée. Plusieurs conséquences essentielles découlent de là.

2. Inachèvements : le cas de la théorie

L'un des principes théoriques (au sens de la TAD) qui se trouvent au cœur de la vision commune du didactique est que l'étude des faits didactiques ne relèverait pas d'une théorie au sens des sciences, qui vise à décrire, expliquer, comprendre le réel.

La théorie dominante du didactique énonce en effet que le réel à étudier est l'effet de nos actions. Selon cette théorie, il n'y a pas de phénomènes didactiques, ayant leurs lois propres, mais de simples effets de nos interventions, etc.

À l'instar de ce qui se passe en médecine, cette épistémologie des effets s'affirme ainsi dans l'essor actuel de l'evidence-based education (EBE), qui a pour principe « that educational policy and practice should be guided by the best evidence about what works ».

Dans les sciences humaines et sociales, plus largement, cette évolution a pour emblème la structure IMRAD imposée aux articles scientifiques – *Introduction, Methods, Results And Discussion* – d'où le cadre théorique du travail exposé est largement absent.

La TAD prend position, non bien sûr contre les empirical studies de l'EBE, mais contre l'oubli des phénomènes et des lois didactiques, qui tend à réduire la didactique à l'étude de l'empirie sans médiation théorique.

3. Inachèvements : l'échelle de codétermination didactique

On rappelle ci-après la structure de l'échelle de codétermination didactique :

Civilisation $\leftrightarrows$ Société $\leftrightarrows$ École $\leftrightarrows$ Pédagogie $\leftrightarrows$ Discipline
Domaines $\leftrightarrows$ Secteurs $\leftrightarrows$ Thèmes $\leftrightarrows$ Sujets

L'attachement quasi « éthologique » des didacticiens à la position de professeur les induit souvent à ne prendre en compte, dans l'échelle des niveaux de codétermination, guère plus que le niveau de la pédagogie et celui de la discipline, appréhendée surtout au sous-niveau des thèmes.

Par contraste, la TAD pousse à prendre en compte l'ensemble des niveaux de codétermination didactique, et, par là, à rompre avec la naturalisation des situations du monde en mettant en évidence leur caractère (sur)déterminé.

Une part essentielle des lois didactiques évoquées plus haut se formulent en termes de contraintes (K), de conditions (C) et de *rencontre* ($\Re$) ou d'*intégration* (∂) praxéologiques, ce qu'on notera $\Re/\partial(K, C, \wp, U)$.

Une *contrainte* pour *une position institutionnelle* donnée est une condition réputée ne pouvoir être *modifiée* par qui est assujetti à cette position agissant en tant que tel (sans solliciter d'autres assujettissements personnels éventuels notamment).

L'existence, en un domaine d'activité, d'un assujettissement *dominant* (celui de professeur par exemple) tend (a) à restreindre l'attention des acteurs aux conditions réputées modifiables depuis cette position dominante, et (b) à naturaliser et à oublier les contraintes pesant sur ce domaine d'activité.

Les lois didactiques ne peuvent être découvertes sans prendre en compte les ensembles K et C pertinents, qui ont une intersection non vide avec les divers niveaux de l'échelle. Sans cela prévaut l'idée qu'il n'y a pas de *phénomènes*, mais seulement des *actions* didactiques.

4. Inachèvements : le cas des infrastructures

Formellement, une *infrastructure* est un système d'organisations praxéologiques (avec leurs bases matérielles) réalisant un ensemble donné de *conditions*. Ces conditions sont des *contraintes* pour les activités (superstructurelles) déployées dans l'infrastructure donnée.

Une infrastructure peut avoir une composante en chaque échelon de codétermination (discipline, pédagogie, etc.) : on parlera de façon générale des *infrastructures sollicitées* par une organisation didactique donnée.

L'oubli des infrastructures est un aspect clé de *l'oubli des contraintes*. Dans le monde professoral, cela conduit en pratique à penser que les problèmes de la profession peuvent être résolus « à infrastructures constantes », par un travail seulement superstructurel.

Dans le monde médical, un tel oubli conduirait par exemple à voir des médecins de ville se réunir pour « réfléchir » ensemble sur telle pathologie nouvelle – tel le sida au début des années 1980 – et pour « ouvrir des pistes » thérapeutiques.

Ce qui, en matière didactique, rend possible un tel égarement est le faible développement actuel de l'infrastructure de recherche, qui va de pair avec l'inachèvement, voire l'arrêt d'une rupture épistémologique collectivement assumée.

La TAD a notamment pour objet d'offrir une plate-forme d'analyse et d'ingénierie infrastructurelles, y compris à ces niveaux de l'échelle de codétermination où, trop souvent, les didacticiens ne s'aventurent guère.

En diverses disciplines scolaires existe une tradition d'*apports infrastructurels* disciplinaires *spécifiques* de la part de « savants ». Ainsi en va-t-il en mathématiques depuis Blaise Pascal jusqu'à Hassler Whitney en passant par Henri Lebesgue ou A. N. Kolmogorov.

Pourtant, ces apports savants non didacticiens se révèlent souvent en partie inadéquats, et cela parce qu'ils procèdent d'une analyse et d'une prise en compte *très incomplètes* des contraintes pesant sur les types de systèmes didactiques visés.

Ces savants que sont ou devraient être les didacticiens doivent aussi contribuer à identifier et à satisfaire les besoins infrastructurels disciplinaires propres à la diffusion sociale des praxéologies : ce devrait être là un secteur de recherches important en TAD.

Il en va de même solidairement à tous les niveaux de l'échelle de codétermination : ainsi, le bouleversement des conditions scolaires créé par la diffusion du e-learning et ses effets pédagogiques et disciplinaires doivent être un objet d'étude pour la TAD.

5. Inachèvements : la didactique

Nombre de didacticiens se définissent encore en écho au monde scolaire : si $\check{D}$ est une discipline enseignée à l'école, on aura *la* didactique de $\check{D}$ et les didacticiens *de* $\check{D}$. On ne pourrait pas se dire didacticien, tout court, comme on se dit physicien ou sociologue !

Ignorant son attachement à une réalité jalousement assujettissante, on justifie ce principe en disant que la didactique de $\check{D}$ aurait pour objet les conditions de diffusion spécifiques des praxéologies considérées. Mais pourquoi alors s'arrêter là dans la « spécificité » ?

Pourquoi, selon l'opinion commune, ne pas se dire didacticien des équations du premier degré, et de cela seulement ? Parce que, dira-t-on, pour étudier la diffusion de ces équations, il faut étudier la diffusion d'un ensemble plus vaste d'objets « mathématiques »

Généralisant cette remarque, la TAD avance alors cette définition de la didactique : la didactique est la science des conditions et contraintes de la diffusion des praxéologies dans les institutions de la société.

Les conditions et contraintes gouvernant la diffusion sociale d'une entité praxéologique $\wp$ relèvent en fait de *tous* les niveaux de codétermination, et notamment, bien sûr, du niveau de la discipline (ainsi que de ses sous-niveaux) dont relève $\wp$.

À l'instar des réalités sociales correspondant aux autres niveaux de codétermination (pédagogie, école, etc.), la discipline n'est pas un *donné* qui irait de soi : pour le didacticien, c'est un objet à étudier, siège de contraintes et lieu de conditions possibles.

Si **P** est un ensemble de praxéologies, par exemple si

$$\mathbf{P} = \{ \wp \mid \Im(\wp, \Pi, X)\}$$

où on a $\Im(\wp, \Pi, X)$ si $\wp$ est utile à X pour le projet Π, on parlera de « la didactique de **P** ». Ainsi parlera-t-on de *la didactique (des praxéologies) du développement durable*.

6. Inachèvements : le cas des disciplines

L'attachement non analysé au monde professoral conduit certains didacticiens à faire leur et la différenciation existant entre disciplines scolaires, et la fiction de quasi-autarcie épistémologique de chacune d'elle, alors qu'elles sont traversées, nourries de *codisciplinarité*.

Ce qui est vrai entre disciplines distinctes est vrai encore, en une discipline scolaire donnée, entre les domaines et secteurs en lesquels elle a été scindée : les notions de confinement disciplinaire et de codisciplinarité doivent donc être entendues de façon large.

La TAD avance que toute activité humaine en voie de stabilisation tend à se discipliner de façon spécifique : toute activité est prise ainsi, au fil du temps institutionnel, dans un mouvement alterné dans lequel elle se « dé-discipline » puis se « re-discipline ».

Derrière le figement supposé des disciplines scolaires, il y a une évolution incessante qui, en une décennie, peut changer à la fois *ce qui* est discipliné et *la manière* de le discipliner – toutes choses qui sont à chaque instant au cœur de l'activité de la classe.

La discipline mathématique est aujourd'hui (en France) largement avancée dans une évolution qui la dé-discipline : un formidable travail de *reconstruction disciplinaire* semble indispensable, sauf à laisser se perdre le patrimoine mathématique scolaire.

7. Inachèvements : paradigmes scolaires

Reprenant à son compte une contrainte scolaire tenue pour intouchable, nombre de didacticiens inscrivent leurs travaux dans le paradigme de l'étude encore aujourd'hui dominant, celui de la *visite des savoirs* ou, plus largement, *de la visite des œuvres*.

La TAD analyse ce paradigme comme exprimant et matérialisant un rapport dominé aux œuvres de la culture : l'élève en est un spectateur plus ou moins averti et admiratif, non bien sûr un créateur, ni même un véritable utilisateur.

D'une façon générale, la TAD propose de lire les faits didactiques à la lumière du paradigme du questionnement du monde, partout présent dans la société mais embryonnaire à l'école, qui s'exprime d'abord par le schéma herbartien réduit : $S(X ; Y ; Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

En développant le schéma herbartien réduit, on obtient le schéma dit développé, $[S(X ; Y ; Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, avec

$$M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\},$$

où les $R_i^{\lozenge}$ sont des réponses à la question Q existant dans la culture et où les O_j sont d'autres œuvres jugées utiles à la création de la réponse $R^{\heartsuit}$.

On peut décrire un certain type d'enseignements scolaires par le schéma $[S(X ; Y ; Q) \curvearrowright R_Y^{\lozenge}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, avec $R^{\heartsuit} = R_Y^{\lozenge}$, où $R_Y^{\lozenge}$ est la réponse apportée toute faite par Y ; voire par le schéma $S(X ; Y ; \not{Q}) \hookrightarrow R_Y^{\lozenge}$, où, Q étant barrée et refoulée ($\not{Q}$), $R_Y^{\lozenge}$ *cesse d'être une réponse*.

L'expression du milieu M, soit $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots , R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots , O_m\}$, montre (formellement) la diversité disciplinaire potentielle des rencontres que l'étude de Q, l'enquête sur Q, autorise : pour cette raison, on parle par défaut d'*enquête codisciplinaire*.

L'enquête sur une question Q entraîne X et Y en un *parcours* mêlant la recherche (*search for*, *búsqueda de*) et l'étude de réponses $R^{\lozenge}$ et d'autres œuvres O au travail de création de la réponse $R^{\heartsuit}$, qui est le travail de *recherche* (*research*, *investigación*) proprement dit.

L'étude d'une question Q entraîne ainsi l'étude de réponses $R^{\lozenge}$ et celles d'œuvres O d'autre nature. Parmi elles figurent notamment des questions engendrées par l'étude de Q : les questions, en effet, sont des œuvres, et parmi les plus précieuses.

L'étude d'une question Q se concrétise en un PER dont la durée peut varier. Plus largement, la description et l'analyse des PER (notamment du triple point de vue de la topogenèse, de la mésogenèse et de la chronogenèse) est un problème cardinal de la TAD.

La gestion d'un PER peut être plus ou moins *ouverte* du point de vue des œuvres (réponses, questions engendrées, autres œuvres) admises dans le milieu M, en particulier du point de vue des disciplines dont relèvent leur étude ou leur emploi.

Les contraintes scolaires actuelles tendent à imposer aux PER d'une part d'être quasi monodisciplinaires, d'autre part d'être strictement finalisés, c'est-à-dire voulus et gérés de façon à faire rencontrer des œuvres désignées à l'avance et elles seulement ou presque.

La finalisation stricte d'un PER réduit fortement son ouverture. Mais la limitation de l'ouverture d'un PER peut ne pas impliquer sa finalisation. Celle-ci est surtout typique du paradigme (dominant) de la visite des œuvres.

8. Inachèvements : les praxéologies

La notion d'*organisation praxéologique* est au cœur de la TAD. On nomme *équipement praxéologique* d'une instance (personne ou institution) les praxéologies que celle-ci peut mobiliser à un instant donné, sous certaines contraintes et dans certaines conditions.

La didactique étudie les conditions et contraintes des *dynamiques* affectant les équipements praxéologiques. Pour cela, elle doit aussi étudier la *statique* de ces équipements praxéologiques, lesquels sont eux-mêmes porteurs de contraintes et de conditions.

La notion de praxéologie a été créée pour subsumer la variété des notions par lesquelles les sociétés rendent compte de la capacité de pensée et d'action d'une personne ou d'une institution, offrant ainsi une visibilité didactique à des domaines d'activité quelconques.

La recherche en didactique doit ainsi explorer des domaines praxéologiques jusqu'ici ignorés, ou abandonnés à d'autres disciplines : ainsi en va-t-il de l'immense continent des « pratiques professionnelles » et, plus largement, des pratiques oubliées de l'école.

Même dans le champ des pratiques professionnelles les plus familières aux didacticiens, celles des professeurs, des changements attendent d'être pris en compte : ainsi en va-t-il par exemple de la diffusion impétueuse, dans les institutions de formation, du *e-portfolio*.

9. Inachèvements : le didactique

On dit qu'il y a *du didactique* dans une situation sociale si on y observe la manifestation d'une *intention*, portée par quelque instance, personne ou institution, de faire *quelque chose* pour aider quelque instance, personne ou institution, à apprendre *quelque chose*.

Dans la plupart des sociétés d'hier et d'aujourd'hui, le didactique, vital pour l'existence des sociétés, est à la fois presque partout présent et presque partout refoulé, y compris à l'école : ce refoulement du didactique fait émerger *le pédagogique*, qui le masque.

Il résulte de là que le développement historique du didactique a subi un extraordinaire retard. Longtemps les gestes didactiques se sont ainsi réduits au fait de se rendre disponible un *texte du savoir*, à faire apprendre « par cœur », et à manier durement la férule.

Sommes-nous sortis de cette gestion de l'étude qui a traversé les millénaires ? Oui, en ce qui concerne l'organisation pédagogique. Mais celle-ci masque *l'indigence du didactique* – en gros jusqu'à la création de la TSD.

On qualifiera de *didactique* toute praxéologie, si simple soit-elle, dont l'objet est d'aider quelque instance, qui peut être soi-même, à étudier une œuvre ♥, que celle-ci soit une question ou un complexe praxéologique quelconque.

On parle d'*organisation didactique* Δ quand l'aide visée consiste à organiser, de façon plus détaillée, l'étude de l'œuvre considérée. Dans le système didactique $S(X\,;Y\,;\heartsuit)$, la mise en œuvre de Δ suppose en règle générale la coopération de X et Y.

L'étude des organisations didactiques et de leur écologie doit désormais prendre en charge les effets infrastructurels dus aux TIC, qui plongent l'espace didactique usuel dans un hyperespace didactique (Chevallard & Ladage, 2008).

Le programme que propose aujourd'hui la TAD contient en particulier celui-ci : visant à décrire et à analyser (ou à concevoir et à réaliser) une organisation didactique Δ, on doit examiner la manière dont elle prend en charge tout un ensemble de *fonctions didactiques*.

Le cas le plus général étant relatif à un système didactique $S(X\,;Y\,;\heartsuit)$, où ♥ désigne une œuvre quelconque, le cas fondamental est celui où l'œuvre ♥ est une question Q du type « Comment fait-on pour accomplir une tâche du type T ? »

En ce cas, la TAD conduit notamment à interroger Δ sur la manière dont elle prend en charge les *moments didactiques* qui devraient permettre d'apporter à Q une réponse $R^{\heartsuit}$: moment de la première rencontre avec T, moment de l'exploration de T, etc.

Dans le paradigme didactique ouvert par le schéma herbartien développé, Δ doit être interrogée sur le traitement qu'elle réserve aux réponses $R^{\lozenge}$ déposées dans la culture, à propos de trois grandes questions : comment *observer*, puis *analyser* et enfin *évaluer* ces $R^{\lozenge}$?

Plus finement, Δ devra être interrogée sur la place donnée aux *dialectiques de l'enquête* (ou des PER), en particulier à la dialectique des médias et des milieux : celles-ci concernent solidairement le fait de *développer*, puis de *défendre et diffuser* la réponse $R^{\heartsuit}$.

Le cas fondamental conduit à un cas *crucial* : l'étude d'une œuvre *O* (autre qu'une question) finalisée par l'étude d'une question *Q*. En ce cas, Δ doit amener à identifier les questions auxquelles *O* (ou un ensemble d'œuvres O_j) permet de répondre.

On arrive ainsi à une situation inversée par rapport à l'ingénierie des AER : dans celle-ci, étant donné une œuvre *O*, *Y* doit disposer d'une question à laquelle *O* permettra de répondre (dans certaines conditions et sous certaines contraintes).

Ici, il appartiendra à *X* de chercher à quelles questions *O* aide à répondre. Ce qui, dans la TSD, était affaire d'ingénieurs didacticiens est ici *intégré à l'étude*, en même temps que l'analyse *a priori* externe devient analyse *in vivo* interne (Chevallard, 2011).

Références

Chevallard, Y. & Ladage, C. (2008). E-learning as a touchstone for didactic theory, and conversely. *Journal of e-Learning and Knowledge Society*, *4*(2), 163-171. http://www.je-lks.it/en/08_02/5Met_chev_franc.pdf

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnements et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques

Michèle Artigue
Équipe LDAR, Université Paris Diderot - Paris 7, France

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, Espagne

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne

Abstract. The notion of "research praxeology" shows the potential offered by the Anthropological Theory of the Didactic to address the issue of networking theories in didactics. This new tool provides a unified and effective vision for conceiving and developing interactions between theoretical approaches, once a crucial role is given to the notion of didactic phenomena. We use this analysis to reflect on networking experiences in which we have been involved within the framework of European research projects or groups.

Resumen. La noción de «praxeología de investigación» muestra el potencial de la teoría antropológica de lo didáctico para abordar el tema de la interacción entre teorías en didáctica. Esta nueva herramienta proporciona una visión unitaria y efectiva para concebir y desarrollar el trabajo de interacción entre enfoques, siempre que se le pueda dar un lugar prominente a la noción de fenómeno didáctico. El análisis introducido se ilustra con una reflexión sobre nuestras experiencias de *networking* en el marco de grupos o proyectos de investigación europeos.

Résumé. La notion de « praxéologie de recherche » montre le potentiel de la théorie anthropologique pour aborder le thème de l'interaction entre théories didactiques. Ce nouvel outil nous permet de proposer une vision unitaire et efficace pour concevoir et développer le travail d'interaction entre approches, dès lors que l'on situe au centre de l'analyse la notion de phénomène didactique. L'analyse introduite est illustrée par une réflexion sur nos expériences de *networking* dans le cadre de groupes et projets de recherche européens.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Introduction

Les questions posées par l'interaction entre approches didactiques et cadres théoriques ont été depuis ses débuts une préoccupation constante de notre communauté comme le montrent bien les travaux des 15 écoles d'été de didactique des mathématiques qui se sont succédées depuis 1980 en France. Elles ont été aussi présentes à tous les congrès de la TAD dans une au moins des séances plénières. A la première rencontre, ce sont les connexions entre la TAD et la TSD qui ont été objet d'étude lors de la conférence inaugurale de Guy Brousseau (2007). A la seconde, elle l'était à travers la conférence de Michèle Artigue (2010) où les connexions envisagées avaient été élargies mais ce qui était essentiellement présenté concernait encore une fois des articulations élaborées au sein de notre communauté, qu'il s'agisse de travaux de thèses sur les transitions institutionnelles ou du développement de l'approche instrumentale.

Ces questions sont devenues une préoccupation croissante de la communauté didactique internationale, et cette évolution est particulièrement visible au niveau européen, dans les récents colloques de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) ou dans le développement et financement de projets centrés sur ces questions. La contribution présentée ici s'inscrit dans la continuité des efforts réalisés, notamment au niveau européen, pour dépasser un morcellement théorique qui nuit à la capitalisation des connaissances et à leur exploitation didactique (cf. par exemple Prediger, Arzarello, Bosch & Lenfant, 2008 ; Prediger et al., 2010 ; Kidron et al., 2008 ; Artigue, 2009). Ces efforts ont montré que l'interaction entre cadres théoriques ou entre chercheurs de différentes approches requiert, au-delà du paradigme de la « communication » qui semble dominer aujourd'hui les activités d'échange dans les congrès et rencontres internationales, des activités d'enseignement et d'apprentissage (et donc des dispositifs d'étude) de ce que l'on fait et de ce que font les autres.

Les expériences dans lesquelles nous nous sommes engagés dans ce sens[1] nous ont aussi montré que, pour développer de façon productive de

1. Il s'agit en particulier des travaux menés au sein du groupe dit de Brême piloté par Angelika Bikner-Ahsbahs qui a émergé du colloque CERME4 et des travaux menés par le premier auteur dans le cadre des projets européens TELMA et ReMath.

telles activités, un modèle épistémologique partagé est nécessaire, c'est-à-dire une manière de décrire et pouvoir parler de ce qu'est le travail scientifique, de la façon dont il se développe et évolue. Pour que l'échange (interaction, communication, enseignement et apprentissage) puisse avoir lieu au sein de la communauté de chercheurs, nous postulons qu'il est nécessaire de pouvoir expliciter, questionner et discuter cette épistémologie générale sous-jacente, c'est-à-dire la manière dont chaque approche interprète quel est le champ empirique à considérer, quels types de problèmes l'on formule, quelles méthodologies permettent de les appréhender, quels types de résultats on peut obtenir et, plus largement, ce qu'est la recherche en didactique et quels en sont les objets.

Il nous est progressivement apparu que, pour problématiser ces questions d'articulation entre approches et organiser leur étude, pour développer un modèle épistémologique partagé, la théorie anthropologique du didactique (TAD) que nous utilisions comme chercheurs, pouvait être un outil efficace, via notamment la notion de praxéologie qui y est centrale. C'est notre travail dans cette direction que nous présentons dans cette contribution même si notre projet est loin d'être abouti.

1. Théories ou praxéologies de recherche ?

Dans le cadre de la TAD, la réflexion sur l'activité de recherche elle-même devrait se faire en termes de praxéologies, si l'on s'en tient au postulat anthropologique général qui soutient que toute activité humaine peut se décrire en ces termes (Chevallard, 1999, 2006). Nous nous proposons donc ici de considérer la notion de « praxéologie de recherche » comme un modèle épistémologique général pour aborder les activités de *networking* entre théories.

Si l'on se situe dans cette perspective, le fait de parler de *théories* lorsqu'on se réfère à différentes approches ou cadres de recherches et d'envisager à ce niveau les activités de *networking*, résulte d'une métonymie qui désigne le tout – les *praxéologies de recherche* – par une de ses parties, en l'occurrence le bloc théorique des praxéologies. Or, comme tout type de praxéologie, les praxéologies de recherche se composent d'un amalgame de pièces que l'on peut décrire à partir de quatre éléments de base [$T/\tau/\theta/\Theta$]. La paire [T/τ] correspond à ce qu'on peut appeler la « pratique (ou savoir-faire) de recherche », avec les *types de problèmes T* qu'on y aborde et les *techniques* τ utilisées dans l'approche des problèmes. Le bloc [θ/Θ] constitue alors le *discours technologico-théorique* utilisé pour décrire, justifier et interpréter la pratique de recherche et les résultats que celle-ci produit, un bloc qui s'érige souvent, comme nous disions plus haut, en le représentant par excellence de la praxéologie toute entière, avec les limitations et biais que cela peut induire dans l'approche des questions de *networking* et le travail sur ces questions. Nous postulons que le recours à la notion de praxéologie peut permettre de dépasser ces limitations, et être également utile pour réfléchir rétrospectivement sur les efforts de *networking* : analyser les difficultés rencontrées et identifier les avancées réalisées et leurs limites, en incluant les nouveaux gestes et stratégies développés dans ces efforts de *networking*.

Il nous semble également important de souligner que les praxéologies de recherche, comme les autres formes de praxéologies, sont des entités « vives » qui évoluent et se modifient, ceci affectant leurs quatre composants [T/τ/θ/Θ] et leurs interactions. L'évolution du bloc pratique [T/τ] produit ainsi de nouveaux besoins théoriques qui font évoluer le bloc théorique [θ/Θ] et, réciproquement, l'évolution des concepts, interprétations et l'apparition de nouveaux résultats permettent de construire de nouvelles techniques et de formuler de nouveaux problèmes. Comme il en va avec toute discipline scientifique, on peut trouver un amalgame praxéologique plus ou moins organisé, en fonction du niveau de maturité du champ, que le développement des approches conduit à structurer et rendre de plus en plus cohérent et facile à diffuser, selon les processus de transposition didactique et institutionnelle que nous commençons maintenant à reconnaître un peu mieux.

Les processus qui gouvernent la dynamique des praxéologies de recherche, au-delà de la description statique de ces dernières en blocs pratiques et théoriques, restent cependant à approfondir et nous nous proposons d'y contribuer en utilisant pour cela la notion de phénomène. Ceci nous conduira à mettre l'accent sur le rôle crucial de la technologie dans l'articulation des blocs pratiques et théoriques des praxéologies.

2. La notion de phénomène et la dynamique des praxéologies de recherche

2.1. La notion de phénomène didactique

La notion de phénomène n'a pas aujourd'hui une position centrale dans la plupart des approches en didactique des mathématiques. Elle a en revanche joué un rôle crucial dans la naissance de la théorie des situations didactiques (TSD) et sa vision de la didactique des mathématiques comme discipline scientifique. Bien qu'à partir de formulations sensiblement différentes selon les textes, Guy Brousseau (1997) a, dès le début, défini la didactique des mathématiques comme la science qui se donne comme but essentiel la connaissance des phénomènes didactiques qui deviennent alors à la fois construction et objet d'étude, de la même manière que la physique étudie cette construction propre que sont les phénomènes physiques, la sociologie les phénomènes sociaux, etc. (avec toutes les controverses historiques autour de la distinction, évolution et délimitation des phénomènes qu'étudie chaque science).

Quel rôle jouent les phénomènes par rapport aux praxéologies de recherche et à leur évolution ? Dans une première approche, nous pouvons caractériser les phénomènes didactiques comme des régularités construites ou obtenues à partir de l'étude de problèmes de recherche. Certains de ces phénomènes peuvent enrichir le cadre théorique de départ pour produire de nouvelles interprétations et de nouvelles techniques ou méthodologies de recherche ; d'autres resteront au niveau des « résultats obtenus » et constitueront un point d'appui essentiel pour la formulation de nouveaux problèmes.

Afin de préciser le rapport entre la notion de phénomène et les composants praxéologiques, nous commencerons par prendre un exemple très simple issu des praxéologies mathématiques. Considérons le théorème de Pythagore ou, plutôt, le phénomène sous-jacent à ce théorème, soit la régularité qui existe entre les mesures des côtés des triangles rectangles. On peut considérer au départ un type de problèmes mathématiques que l'on pourrait formuler comme le problème de la caractérisation d'un triangle rectangle ou de la représentation graphique d'un angle droit. La réponse à ce problème – soit le théorème de Pythagore lui-même –

apparaît sous la forme d'un élément « technologique » (la description d'une propriété des figures) dans la praxéologie mathématique qui se construit autour de ce type de problèmes. Cet ingrédient technologique n'est pas uniquement une description d'une régularité : il est aussi producteur de nouvelles techniques mathématiques ; il permet de formuler de nouveaux problèmes et d'obtenir de nouveaux résultats ou éléments technologiques. Et, à la longue, ce résultat finit par s'intégrer à la théorie géométrique en tant que principe de base ou axiome d'un certain type de géométrie (à métrique euclidienne). On voit donc que c'est à toute une praxéologie mathématique, avec ses types de problèmes, ses techniques et ses discours technologico-théoriques que l'on se réfère lorsqu'on parle, métonymiquement, du « théorème de Pythagore ».

De manière très synthétique, nous pouvons essayer d'établir un parallélisme (avec les précautions nécessaires) avec les praxéologies de recherche. Nous le ferons en utilisant, pour illustrer notre propos, le phénomène transposition didactique.

2.2. Phénomènes et types de problèmes

Comme toute discipline scientifique, la didactique des mathématiques se propose d'identifier et d'étudier des phénomènes (didactiques) dans le but d'acquérir une plus grande capacité d'action et de compréhension. De là que toute question ou problème de recherche doive pouvoir se relier – pas nécessairement a priori mais plus probablement après-coup – avec la mise en évidence d'un phénomène ou sa délimitation, ses conditions d'existence et d'évolution, etc.

Considérons par exemple le phénomène de la transposition didactique. Sa mise en évidence a permis de formuler et d'étudier de nombreux problèmes – voir Bosch & Gascón (2006) pour un bilan assez récent – qui ne pouvaient se formuler avant l'identification du phénomène.

2.3. Phénomènes et composants technologiques

Dans les processus de recherche, les résultats obtenus comme réponses apportées aux problèmes viennent généralement enrichir la technologie didactique de départ en y intégrant de nouvelles caractéristiques des phénomènes étudiés, de nouvelles méthodes d'analyse, voire de nouveaux phénomènes. Il existe ainsi un effet à double sens entre les résultats obtenus et l'évolution du bloc théorique des praxéologies de recherche.[2]

Ainsi, par exemple, l'étude des processus transpositifs dans différents domaines des mathématiques enseignées a pu mettre en évidence de nombreux phénomènes qui, à leur tour, peuvent servir de point de départ pour formuler de nouveaux problèmes et mettre en évidence de nouvelles régularités. On peut penser au phénomène de l'« algébrisation » des techniques et problèmes de l'analyse enseignée au lycée (Artigue, 1995) et à son utilisation pour l'analyse des praxéologies didactiques (Barbé et al., 2005), ou les phénomènes d'« arrêt » de la transposition didactique (Assude, 1993) ou de « détransposition » (Antibi & Brousseau, 2000).

2.4. Phénomènes et composants techniques

L'étude des phénomènes engendre non seulement des descriptions de régularités, contraintes ou « paradoxes », mais encore de nouvelles manières de faire pour la recherche, soit de nouvelles techniques et méthodologies. Celles-ci proviennent justement des régularités qui peuvent désormais être assumées, ou de l'élargissement du champ empirique que l'on prend comme objet d'étude.

Dans l'exemple que nous prenons sur l'étude des processus transpositifs, on peut considérer aujourd'hui que la mise en évidence des rapports et des différences, aussi bien chronologiques que diachroniques, entre savoir « savant », savoir « à enseigner » et « savoir enseigné » est devenue une technique d'analyse didactique en soi. En effet, presque tout problème de recherche abordé dans le cadre de la TAD ou de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997) avec laquelle elle entretient des relations étroites, passe par un questionnement du type : quel est le savoir en jeu, d'où provient-il, quel savoir savant le légitime, quelles modifications a-t-il subi, quels discours noosphériens soutiennent ou limitent son enseignement, etc. De même, et comme cela a été développé dans un travail antérieur de deux des co-auteurs (Bosch & Gascón, 2006),

2. Ceci est moins vrai lorsque le bloc théorique de la praxéologie de recherche est issu d'une discipline autre que la didactique et l'on obtient alors des effets à sens unique qui rompent, pour ainsi dire, la dynamique de la construction scientifique : telle notion de psychologie cognitive permettra ainsi d'analyser des faits portant sur l'enseignement des mathématiques mais, en revanche, les résultats obtenus – parce qu'externes au champ considéré – n'auront aucun effet sur le développement du cadre notionnel de départ.

la notion de transposition didactique a supposé un élargissement important du champ d'étude de la didactique vers les activités mathématiques existant en dehors de l'école.

2.5. Phénomènes et composants théoriques

Dans une praxéologie, la théorie inclut l'ensemble de notions et relations qui permettent d'appréhender des phénomènes (les décrire, formuler des questions, etc.), les enrichir et identifier de nouvelles régularités. En tant que second niveau justificatif de l'activité (après celui de la technologie), la théorie comprend aussi les assomptions que l'on adopte, soit encore ces éléments technologiques qui, par leur solidité et permanence, finissent par devenir non-questionnés et allant de soi. On trouve alors, à ce niveau, la réponse implicite à des questions du genre : quels phénomènes étudions-nous, qu'est-ce qu'un problème en didactique, etc. Les élargissements empiriques dont nous parlions plus haut s'intègrent eux aussi à ce niveau à partir du moment où ils deviennent des assomptions de base, implicites car non questionnées. En même temps, l'unité d'analyse assumée détermine le type de phénomènes que l'on peut considérer et le type de données que l'on doit collecter pour l'étude de ces phénomènes.

On peut dire, en effet, que l'existence de processus transpositifs entre institutions est actuellement une assomption théorique de la TAD qui n'est pas questionnée ni même questionnable au sein de cette théorie.

C'est cette dynamique praxéologique, qui permet que les phénomènes étudiés produisent des résultats technologiques, devenant au bout d'un certain temps des outils théoriques et des producteurs de nouvelles techniques de recherche, que nous allons essayer de faire fonctionner pour analyser deux de nos expériences de *networking* avec des groupes de chercheurs européens en didactique.

3. L'expérience du groupe *Networking theories in mathematics education*

Ce groupe appelé « groupe de Brême », créé en 2005, est un groupe de travail intégrant 12 chercheurs de 6 pays différents dont le travail vise l'échange, la confrontation et l'articulation de cadres théoriques. Les résultats obtenus ont été présentés dans les éditions antérieures de CERME et ils ont récemment fait l'objet d'un forum à PME34 (Bikner-

Ahsbahs et al., 2010). Nous analyserons ici un épisode de son travail, déjà partiellement présenté dans (Artigue, Bosch, Gascon & Lenfant, 2010). Nous verrons avec cet exemple comment les questions de recherche et les composantes théoriques des praxéologies ont une influence évidente sur les méthodologies de recherche développées (composante technique), les unités d'analyse considérées comme pertinentes, ainsi que sur les phénomènes identifiés.

Le travail initial du groupe a été basé sur l'analyse par chaque équipe selon ses perspectives propres d'une vidéo correspondant à une séance de classe au niveau seconde réalisée en Italie, et des documents jugés nécessaires par les collègues italiens pour pouvoir mener à bien son analyse. Pour tous les groupes, les données fournies se sont révélées insuffisantes. La vidéo donnait à voir deux élèves travaillant en binôme, l'enseignant intervenant très peu, et les angles de vue étaient souvent inattendus. Les informations complémentaires fournies sur cette séance et son environnement étaient très limitées, rendant une analyse portée par la TSD très hypothétique et une analyse portée par la TAD quasiment impossible. C'est seulement en écoutant l'équipe italienne développer son analyse que les autres équipes ont compris pourquoi elle avait pu considérer les documents envoyés comme suffisants, la rationalité qui soustendait les prises de vues, privilégiant les gestes par rapport aux autres systèmes d'ostensifs, à quel point aussi le type d'analyse que son approche théorique induisait, nécessitait des outils de micro-analyse capables de rendre visible la richesse des actions et interactions sémiotiques et de se donner les moyens de questionner et rendre intelligibles leurs effets cognitifs (Arzarello et al., 2009). Des informations supplémentaires ont été demandées pour compléter les analyses partielles effectuées et, notamment, un questionnaire a été adressé à l'enseignant qui avait assuré la séance. Dans les réponses fournies par ce dernier, plusieurs chercheurs ont remarqué le passage suivant :

> « I try to work in a zone of proximal development. The analysis of video and the attention we paid to gestures bring me to become aware of the so called 'semiotic game' that consists in using the same gestures of students but accompanying them with a more specific and precise language in a relation to the language used by students. Semiotic game, if it is used with

> awareness, may be a very good tool to introduce students to institutional knowledge. »

Cette convergence d’intérêt a conduit à développer un nouveau dispositif pour progresser dans le travail collaboratif visé : demander à une des équipes d’associer à ce passage une question formulée dans le cadre de la TSD puis demander à chacune des autres équipes de la reformuler dans son propre cadre. Nous reproduisons ci-après l’introduction qui précède la formulation de la question dans le cadre de la TSD et qui emprunte également à la TAD.

> « The connection between the mathematics produced by students in what we would label, using the TDS frame, an a-didactic situation through interaction with the a-didactic milieu of this situation on the one hand, and the institutional knowledge aimed at on the other hand, generally requires at least changes in the ways the mathematics at stake are expressed in order to progressively tune these with conventional forms of expression. D. considers that he has a specific mediating role to play for making this connection possible and uses semiotic games as a tool for that. In other terms, semiotic games can be considered as components of the praxeology (or more certainly one of the praxeologies) that he has developed in order to solve this didactic task. »

L’expression « semiotic game » dénote donc ici ce qui peut être considéré comme une technique, composante d’une praxéologie didactique, résultant de l’identification d’un phénomène particulier de médiation sémiotique. Interprétée en ces termes, elle nous montre comment une centration théorique (ici centration sémiotique) conduit à l’identification de phénomènes particuliers pouvant eux-mêmes conduire à des élaborations théoriques ou à des techniques didactiques pouvant être mises au service d’une efficacité accrue des processus d’enseignement et d’apprentissage.

Mais un regard porté par la TSD amène à questionner l’efficacité de cette praxéologie didactique pour deux raisons. Tout d’abord, le fait que les interactions avec le milieu a-didactique sont très souvent insuffisantes pour permettre d’établir une connexion directe avec les savoirs institutionnels visés, ceci conduisant à différents phénomènes comme l’effet Topaze, l’effet Jourdain, le glissement méta-cognitif, phénomènes tous associés à la notion de contrat didactique. Ensuite, le fait que les situations a-didactiques sont le plus souvent, dans la réalité des classes, des situations d'action et que, de ce fait, le travail linguistique, même s'il y est possible, n'est pas pris en charge dans le pilotage de la situation par les variables didactiques.

L'analyse de la vidéo de ce point de vue laissait penser que, pour la situation considérée, la distance entre ce que semblaient avoir produit et construit les élèves et les savoirs a priori visés par l'enseignant, tels qu'il les exprimait dans sa réponse au questionnaire, faisait que la productivité du *semiotic game*, dans ce contexte précis, restait problématique. D'où la question posée :

> « Do the episodes at our disposal allow us to identify characteristics of the semiotic game technique that would help us to understand their potential for compensating the possible limits of the interaction with the a-didactic milieu for achieving the expected mathematical goals, and linguistic evolution linked to the needs of institutionalization processes? »

Dans le groupe de Brême, chacun a donc reformulé cette question ou pour le moins formulé une question inspirée par cette déclaration de l'enseignant dans son propre cadre. L'on voit ici comment l'intervention d'un nouveau cadre théorique, dans ce cas la TSD, peut conduire à questionner une praxéologie didactique qui peut être légitimement vue comme un résultat de recherche dans une autre culture didactique, conduisant à développer pour répondre à la question posée une nouvelle praxéologie de recherche qui n'avait aucune raison d'apparaître dans une culture didactique ou dans l'autre, et ne doit son existence qu'au travail volontairement engagé pour les articuler.

Dans l'espace limité de cette contribution, nous ne rentrerons pas plus avant dans l'étude de cette praxéologie de recherche, ni dans la présentation des résultats auxquels elle a menés et la façon dont certains de ces résultats sont progressivement élaborés en phénomènes, au fil d'une recherche qui est toujours en cours. Nous espérons cependant avoir montré à quel point les relations qui existent entre les différentes composantes des praxéologies de recherche comme entre celles-ci et les praxéologies didactiques nourries des résultats de la recherche, méritent notre attention, comment aussi une approche praxéologique invite à problématiser la question des interactions entre cadres théoriques de façon plus riche et productive que celle qui consisterait à chercher directement des liens entre les constructions conceptuelles développées dans ces différents cadres.

4. L'expérience du projet européen ReMath

La seconde expérience que nous souhaitons évoquer est celle du projet européen ReMath[3] qui présente elle aussi diverses facettes intéressantes pour mettre à l'épreuve une approche du travail de *networking* en termes de praxéologies de recherche. Un but essentiel de ce projet était d'aider, via la production d'un cadre théorique intégré, la capitalisation des recherches concernant l'apport des technologies numériques à l'apprentissage des mathématiques, avec une centration particulière sur les apports au niveau des systèmes de représentations et plus généralement de l'activité sémiotique. Impliquant pendant quatre ans six équipes européennes et s'appuyant sur le travail antérieurement mené au sein de l'équipe européenne TELMA (Artigue, 2009), il a permis de développer une méthodologie relativement sophistiquée impliquant des expérimentations croisées, en s'appuyant sur un méta-langage initialement créé dans TELMA et en portant en permanence un regard réflexif sur le travail en cours. Il a permis aussi d'inscrire le travail de *networking* théorique dans un dialogue permanent entre le design d'artefacts numériques (DDA) et celui de leurs usages, et ce dans des contextes éducatifs différents.

La praxéologie de recherche ainsi constituée a fait émerger des questions proches de celles qui ont été évoquées ci-dessus à propos du groupe de Brême, et ce sont ces dernières que nous utiliserons d'abord pour illustrer notre propos.

4.1. Chaînes sémiotiques et/ou effet Topaze

Ces questions ont émergé dans le contexte des expérimentations croisées menées entre les équipes de l'université de Sienne et de l'université

3. Tous les documents relatifs au projet ReMath sont accessibles sur le site du projet remath.cti.gr. L'intégration théorique était portée par le WP1 et le rapport Del.18 en synthétise les résultats. L'organisation méthodologique était portée par le WP4 et le rapport Del.13 en rend compte.

Paris 7 (équipe DIDIREM devenue depuis LDAR) (Lagrange et al., 2010). Les deux équipes ont en effet élaboré des scénarios d'usage pour le même logiciel Casyopée développé au sein de l'équipe DIDIREM. Ce logiciel vise l'enseignement des fonctions et offre à la fois des moyens aujourd'hui classiques de connexion entre cadres et registres pour ce type d'objet et des caractéristiques plus innovantes. Il s'agit notamment :

- d'un niveau de calcul géométrique assurant une strate intermédiaire entre le niveau « énactif » de la manipulation directe d'objets et des effets perceptifs associés et le niveau fonctionnel,
- et d'un support à la modélisation fonctionnelle de situations géométriques basée sur ce calcul, permettant d'évaluer les effets de différents choix de variables indépendantes ou supposées telles sur la possibilité de modélisation fonctionnelle et les objets fonctionnels qui en résultent, et prenant en charge la conversion.

Les scénarios élaborés étaient différents mais, dans ce cas particulier, le problème mathématique qu'il s'agissait de résoudre était commun. C'est au cours des analyses croisées effectuées par les chercheurs des réalisations de ces scénarios dans deux classes pour chaque pays que les questions proches de celles évoquées ci-dessus à propos du groupe de Brême ont émergé. Cette fois, il n'était pas question de « *semiotic game* » mais de « *semiotic chain* » une notion centrale dans le cadre de la théorie de médiation sémiotique (TSM) dans laquelle se situaient les collègues italiens (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Dans la TSM, les artefacts, numériques ou autres, sont perçus comme des outils de médiation sémiotique. Ils soutiennent l'action, conduisent à l'élaboration de signes contextualisés à cette action et à l'artefact dans l'interaction des élèves avec les tâches mathématiques proposées. C'est ensuite une tâche essentielle de l'enseignant que de permettre un double processus de décontextualisation (à la fois par rapport au contexte de la tâche et à l'artefact) pour permettre l'accès aux savoirs et formes d'expression de ces savoirs culturellement partagées. La distance existante entre ce qui résulte du travail des élèves et les formes culturelles n'est en rien niée et c'est pourquoi, dans les scénarios inspirés par la TSM, les phases d'élaboration collective appuyées sur les écrits réflexifs des élèves assurant une première distanciation par rapport à l'action, ont une durée et un rôle crucial.

Les transcriptions de ces phases collectives ont d'abord fait l'objet d'analyses séparées puis ces analyses ont été comparées, l'ensemble du dispositif faisant l'objet d'un protocole élaboré dans le cadre du projet (une technique d'étude). Les analyses de second niveau montrent que celles de premier niveau faites par les chercheurs de DIDIREM ont essentiellement découpé le *transcript* en épisodes déterminés par des changements de responsabilité (topogénèse) ou de question traitée. Très attentifs aux questions de contrat didactique, ils identifient ce qui leur apparaît comme un certain nombre d'effets Topaze. Les analyses de premier niveau montrent un découpage très différent, porté par le début et la fin de chaînes sémiotiques qui assurent la transition entre des signes langagiers ou autres étroitement liés à l'action avec l'artefact et des signes mathématiques au moins partiellement décontextualisés. Et l'accent est mis à travers l'analyse des échanges sur la contribution conjointe des élèves et de l'enseignant à l'élaboration de ces chaînes sémiotiques, même si les rapports à ces chaînes des uns et des autres sont différenciés.

Le travail commun qui a été mené à partir de ces analyses de premier niveau a conduit à questionner bon nombre d'interprétations faites en termes d'effet Topaze, mais appliqué aux transcriptions des phases collectives dans les classes françaises, il a montré que la situation était moins claire. La culture didactique des enseignants et des chercheurs impliqués, moins outillée théoriquement dans cette dimension sémiotique, se traduisait par des phases collectives vues comme des phases d'institutionnalisation succédant à des phases a-didactiques d'action. Elles étaient courtes et très différentes dans leur dynamique des phases de discussion collective des classes italiennes. Les effets Topaze y semblaient effectivement plus fréquents.

Il est impossible dans les limites de ce texte de rentrer davantage dans les détails de l'étude menée de ces phénomènes et de leurs rapports possibles pour laquelle nous renvoyons à (Lagrange et al., 2010), mais les éléments fournis suffisent, nous l'espérons, à montrer que ce qui a rendu l'étude possible et productive, c'est la mise en place d'une praxéologie de recherche spécifique, originale par rapport à celles existantes dans les deux équipes concernées.

4.2. Design didactique et objets frontières

Dans le projet ReMath, le travail sur l'intégration théorique se voulait pensé dans sa fonctionnalité par rapport au design : design de DDA ou ingénierie didactique proprement dite. Cette ingénierie didactique avait une double fonction. Elle avait pour but d'explorer les potentialités offertes par les systèmes de représentation des objets mathématiques des DDA développés pour l'apprentissage des mathématiques. C'est là une fonction classique de l'ingénierie didactique : explorer la possibilité des formes de vie didactique nouvelles, tant au niveau des organisations mathématiques que didactiques, et évaluer les conditions d'une écologie possible si elles se révèlent intéressantes. Mais l'ingénierie avait ici également une autre fonction. Elle se voulait outil de l'intégration et de l'articulation théorique. Elle était de ce fait inscrite dans deux praxéologies de recherche distinctes mais non indépendantes et, en tant que technique, devait servir les deux tâches considérées. Ceci explique la sophistication de cet objet, dont une part, gérée par chaque équipe, était sous le contrôle technologique et théorique de cette équipe et visait à étudier le potentiel d'un DDA bien précis, et l'autre part transversale, pilotée globalement par une équipe, celle de Sienne, devait construire à partir de ces ingénieries particulières une technique d'étude partagée du problème d'intégration théorique. D'où, par exemple, la formulation d'une question commune de recherche déclinée ensuite pour chaque ingénierie particulière, les questions spécifiques, le dispositif des analyses croisées et le cadre d'analyse associé, tout comme celui des DDA à travers la notion de profil épistémologique.

L'équipe DIDIREM a été engagée dans deux expérimentations, celle de Casyopée, et celle de Cruislet, un DDA construit par l'équipe grecque ETL. Casyopée, bien que très innovant, reste à une distance raisonnable du curriculum (la sensibilité aux conditions et contraintes institutionnelles induites par la TAD, la force des contraintes institutionnelles dans le contexte français n'y sont sans doute pas étrangères). Ce n'est en rien le cas de Cruislet qui est un logiciel basé sur un système 3D de représentation de la Grèce (type Google-Earth) auquel a été ajoutée la possibilité de créer des avatars (avions) et de les piloter soit directement (en définissant un vecteur de déplacement ou un point d'arrivée), soit indirectement par des programmes écrits en Logo, les déplacements étant visualisés par des vecteurs.

La comparaison des scénarios préparés par les deux équipes met en évidence les effets des différences d'approches. L'équipe DIDIREM consciente des difficultés d'intégrer un tel DDA dans l'enseignement français, a décidé de l'utiliser dans un dispositif moins contraint et plus ouvert sur des problématiques et objets hors-scolaires : celui des « travaux pratiques encadrés » (TPE), en l'introduisant au cours de la phase d'initiation aux TPE (Le Feuvre, Meyrier & Lagrange, 2010). Trois séances ont été organisées autour de tâches de simulation ou de programmation de vols sous contraintes et il était prévu de proposer aux élèves qui le souhaiteraient de poursuivre ce travail dans leur TPE. Aucun ne l'a fait, jugeant apparemment le projet trop risqué. ETL, soumise dans son contexte à moins de contraintes, a mis en place une longue expérimentation d'une vingtaine d'heures.

Au-delà de ces caractéristiques contextuelles dont l'impact n'est en rien négligeable, on note cependant entre les deux visions de l'ingénierie engagées dans les réalisations des deux équipes des différences profondes. L'équipe DIDIREM est portée par une vision « classique » de l'ingénierie. La composante théorique de la praxéologie de recherche élaborée est basée sur la TSD et l'approche instrumentale. La TAD sert de façon plus indirecte, en créant une sensibilité à la distance curriculaire. Vu les caractéristiques de l'artefact, les tâches envisagées sont distantes des tâches scolaires usuelles pour jouer sur la proximité du DDA avec des objets sociaux mais elles sont élaborées pour que les questions que leur réalisation pose mette en jeu des connaissances mathématiques valorisables au lycée, soit en mathématiques soit dans l'articulation entre mathématiques et autres disciplines : coordonnées sphériques, vecteurs, trigonométrie, algorithmique, etc. Les variables de ces tâches sont choisies pour favoriser un fonctionnement a-didactique sur une partie substantielle du scénario, sur la base d'une analyse a priori qui se révèle cependant difficile.

La situation est tout autre pour ETL dont l'ingénierie se situe dans un autre cadre théorique : celui du constructionnisme (Papert, 1980). Les choix qui pilotent l'ingénierie sont différents. En accord avec le constructionnisme, il ne s'agit en aucun cas de viser des praxéologies mathématiques finalisées (Chevallard, 2011) mais de garantir que l'environnement offert est suffisamment riche pour nourrir des constructions et interactions productives, d'organiser la collaboration des élèves autour de réalisations partagées, en exploitant la possibilité dans Cruislet de créer et animer des objets à travers notamment la programmation (d'où la notion cruciale pour cette équipe de *half-baked microworld* désignant un micromonde non « terminé », conçu pour pouvoir évoluer sous l'action des utilisateurs (Kynigos, 2007)). Due à la familiarité culturelle avec le langage Logo, le DDA est d'ailleurs moins distant de ceux utilisés usuellement, et des tâches comme « Devine ma fonction » mises au point dans d'autres micro-mondes peuvent être recyclées sous la forme « Devine mon vol ». Le souci de relier avec des préoccupations non-scolaires pour viabiliser l'intégration n'est pas présent et ceci se traduit par des tâches moins ambitieuses mathématiquement en un certain sens.

La première expérimentation de DIDIREM se révèlera très difficile. Les enseignants préoccupés par l'expérimentation de ce DDA si distant des logiciels utilisés en mathématiques au lycée, et également par la distance des questions posées avec les questions mathématiques usuelles, par l'ouverture aussi de ces questions telles que proposées dans le scénario initialement élaboré par les chercheurs, soucieux d'emporter l'adhésion des élèves, adapteront le scenario pour réduire cette distance. Ceci les conduira notamment à essayer de limiter l'incertitude des trajectoires mais sans avoir les moyens d'anticipation permettant de limiter cette incertitude. Il en résultera un fonctionnement des séances difficile où ils auront sans cesse à intervenir. Les analyses qui en seront faites fourniront cependant des outils pour créer un nouveau scénario dans un dispositif d'atelier universitaire pour des élèves de fin de collège, sur la base cette fois d'une analyse a priori efficace et de tâches plus ouvertes.

Pour ETL, l'expérimentation réalisée sera d'emblée considérée comme un succès. L'analyse croisée des deux expérimentations montrera à quel point les épistémologies sous-jacentes à l'ingénierie, les contraintes de contrôle de l'ingénierie induites par ces deux cadres théoriques et leur rapport à une référence épistémologique mathématique sont différents. Ces différences influent en retour sur ce qui est attendu des analyses et donc sur ce qui est considéré comme résultat pour chacune des praxéologies de recherche considérées. Il est clair par exemple que la notion de situation fondamentale et ce qui la fonde épistémologiquement ne fait pas sens pour ETL. Les processus d'instrumentalisation y sont par ailleurs vus dans une dimension de créativité qui est en net décalage avec la vision portée par l'approche instrumentale même si, en accord avec Rabardel, cette dernière reconnaît que la conception se poursuit dans l'usage. La notion de *half-baked microworld* soutient cette perspective. Néanmoins les analyses croisées montreront que des ponts peuvent être construits autour de la notion de milieu, lorsque celle-ci est vue comme un objet frontière entre deux cultures de recherche qui, au-delà de leurs différences, accordent toutes deux une importance cruciale à la dimension d'adaptation de l'apprentissage en mathématiques.

4.3. Commentaires

Nous nous limitons ici à l'évocation de ces deux « résultats » du projet ReMath, mais voudrions souligner que, rétrospectivement, il apparaît clairement que ce qui a fait le succès de cette entreprise, c'est sans aucun doute le fait qu'elle ait considéré nécessaire, pour aborder la question du *networking* théorique, de construire des techniques spécifiques permettant d'étudier collectivement les cadres théoriques des uns et des autres en fonctionnement, dans leur dimension opératoire d'outil. La double dimension de design prise en compte, le caractère substantiel des réalisations, la formulation de questions communes puis leur déclinaison par chaque équipe et l'ajout de questions spécifiques, l'organisation stricte des interactions tout au long du design, des réalisations expérimentales et des analyses a posteriori ont joué ici un rôle essentiel.

Avec le soutien du méta-langage constitué, celui des « *concerns* » mais aussi celui des *fonctionnalités didactiques* particulièrement adaptées à cette dimension de design, elle a permis en fait de construire la recherche autour de l'étude de praxéologies de recherche suffisamment rapprochées et visibles dans leurs différentes composantes pour que les analyses comparatives et en particulier les analyses croisées des expérimentations concernant le même DDA puissent être productives, et ce sans que les différentes équipes n'aient l'impression de devoir entrer dans une cohérence praxéologique aliénante.

Comme cela a été souligné plus haut, la méthodologie utilisée a en fait permis que les expérimentations menées contribuent à deux praxéologies de recherche : d'une part une praxéologie inscrite dans la culture didactique propre de chaque équipe visant à identifier les potentialités d'apprentissage offertes par les systèmes de représentation des objets mathématiques des DDA développés et à évaluer les conditions d'une écologie possible de ces potentialités, d'autre part une praxéologie inscrite dans une culture partagée, en cours d'élaboration, visant l'étude des potentialités de *networking* théorique entre les équipes. Les résultats obtenus au sein du projet ReMath résultent de l'interaction réussie de ces deux types de praxéologies de recherche. Ceux concernant la seconde praxéologie visant le *networking* ne prétendent certes pas encore à une conversion en phénomènes mais on peut déjà voir qu'ils sont multiformes et ne devraient pas contribuer de la même façon à une dynamique de praxéologies de *networking* encore en devenir. Certains sont d'ordre méthodologique et concernent *a priori* davantage le bloc pratique de telles praxéologies tandis que d'autres comme ceux concernant les relations entre phénomènes appartenant à des cultures différentes : chaîne sémiotique et effet Topaze par exemple, ou ceux concernant l'identification d'objets frontières susceptibles de faciliter la communication entre cadres théoriques ont *a priori* plutôt vocation à enrichir un bloc théorique. Certains résultats montrent des connexions voire des intégrations possibles, d'autres des limites évidentes à de telles ambitions.

Ce qui précède nous semble aussi montrer qu'une réflexion a posteriori sur le projet ReMath outillée par la notion de praxéologie de recherche peut permettre d'identifier des conditions susceptibles d'aider les pratiques de *networking* à dépasser l'état d'artisanat que jusqu'ici le travail sur ces questions a du mal à dépasser.

5. Quelques remarques en conclusion

L'analyse rétrospective des deux recherches que nous venons d'esquisser nous semble confirmer notre postulat initial que le *networking* de cadres théoriques doit se situer dans une perspective plus large que la comparaison et la mise en relation des objets et relations qui les structurent. Elle nous semble aussi montrer qu'une approche en termes de praxéologies de recherche permet d'élargir la perspective de façon productive, et ce notamment parce qu'elle aide à aborder la question essentielle des fonctionnalités des cadres théoriques, en les insérant dans une pratique.

L'articulation de cadres théoriques en tant que tâche s'insère elle aussi nécessairement dans des praxéologies dont l'efficacité va dépendre des techniques et technologies associées. Les projets européens évoqués montrent des praxéologies émergentes pour approcher ce type de tâches, avec leurs techniques mais aussi des technologies embryonnaires sous forme de classifications, de panoramas structurés, de méta-langages.

Le modèle des praxéologies de recherche devrait permettre également, nous semble-t-il, de comparer les différents efforts de *networking* existant et de les situer, voire d'en constituer de plus performants en englobant justement les cadres théoriques dans les praxéologies qui leur donnent sens. Il s'agit-là d'une hypothèse qui n'a pas été encore sérieusement travaillée. Il nous semble aussi important de ne pas être aveugle à la façon dont la pensée se trouve conditionnée par cet outil que sont les praxéologies de recherche, et aux limites qui peuvent en résulter. Mais, ici comme ailleurs, la prise en compte de ces limites rentre dans la vigilance épistémologique obligée de toute démarche de recherche.

Références

Antibi, A. & Brousseau, G. (2000). La *détransposition* des connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*(1), 7-40.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Dans M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Éds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México : Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. Dans D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Éds), *Proceedings of CERME 5* (pp. 68-82). Nicosia : Cyprus University Press.

Artigue, M. (2009, Éd.). Connecting Approaches to Technology Enhanced Learning in Mathematics: The TELMA experience. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(3), numéro spécial.

Artigue, M. (2010). La théorie anthropologique du didactique: rapports et articulations possibles avec d'autres approches. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 29-53). Montpellier, France : IUFM.

Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. & Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Éds), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1535-1544). Lyon, France : INRP.
http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

Assude, T. (1993). Écologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum. *Petit x*, *35*, 43-58

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 235-268.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Dans L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Éds), *Handbook of International Research in Mathematics Education,* 2nd ed. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

Bikhner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M. & Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. Dans M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Éds), *Proceedings of PME 34*, vol. 1 (pp. 145-175). Belo Horizonte, Brésil.

Bosch, M., Gascón, J. (2006). 25 years of the Didactic Transposition, *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction 58*, 51-65.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques : questions et perspectives. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 23-52). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (Éd.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelone : FUNDEMI-IQS.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M. & Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 247-264.

Kynigos, C. (2007). Half-baked microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education*, *6*(2), 1-24.

Lagrange, J. B., Artigue, M., Cazes, C., Gelis, J. M. & Vandebrouck, F. (2010). Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur. Dans M. Abboud-Blanchard, A. Flückiger (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 67-99). IREM Paris 7.

Le Feuvre, B., Meyrier, X. & Lagrange, J. B. (2010). Apprendre des notions mathématiques, géographiques et algorithmiques, à l'aide

d'un environnement de navigation 3D au-dessus de la Grèce. *MathémaTICE.*
http://revue.sesamath.net/spip.php?rubrique 65

Papert, S. (1980). *Mindstorms*. New York : Basic Books.

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. & Lenfant, A. (2008, Éds). Comparing, Combining, Coordinating – Networking strategies for connecting theoretical approaches, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), numéro spécial.

Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J. & Sensevy, G. (2010). Introduction. Different Theoretical Perspectives and Approaches in Mathematics Education Research – Strategies and difficulties when connecting theories. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Éds), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529-1534). Lyon, France : INRP.
http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire

Yves Matheron
IFÉ-ENS de Lyon et IREM d'Aix-Marseille, France

Robert Noirfalise
IREM de Clermont-Ferrand, France

Abstract. The (CD)AMPERES Project (Creation and Spreading of Mathematical Activities and of Study and Research Courses at Secondary School Level) was set up in September 2005. It mobilizes nine teams of mathematics teachers at secondary school in order to create and put into practice Study and Research Courses (SRC), assuming the restrictions of ordinary schools. Our objective is based on examples from some SRC implementations that show how, beyond their simple design, the project makes it possible to analyse under which restrictions the teaching processes of mathematics are being developed.

Resumen. El proyecto (CD)AMPERES (Concepción y difusión de actividades matemáticas y de recorridos de estudio e investigación en la enseñanza secundaria) se inició en septiembre de 2005. Moviliza nueve equipos de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria para concebir y poner en práctica recorridos de estudio e investigación (REI) asumiendo las restricciones de la enseñanza ordinaria. Nuestro propósito se apoya en ejemplos sacados de algunas implementaciones de REI que muestran cómo, más allá de la simple concepción del REI, el proyecto permite examinar bajo qué restricciones, generalmente invisibles por naturalizadas, se desarrollan los procesos de enseñanza de las matemáticas.

Résumé. Le projet (CD)AMPERES (Conception et diffusion d'activités mathématiques et de parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire) a été lancé en septembre 2005. Il mobilise neuf équipes de professeurs de mathématiques des collèges et lycées pour concevoir et mettre en œuvre des parcours d'étude et de recherche (PER) à l'intérieur des contraintes de l'enseignement ordinaire. Notre propos s'appuie sur des exemples issus de certaines de ces réalisations qui montrent en quoi, au-delà de la seule conception de PER, ce projet permet d'examiner sous quelles contraintes souvent invisibles, car naturalisées, se déroulent les processus d'enseignement des mathématiques.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 57-76)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Le projet (CD)AMPERES : motivations et méthodologie

1.1. Motivations

Le projet (CD)AMPERES, pour « (conception et diffusion) d'activités mathématiques et de parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire », se fonde tout d'abord sur une double analyse des pratiques courantes d'enseignement et des programmes existants.[1] Un premier regard permet de constater que ces derniers rendent non visibles les raisons d'être des objets mathématiques proposés à l'étude.

Voici, pour illustrer ce propos, un extrait du programme français de la classe de 2[de] (élèves de 15-16 ans) qui fut en vigueur de 2000 à 2010 :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 57×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Table 1. Extrait du programme de 2[de]

On peut par ailleurs dans ce programmes relever les lignes suivantes : « Objectifs : Approfondir la connaissance des différents types de nombres ; Expliciter sous différents aspects (graphique, calcul, étude

1. On trouvera un certain nombre des productions et des textes fondateurs de (CD)AMPERES à l'adresse http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/

qualitative) la notion de fonction ; Étudier quelques fonctions de référence, préparant à l'analyse. » Certes pourrait-on dire, mais pourquoi cela, car l'enseignement des mathématiques semble se suffire à lui-même ? Les programmes sont ainsi faits d'une liste de contenus et de capacités, sans explicitation des réelles finalités, sans qu'apparaissent les raisons qui pourraient justifier l'intérêt de leur étude. Pourquoi « décomposer un entier en produit de facteurs premiers » ? Pourquoi « comparer a, a^2 et a^3 » ? Existe-t-il des situations où il est utile « de parler facilement de la distance entre deux nombres » ? Les professeurs, qui possèdent une culture mathématique, peuvent sans doute répondre à ces questions, mais qu'en est-il de leurs élèves ?

On sait aussi que le savoir mathématique s'est historiquement construit comme ensemble de réponses à des questions ; c'est aussi le cas d'autres savoirs scientifiques (Bachelard, 1938/1984) et le cas plus général des œuvres selon la définition qu'en donne Yves Chevallard (1996). Le réseau (CD)AMPERES tente de faire vivre dans les classes « ordinaires », et non pas seulement dans des écoles dédiées à l'observation, une genèse artificielle du savoir fondant les mathématiques à enseigner – celles désignées comme telles par le programme – en tant que réponses collectivement apportées à au moins une question. Le choix du questionnement à l'origine de l'étude et de la recherche par les élèves résulte de l'analyse de la transposition didactique menée par chacune des équipes (CD)AMPERES. Puis, sous la direction du professeur, les élèves de ces classes ont à rechercher et construire des réponses qui, une fois institutionnalisées, deviennent le savoir mathématique du programme.

Ainsi, en tenant compte des contraintes imposées par l'organisation des mathématiques du programme, un important travail mené par les professeurs des équipes (CD)AMPERES consiste-t-il à rechercher des questions à fort pouvoir générateur d'étude et de recherche. Celles qui sont proposées dans les équipes du réseau sont alors examinées à partir des fonctions qu'elles doivent assurer. Comme on l'a dit, la forme actuelle de l'enseignement des mathématiques se caractérise par une tendance générale à l'absence de motivation du savoir (Chevallard, 2007) et aussi par ce qui a pu être caractérisé comme relevant d'une forme « d'autisme thématique » (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003). À l'opposé de cet état de fait, et à travers l'évaluation des questions candidates à générer l'activité d'étude et de recherche des élèves, il s'agit pour (CD)AMPERES, de motiver le savoir à étudier, c'est-à-dire de faire vivre par les élèves au moins une de ses raisons d'être. Ce savoir est alors une réponse à une question engageant les élèves dans la recherche. Il s'agit aussi de s'assurer, à partir de l'analyse de l'organisation mathématique constituée des réponses potentiellement apportées à la question, de la production de recouvrements partiels, mais assez larges, du (des) programme(s) à étudier et courant parfois sur un ou plusieurs niveaux scolaires. Les questions à fort pouvoir générateur d'étude et de recherche (QFPGE), qui initient des PER finalisés par les contenus du programme, sont donc à déterminer par les professeurs de (CD)AMPERES en se plaçant aux niveaux des secteurs et domaines des mathématiques transposées.

De telles questions engendrent alors une dynamique de production de sous questions dont les réponses constituent les thèmes et sujets étudiés. C'est ainsi prendre le contre-pied de ce qui se fait couramment dans l'enseignement actuel des mathématiques et dont témoignent les activités des manuels scolaires. Sous la forme didactique de l'ostension déguisée (Berthelot & Salin, 1992), et parce qu'ils sont nombreux, divers et peu connectés les uns aux autres, les sujets mathématiques enseignés nécessitent d'être regroupés a posteriori au sein de niveaux d'organisation mathématique d'ordre supérieur afin qu'apparaisse le véritable enjeu de l'étude. La question didactique qui se pose est alors celle des conditions de ce regroupement : sont-elles organisées par le professeur pour faciliter le travail des élèves ou bien laissées à leur charge, à leurs capacités personnelles d'étude ? Quels sont alors les risques encourus pour les élèves ? Il peut s'agir d'une différenciation de l'engagement dans l'étude résultant de la capacité personnelle à construire et rencontrer de manière privée des moments adidactiques à partir desquels ont lieu des après-coups ; ces derniers permettant de reconstruire et de réorganiser ses rapports personnels aux savoirs, de les rendre plus ou moins conformes à ceux attendus. Le schéma ci-dessous, qui s'appuie sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique, illustre dans sa partie droite le travail du professeur et des élèves dans l'enseignement ordinaire ; dans sa partie gauche ce travail au sein d'un processus didactique pour lequel l'étude est amenée par une question posée à un niveau de généricité mathématique plus élevé, de l'ordre du secteur.

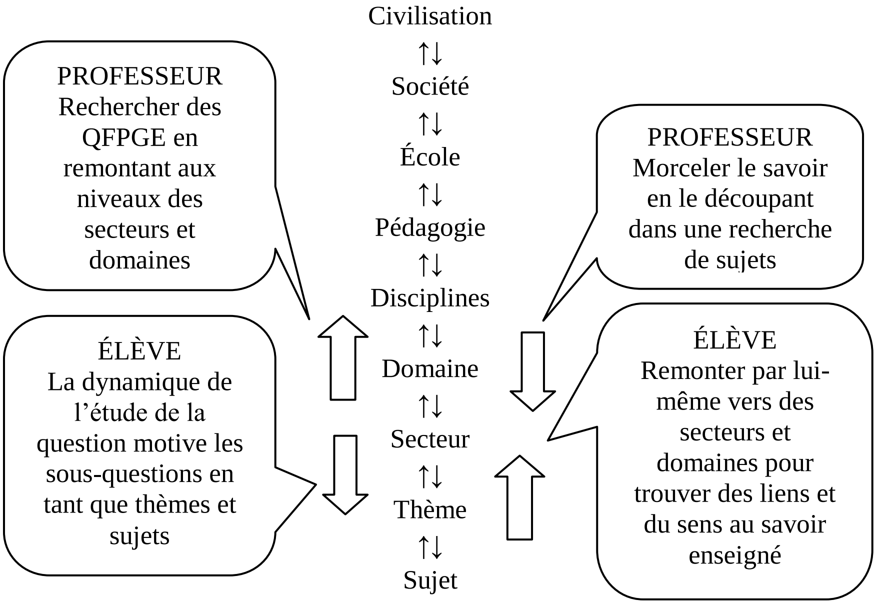


Figure 1. Travail du professeur et des élèves référé aux degrés de généricité et de spécificité du savoir selon deux types d'organisation didactique

1.2. Méthodologie et contraintes

Le travail de (CD)AMPERES s'inscrit, comme on l'a dit, dans le respect des programmes actuels de l'enseignement secondaire. C'est une contrainte à partir de laquelle en découlent plusieurs autres. Les PER initiés par des questions à fort pouvoir générateur d'étude (QFPGE) sont alors le plus souvent mono-disciplinaires et finalisés par le programme. Ce dernier met parfois en avant des isolats mathématiques en tant qu'organisations locales interagissant faiblement avec les autres organisations mathématiques constitutives de l'ensemble du programme ; le travail produit aboutit alors à la construction d'AER faiblement intégrées. Par ailleurs, les contraintes didactiques qui président à l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée empêchent le plein développement des sept dialectiques proposées par Chevallard (2002) pour décrire un travail d'étude et de recherche. Compte tenu du faible nombre – voire de la quasi absence – de ressources disponibles dans une salle de classe qui sont pourtant constitutives de médias utiles à l'étude, et du poids des *habitus* scolaires qui imposent aux recherches d'être rarement menées hors du temps et du lieu de la classe, les dialectiques du parachutiste et du truffier et de l'excription et de l'inscription sont peu présentes. Celles de la diffusion et de la réception ne suivent bien souvent que le seul canal de l'oral au sein des classes, par le biais des interactions entre élèves, ou par celui des interactions élèves-professeur.

Sous ces contraintes – et il y en a bien d'autres relatives notamment à la formation des professeurs –, en s'aidant d'apports venus de la théorie des situations didactiques (équipe de Bordeaux), de la théorie anthropologique du didactique (équipes de Clermont-Ferrand et de Marseille), ou encore de l'histoire des mathématiques (équipe de Poitiers), ces équipes conçoivent des PER ou des AER de première génération qui font l'objet de passations dans les classes de certains des membres du projet. Leurs observations sont organisées : prises de notes, enregistrements, films ; puis, des analyses a posteriori sont réalisées par les membres de l'équipe. Ce processus conduit à des retouches éventuelles, à des reprises l'année suivante avec un protocole analogue et à la diffusion à partir de stages, de mises en ligne ou d'articles.

2. Un exemple de productions de (CD)AMPERES [2] : motiver l'enseignement du produit scalaire en 1e S

L'équipe de Clermont-Ferrand s'est essayée à motiver la rencontre des élèves avec le produit scalaire, c'est-à-dire à faire en sorte qu'il apparaisse comme réponse à une question. On peut trouver une piste de réponse en examinant à quoi sert le produit scalaire tel qu'il apparaît en 1e S dans le savoir à enseigner, sous les conditions et contraintes de la transposition didactique actuelle : il est utile pour démontrer que deux droites ou deux directions sont orthogonales, pour déterminer un angle géométrique (par calcul de son cosinus), et enfin pour établir le théorème d'Al-Kashi et « la résolution » des triangles. Or les élèves savent, depuis la classe précédente, démontrer analytiquement que deux droites sont

2. Les programmes auxquels nous nous référons sont ceux de 2001 pour la classe de 1e scientifique, dite 1e S (élèves de 16 à 17 ans).

parallèles : « D et D′ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont parallèles si et seulement si $xy' - x'y = 0$ ». On peut dès lors se demander si des résultats comparables ne pourraient pas être établis pour des droites perpendiculaires : c'est la question qui initie le travail d'étude et de recherche sur le produit scalaire.

2.1. Premier moment et première question de l'étude

La question Q_1 « Peut-on par le calcul montrer que deux droites sont perpendiculaires ? » est posée aux élèves répartis en petits groupes dans la classe. L'observation montre que, spontanément, ils se placent tous dans un repère orthonormal.

On a pu noter trois façons d'aborder le problème par les élèves. Certains examinent des cas particuliers qu'ils connaissent bien : le cas des axes et celui des bissectrices. D'autres pensent à utiliser la relation caractéristique $aa' = -1$ qui, bien que ne figurant plus au programme des classes antérieures, est néanmoins connue de certains élèves ; ce qui révèle un phénomène d'hystérésis enseignante – des contenus ont disparu des programmes mais sont toujours enseignés –, ce qui a quelque peu surpris les observateurs. Enfin, certains élèves abordent d'emblée le cas général.

En tant que directeur de l'étude des élèves, il convient que le professeur la guide par un jeu de questions, sans pour autant donner la solution, ni briser la dynamique de l'étude ou encore recourir à l'ostension déguisée. Par exemple, on a pu demander aux élèves de revenir sur la condition de parallélisme et de s'interroger sur la signification des éléments qui la composent : x, x', y, y', représentent-ils des coordonnées de points, de vecteurs ? Les élèves ayant décidé de travailler sur des cas particuliers choisissent les points A(1,1) et B(–1,1) sur les bissectrices du repère et, par analogie avec la condition de parallélisme, trouvent : « $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ ». Comme ils ne savent que faire devant cette évidence, l'enseignant les engage à examiner ce qui se passerait si on translatait les deux bissectrices, ou encore si l'on prenait d'autres points sur les deux bissectrices. Le travail engagé à partir de ces questions conduit les élèves à rejeter l'utilisation des coordonnées de points au profit de celles de vecteurs. De même, ceux travaillant à partir de la relation $aa' = -1$ sont invités par le professeur à réfléchir à la signification des coefficients a et a' et à faire le lien avec la condition de parallélisme. L'ensemble de ces travaux conduit chacun des groupes à soupçonner que la clé de la réponse à la question étudiée est constituée du théorème de Pythagore. Un bilan d'étape peut alors conclure ce premier moment d'étude. Voici ce premier bilan :

1°) $A(x, y)$ et $B(x', y')$.
$D \perp D' \Leftrightarrow$ OAB triangle rectangle en 0
$\Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.
2°) Soit $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé ;
$\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont orthogonaux
équivaut à $xx' + yy' = 0$.

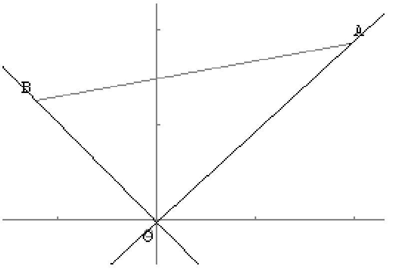


Figure 2. Triangle rectangle OAB

Les élèves ont été invités à se demander ce qui passe si le repère n'est pas orthonormé et ils ont remarqué que le résultat obtenu n'était valide que si le repère l'était.

2.2. Deuxième moment et deuxième question de l'étude

Ce deuxième temps, comme les suivants, se passe en classe entière et prend la forme d'un cours dialogué. On a prouvé précédemment, avec les notations utilisées, que : $D \perp D' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2$.

La nouvelle question Q_2 est la suivante : « Que vaut $xx' + yy'$ si D et D′ *n*e sont pas perpendiculaires et est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ? » Un retour sur le calcul ayant conduit précédemment à faire apparaître $xx' + yy' = 0$ amène alors à remarquer que $AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2xx' - 2yy'$ et donc que :

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2).$$

Avec ce résultat apparaît la nécessité d'observer, essentielle ici, que la quantité $xx' + yy'$ ne dépend pas du repère orthonormé choisi ! C'est un invariant géométrique ; ce qu'on peut consigner dans un deuxième bilan présenté ci-dessous :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées (x, y) et (x', y') dans un repère R orthonormé et de coordonnées (X, Y) et (X', Y') dans un repère R' orthonormé, alors $xx' + yy' = XX' + YY'$. C'est un invariant géométrique que nous appellerons produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que nous notons $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.

2.3. Troisième moment et troisième question de l'étude

Ce troisième temps se déroule en classe entière et prend la forme d'un cours dialogué. On travaille la question Q_3 : « On sait que

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = 0.$$

Et si $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq 0$, peut-on dire quelque chose de $\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$?

Pour répondre à cette question, la piste consiste à chercher à utiliser un repère orthonormé particulier, ce que l'on peut faire puisque le produit scalaire est un invariant ne dépendant pas du repère orthonormé choisi. Divers choix sont possibles ; parmi eux on peut prendre $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de telle sorte que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{\imath}$ soient colinéaires et de même sens. En posant $\theta = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ on obtient alors : $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OB}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$. À partir de la définition du produit scalaire, un calcul donne $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta$. À ce stade, peut être tiré un bilan intermédiaire sur les usages à venir du produit scalaire. Voici ce troisième bilan : à quoi peut servir le produit scalaire ? Un repère orthonormé étant choisi, dès lors que l'on sait calculer le produit scalaire, il peut servir à démontrer par le calcul une orthogonalité et à déterminer un angle géométrique à partir du calcul de son cosinus,

Ce premier bilan sur l'utilité du produit scalaire étant fait, on peut se demander s'il pourrait être d'un autre usage.

2.4. Quatrième moment et quatrième question de l'étude

La quatrième question se décline en deux sous-questions : $Q_{4,1}$: « Le produit scalaire peut-il être d'une autre utilité ? » entrainant $Q_{4,2}$.

Pour diriger l'étude de la première sous-question, on peut faire remarquer que lorsque $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{OA}^2$, qui est le carré d'une longueur ! Si on sait calculer le carré d'une longueur, alors on saura calculer cette longueur. On peut donc légitimement se demander si le produit scalaire pourrait servir à calculer une longueur. Cette question nous dirige vers le théorème d'Al-Kashi, amené par la question $Q_{4,2}$:

« Connaissant OA, OB et l'angle en O dans le triangle OAB, peut-on calculer AB ? »

Si l'angle en O est droit, on reconnaît le théorème de Pythagore. Il s'agit de généraliser celui-ci au cas où l'angle en O n'est pas droit. Cette question n'est pas sans fondement car la connaissance de deux côtés d'un triangle et de l'angle compris entre ces deux côtés renvoie à un cas d'isométrie que les élèves connaissent. La longueur du troisième côté, AB, est alors déterminée et il est légitime de se demander si on peut la calculer.

On a : $\mathrm{AB}^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$. Peut-on aller plus loin ? La connaissance de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ pousse à introduire le point O dans l'égalité précédente ; par exemple en utilisant la relation de Chasles pour écrire : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$. Le produit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$ devient alors : $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. Une nouvelle fois, la même question se pose : peut-on aller plus loin ? Peut-être si d'aventure le produit scalaire était distributif par rapport à la somme vectorielle. Qu'en est-il ? On peut se placer dans un repère orthonormé quelconque et, par le calcul, montrer qu'il en est bien ainsi ; de plus on peut montrer aussi que le produit scalaire est commutatif. Au final, on obtient :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \cos \widehat{\mathrm{O}}$$

qui est le théorème d'Al-Kashi.

2.5. Bilan

Le travail d'étude et de recherche qui a été mené conduit à avoir rencontré l'ensemble des parties du programme sur le produit scalaire. L'enseignement est alors motivé par un jeu de questions qui s'enchaînent et qui, de plus, permettent de faire vivre par les élèves les usages à venir travaillés dans les exercices.

3. Conditions et contraintes : l'existant et ce qui est localement modifiable

Au-delà de son seul aspect développemental dans lequel sont principalement engagés les professeurs du réseau (CD)AMPERES, le travail mené dans ce cadre contient une dimension propre à la recherche sur le système d'enseignement des mathématiques tel qu'il est ; en ce sens il s'agit d'une recherche-développement. La question centrale est celle de savoir à quelles conditions mises en place, et sous quelles contraintes systémiques non modifiables, on peut faire vivre un enseignement des mathématiques qui engage les élèves dans une dynamique d'étude et de recherche ? Évidemment, le système éducatif dans son ensemble ne peut être utilisé comme terrain permettant d'obtenir une réponse à cette question. Mais les perturbations localement amenées par l'implantation d'un type d'enseignement sous forme de PER dans quelques classes et établissements (environ quatre-vingts professeurs, répartis dans neuf des vingt-six académies de la France métropolitaine, participent au réseau (CD)AMPERES) apportent de nombreuses informations. Les données empiriques ainsi obtenues, sont relatives à la formation des professeurs à ce type d'enseignement, aux *habitus* des enseignants, ainsi qu'aux phénomènes didactiques produits ou empêchés. Le recueil et l'analyse de ces données, fournissent en retour des informations sur l'état du système.

Il apparaît possible, parce que les enseignants participant à ce travail adhèrent au projet qui le définit, de rompre avec la praxéologie professorale qui s'expose à longueur de manuels et consiste à proposer aux élèves des activités ne permettant guère que d'enseigner de manière déconnectée des organisations mathématiques ponctuelles, en recourant pour cela au procédé didactique de l'ostension déguisée (Berthelot & Salin, 1992). Rechercher des questions à fort pouvoir générateur d'étude, lorsque la partie du processus de transposition didactique ayant abouti à la rédaction du programme l'autorise, engage les professeurs à concevoir des propositions se situant au-delà du niveau du thème. Même s'il s'agit souvent d'un travail nouveau pour les professeurs, la force du collectif représenté par l'équipe permet sa réalisation. Dans ce domaine, se lancer dans ce travail exigeant apparaît possible pour des équipes de professeurs sous encadrement didactique, mais il signifie aussi que l'on initie un processus long, consistant à combler un vide quasi complet de ressources de ce type dans la profession : tout reste à construire. De ce point de vue, le travail d'élaboration théorique en didactique ne s'est pas traduit par l'apport d'une aide au développement de l'enseignement ordinaire. La cause n'en est pas qu'imputable aux didacticiens des mathématiques, mais sans doute aussi à la nature qui fut réservée à la réception de leurs travaux par différentes instances éducatives ; tant administratives que professionnelles.

La recherche, ses avancées mais aussi ses difficultés, nous ont permis de faire porter le regard sur les conditions et contraintes venant des niveaux de codétermination didactique plus génériques car relevant de la pédagogie, de l'école, de la société et de la civilisation.

3.1. Une condition au niveau de l'école, transformée en contrainte : la tyrannie de l'heure

Une tradition didactique, bien installée dans l'enseignement secondaire, veut qu'un problème posé en classe soit résolu en classe et, si possible, dans les minutes qui suivent ; si cette condition ne peut être satisfaite, il faudra au moins qu'il soit résolu avant la fin de la séance. Les raisons d'une telle contrainte, moins perceptible à l'école primaire, viennent des conditions propres à l'organisation de l'école secondaire. On sait en effet qu'une condition pour une organisation satisfaisante de ce niveau du cursus, où l'enseignement est assuré par plusieurs professeurs de disciplines différentes, tient à un séquençage temporel rigoureux, nécessité par l'accord nécessaire de deux types d'emplois du temps : l'un spécifique aux élèves d'une classe donnée qui ont un enseignement dans plusieurs disciplines, l'autre propre aux professeurs qui enseignent leurs disciplines à plusieurs classes. Il n'est donc pas envisageable qu'un professeur déborde du temps de la séance qui lui est imparti, car ce serait un « vol » du temps consacré au professeur et à l'enseignement qui suit. Dans le second degré, la plage horaire est donc généralement d'une heure, voire de deux dans les classes du cycle terminal des lycées. Un implicite professoral, étayé par des consignes orales censées expliciter ce qu'il faut donner à voir lors d'une inspection, aboutit à faire vivre une sorte de norme temporelle définissant une « bonne séance ». Cette norme veut que le déroulement d'une séance suive une organisation qui voient se succéder : le problème et sa solution (appelés « activité »), l'institutionnalisation de la solution (appelé « cours), la donnée d'exercices (appelée « applications » ou « entraînement »). On pourrait rechercher, dans l'épistémologie des professeurs et à partir des discours qu'ils tiennent, les éléments technologiques construits autour d'une telle technique enseignante [3]. Mais là n'est pas notre propos qui porte plutôt sur les conséquences didactiques induites par l'existence quasi générale de ce qu'on peut désigner comme une soumission à « la tyrannie de l'heure ». Pour exercer son contrôle temporel sur l'activité des élèves afin qu'elle entre dans le cadre qui lui est dévolu au cours d'une séance, les problèmes posés sont clos, rédigés en questions enchaînées, à la manière d'un problème de fin de chapitre, sans ouverture sur d'autres questions : ce qui mathématiquement motive ces problèmes (leur raison d'être) est alors peu visible. Une autre conséquence didactique en découle : le *topos* des élèves est étroitement balisé car l'inattendu venu de leur activité risque de faire « déborder » de l'heure. L'enseignement ne peut guère aller plus loin que celui du thème dont l'étude doit se terminer lorsque le « capital horaire » qui lui était alloué est épuisé ; l'enseignement du thème est réalisé par l'agrégation de quelques sujets traités en autant d'heures de classe. La limitation de l'ouverture à la recherche, conséquence « d'activités » proposées sous forme fermée, induit à la fois un empan temporel court pour la vie d'une question et une certaine étanchéité des thèmes les uns par rapport aux autres. Faire des liens entre eux est alors, comme cela a été indiqué auparavant, implicitement laissé à la charge des élèves, laissant par conséquent le champ libre aux différences interpersonnelles dans le rapport à l'étude. Si on le souhaite, il n'est pourtant pas très coûteux de se libérer d'une telle contrainte comme le montrent les exemples qui suivent.

3.1.1. Un exemple au collège (élèves de 11 à 15 ans)

Un PER construit à Marseille et courant sur deux années, est relatif au théorème de Thalès et à son environnement sur la similitude (traduite dans le programme sous la dénomination « agrandissement – réduction »). Les élèves, au cours de la manipulation de figures découpées et

3. En 2002, l'introduction du programme de 6e (élèves de 11 à 12 ans) préconisait le choix par le professeur d'« activités » qui tiennent compte de la recommandation suivante : « l'activité de chaque élève doit être privilégiée ». Cette « activité » devait être suivie d'une « synthèse brève ». Ces recommandations faisaient suite à celles contenues dans les programmes antérieurs qui insistaient aussi sur ces deux dimensions temporelles de la séance.

de calques, rencontrent en 4e (élèves de 13 à 14 ans) la situation suivante (figure 3) :

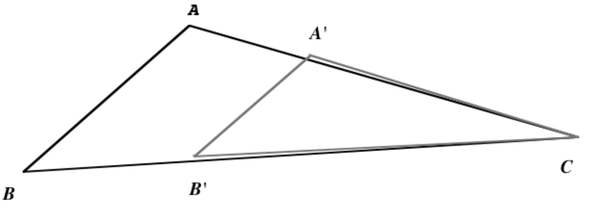


Figure 3. Triangles semblables

Cette situation permet de conjecturer collectivement, en classe, que lorsque deux triangles sont semblables, si on les superpose en faisant coïncider un angle, les troisièmes côtés sont parallèles. L'étude se prolonge alors hors du temps de la séance et hors de la classe. Les élèves auront deux tâches à accomplir : tout d'abord proposer une démonstration de la conjecture, dont la vérité testée empiriquement en classe a laissé peu de place au doute ; puis rédiger l'énoncé correspondant au problème qui a été résolu. Ce dernier travail engage vers la rencontre puis l'écriture, avec le vocabulaire disponible à ce niveau, de la condition portant sur la disposition des triangles et que les élèves ont sans doute rencontrée « en acte » en retournant éventuellement le calque figurant A′B′C, pour que la similitude soit directe. La recherche menée hors classe poursuit ainsi l'étude débutée durant la séance.

3.1.2. Un exemple au lycée (élèves de 15 à 18 ans)

À Poitiers, a été expérimenté le principe d'une conférence introductive en direction de toutes les classes du niveau de la 2de (élèves de 15 à 16 ans) en ouverture du cours de géométrie de l'année et de celles qui suivront. Elle vise à faire vivre auprès des élèves, en assumant pour cela le recours à des procédés ostensifs, un certain nombre des questions auxquelles répond le domaine de la géométrie. Par exemple : « Quelles sont les utilisations actuelles de la géométrie dans et hors les mathématiques ? », les réponses à ces questions peuvent être illustrées par les diapositives suivantes qui réfèrent à la localisation par intersection, aux coordonnées et systèmes d'équations d'une part, aux calculs de courbes d'autre part :

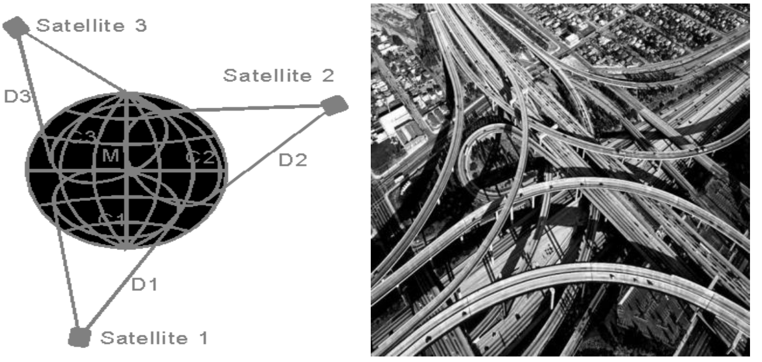


Figure 4. Exemples d’utilisation de la géométrie

D’autres questions, relatives à l’histoire par exemple, sont rencontrées lors de cette séance introductive : « Dans quelles situations les hommes ont-ils utilisé la géométrie ? » ou encore « Dans quels contextes les notions géométriques que nous enseignons et apprenons ont-elles été créées ? » Ce qui revient à poser la question : « pour résoudre quels types de tâches les mathématiques peuvent-elles servir ? » Du côté des professeurs, on conçoit qu’avant d’arriver à montrer ces questions aux élèves et certains types de réponses associées, il aura fallu mener un important travail qui ne s’arrête pas seulement à l’aspect « utilitariste » de la géométrie, mais explore les réponses à la question : « Que nous apprennent les transpositions didactiques successives qui ont conduit aux différents programmes ? »

3.2. Une contrainte didactique venant du niveau de la pédagogie dans l’enseignement ordinaire : « les apprenants aux mains nues »

Un problème leur étant posé, les élèves – quand ce n’est pas « l’élève », terme pris dans toute sa singularité et non pas dans son sens générique utilisé parfois en didactique – sont tenus de tenter de le résoudre seuls, et uniquement à partir de leurs connaissances antérieures. On mesure là le poids d’un certain « constructivisme » qui veut que l’élève trouve par lui-même, en comptant sur ses propres forces, sans recourir à des aides, et place par ailleurs l’individu singulier au centre de toute forme d’apprentissage. Ce thème du primat de l’individu apparaît comme un écho venu du niveau de la société et renvoyant le son d’une idéologie qui la baigne. Le programme de 2002, auquel il a été fait référence antérieurement, ne précisait-il pas en effet que « l'activité de *chaque élève* doit être privilégiée » ? D'autres formes pédagogiques préconisées par les instructions émanant du ministère en direction des professeurs, font résonner des échos de même nature : aide individualisée ou personnalisée, parcours personnalisés de réussite éducative, pédagogie différenciée, accompagnement personnalisé, etc. Les conséquences didactiques qui en résultent sont au moins de deux ordres.

D'une part, ces formes pédagogiques limitent les moyens de l'étude. Ainsi on s'interdit de disposer de médias autres que celui constitué par la personne du professeur : pas de recours au manuel de la classe, de recherche documentaire dans la bibliothèque de l'établissement, de recherche sur Internet, etc. Les milieux rencontrés en classe sont alors peu adidactiques car s'il faut que « l'activité de chaque élève soit privilégiée », alors nécessairement la force du collectif constitué par la classe devra-t-elle être mise à distance, et donc insuffisamment exploitée.

D'autre part, l'autorisation d'enquête, qui suppose le débat préalable sur la répartition des tâches au sein du collectif de classe, n'étant pas envisagée, les problèmes posés demeurent sans grande ouverture sur les questions du monde. On retrouve en ce point la clôture d'un enseignement sur des mathématiques de faible portée.

3.3. Conséquence sur les praxéologies professorales ordinaires et dominantes : l'élève publiquement contraint à la docilité didactique

Du point de vue des élèves au *topos* réduit en matière de recherche venue de l'étude, mais fortement guidés vers les solutions attendues, une clause du contrat didactique devient une injonction implicite : puisque les questions génératrices du savoir sont le plus souvent contournées, attendre docilement que le professeur indique le type d'exercices que les élèves devront savoir résoudre. Les conséquences qui découlent de l'assujettissement à ce type de contrat sont faciles à observer. Comme il n'y a pas de véritable dynamique d'étude de questions, les mathématiques apparaissent comme un ensemble d'activités « gratuites ». Quant aux praxéologies d'étude attendues des élèves, celles-ci apparaissent à la fois frustes et contraintes, puisqu'elles se résument à apprendre le cours et à apprendre à faire des exercices. Une fois de plus, elles renvoient aux divers types d'assujettissements constitutifs des personnes et aux différences inter-personnelles. Une cinquantaine d'années après, on est encore très loin, dans la réalité des systèmes éducatifs, de la « pédagogie rationnelle » qu'appelaient de leurs vœux Pierre Bourdieu et Jean-Claude Passeron (1964).

4. L'intérêt d'ingénieries didactiques de recherche et de développement et le questionnement induit

4.1. Ce que change le travail (CD)AMPERES pour les professeurs qui y sont engagés

La participation des professeurs aux travaux des équipes du réseau (CD)AMPERES, parce qu'elle constitue une forme inhabituelle du travail de préparation et de conduite de l'enseignement, nécessite à la fois que soient réunies la volonté d'amélioration de l'existant et l'engagement dans une formation à la didactique en tant que théorie fournissant des outils pour l'analyse et le développement.

Ce travail suppose la rencontre avec des types de tâches enseignantes qu'il est nécessaire d'oser mener à bien parce qu'elles sont souvent inédites dans les pratiques professionnelles. Par exemple, il est nécessaire d'oser déconstruire et interroger ses propres connaissances mathématiques ; de mener une enquête afin de questionner le savoir que l'on a à enseigner et de rechercher des éléments de réponses dans l'histoire, l'épistémologie et les phénomènes de transposition didactique. Il faut encore prendre en compte la distance entre savoir de référence et savoir didactiquement transposé afin d'investir le « jeu » mathématique et didactique autorisé par le programme. Tâche inhabituelle pour un travail enseignant trop souvent solitaire, mais il est aussi possible de compter sur la force et les ressources des équipes (CD)AMPERES, et non plus de construire de manière isolée, avec peu de moyens et de temps pour cela.

Enfin il est nécessaire d'apprendre, afin de s'en servir, certains des outils didactiques permettant d'analyser, de construire et de pratiquer un enseignement de manière raisonnée, objectivée, et non plus seulement bâti à partir de sa propre subjectivité ; même si celle-ci s'appuie sur son expérience de professeur. Ces outils permettent, entre autres, de répondre aux questions suivantes. Quels sont les moments didactiques par où l'on fera passer les élèves (première rencontre, élaboration d'une technique, institutionnalisation, travail de la technique) ? Quels savoirs ont des chances d'émerger de l'activité des élèves ? Quels seront les rôles respectifs du professeur et des élèves au cours de ces moments ?

4.2. Des questions de recherche à partir d'ingénieries de développement

Si, à partir du travail (CD)AMPERES et de manière empirique, il apparaît possible de faire vivre localement, dans le système tel qu'il est, un enseignement des mathématiques bâti autour de PER, il reste à étudier de nombreuses questions qui portent aussi bien sur le système que sur l'enseignement au sein des classes.

Des conditions didactiques nouvelles ont été mises en place ; est-ce qu'il y en a d'autres, inaperçues jusqu'alors parce que relevant des techniques didactiques spécifiques des professeurs des équipes et de leur propre engagement dans (CD)AMPERES ? Quels sont les effets d'un enseignement sous forme de PER en termes de rapport des élèves aux mathématiques, à leur étude et leur apprentissage ? Quels sont les effets en termes de rapport des professeurs à l'enseignement, aux mathématiques ? Qu'apprend-on ainsi sur le fonctionnement du système, sur le métier de professeur ? À quelles conditions, éventuellement à créer, ce type d'enseignement peut-il être étendu ? Est-ce envisageable, souhaitable ? À quelles contraintes indépassables se heurte-t-il ? On a identifié et étudié les phénomènes d'obsolescence dans les ingénieries didactiques ; qu'en est-il dans des propositions d'enseignement plus ouvertes, telles que les PER conçus par (CD)AMPERES ? Si ces phénomènes existent, quelles en sont les causes, les effets ? Qu'apprend-on sur l'état du système, sur la corporation des professeurs de mathématiques, sur ses habitudes didactiques ? Qu'apprend-on sur l'état de la transposition didactique, et à partir de ce point, sur le contrat institutionnel, sur les interactions école-société ?

4.3. Des questions de développement à partir d'ingénieries (CD)AMPERES

D'autres questions sont spécifiques du développement des travaux conçus et proposés par (CD)AMPERES.

Comment tenir compte de l'imprévu, du contingent et de l'aléatoire spécifiques de toute relation humaine dans le déroulement du travail d'étude en classe ? En quoi cela vient-il perturber, gêner ou favoriser l'atteinte de l'objectif didactique assigné à l'ingénierie ? Comment alors laisser du « jeu », des degrés de liberté au professeur, sans dénaturer les situations proposées, sans les faire dévier des finalités escomptées ? La totalité des programmes, tels qu'ils sont conçus, c'est-à-dire sans une réflexion didactique suffisante dans les noosphères, peut-elle être envisagée sous forme de PER ? Est-ce souhaitable ? Quels choix pertinents de ressources mathématiques et didactiques sur lesquelles s'appuyer pour la conception de PER lorsque tout est à construire ? Quel apport ce travail amène-t-il pour repenser un curriculum mathématique ? Quelles conditions pour la diffusion de tels travaux ? Quelle formation des professeurs pour qu'ils puissent être reçus ?

Références

Bachelard, G. (1989). *La formation de l'esprit scientifique* (14e éd.). Paris : Librairie philosophique J. Vrin. (Édition originale : 1938).

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Thèse de doctorat non publiée). Université Bordeaux 1, France.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79-135.

Bourdieu, P. & Passeron, J.-C. (1964). *Les héritiers. Les étudiants et la culture*. Paris : Éditions de Minuit.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Éds), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). Clermont-Ferrand, France : IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. Dans T. Assude & B. Grugeon-Allys (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris : IREM Paris VII & ARDM.

Chevallard Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP, 471*, 439-461.

(CD)AMPERES (2011). *(Conception et Diffusion) d'Activités Mathématiques et de Parcours d'Étude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire*. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/

Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD

María Trigueros
Dpto. Matemáticas, Inst. Tecnológico Autónomo de México, México

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present three dialogue modes among research theories or approaches in mathematics education, starting from a new conceptualization of scientific theories in terms of research praxeologies. Each dialogue mode is characterized by the praxeological elements that are taken as starting points: the kind of scientific problems dealt with; the theoretical component and the "methodological" component, which includes research techniques and technologies. The last two dialogue modes between APOS theory and ATD are illustrated, stressing those aspects of each theory that can be promoted and developed.

Résumé. Nous présentons trois modalités de dialogue entre théories ou approches de recherche en didactique des mathématiques à partir de la conceptualisation des théories scientifiques en termes de praxéologies de recherche. Chaque modalité de dialogue est caractérisée par l'ingrédient de praxéologie pris comme point de départ : les types de problèmes abordés ; le composant théorique ; la composante « méthodologique », qui inclut les techniques et technologies de recherche. Nous illustrons les deux dernières modalités en considérant le dialogue entre la théorie APOS et la TAD afin de mettre en évidence les aspects de chaque théorie que le dialogue permettrait de développer.

Resumen. Presentamos tres modalidades de diálogo entre teorías o enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas a partir de la conceptualización de las teorías científicas en términos de praxeologías de investigación. Cada modalidad de diálogo se caracteriza por los elementos praxeológicos que se toman como punto de partida: los tipos de problemas que se abordan; el componente teórico; y el componente «metodológico» que incluye las técnicas y tecnologías de investigación. Se ilustran las dos últimas modalidades de diálogo entre la teoría APOS y la TAD poniendo el énfasis en los aspectos de cada teoría que el diálogo permitiría desarrollar.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

La comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas ha desarrollado a lo largo de los años diversas teorías y modelos con el objetivo de comprender mejor los fenómenos relacionados con esta disciplina. Recientemente se ha iniciado un proceso de comparación de teorías y, en ocasiones, un intento de articulación de las mismas para crear un nuevo referente teórico que abarque los enfoques anteriores, como muestra, por ejemplo, el número especial de la revista *ZDM* dedicado a las *networking strategies* (Prediger, Arzarello, Bosch & Lenfant, 2008). Algunos de los trabajos desarrollados en este contexto se proponen contrastar dos teorías mediante el análisis de una misma experiencia didáctica; esto es, tomando datos empíricos (en general provenientes de una sala de clase) y proponiendo una interpretación desde el punto de vista de cada una de las teorías. Este tipo de comparación o contraste entre enfoques pone de manifiesto la necesidad de elaborar mecanismos de diálogo entre teorías que vaya más allá del vaivén entre los niveles empíricos y teóricos, para involucrar también otros componentes de la práctica investigadora.

En este artículo se pretende establecer un diálogo entre dos teorías de didáctica de las matemáticas que no son próximas entre sí, la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). El propósito del estudio es doble: mostrar cómo puede llevarse a cabo esta comunicación considerando todos los componentes de ambas teorías; y localizar elementos de cada una de ellas que puedan extender el marco teórico de la otra sin violentar sus supuestos básicos. Como preámbulo al diálogo se presenta una breve discusión introductoria sobre la naturaleza de las teorías científicas y se proponen tres modalidades de diálogo. Además, y con el fin de conocer mejor las dos teorías en cuestión, esta discusión nos permitirá describir sus elementos básicos. Una vez presentados dichos elementos, se inicia propiamente el diálogo partiendo tanto del componente teórico como del componente técnico-práctico de cada enfoque. La tercera modalidad de diálogo se describe en términos generales, dejando su aplicación concreta al caso APOS-TAD abierta a futuras investigaciones.

1. Modalidades de diálogo entre teorías

El proceso histórico de diálogo o competición entre teorías científicas de un mismo ámbito empírico, esto es, entre teorías «rivales», constituye un aspecto esencial de la génesis y el desarrollo de estas. En consecuencia, para describir las modalidades de diálogo entre teorías, debemos utilizar necesariamente un modelo del desarrollo de la ciencia, es decir, un modelo epistemológico de la actividad de investigación.

En este trabajo partimos de un principio epistemológico básico relativo al desarrollo de las teorías científicas: postulamos que todo cambio de perspectiva teórica se manifiesta mediante la *evolución simultánea* de la *teoría* propiamente dicha y de los *problemas* que esta estudia. Más explícitamente, suponemos que las teorías son modelos que proporcionan los instrumentos para formular y abordar los problemas que surgen en el «mundo». En cierta medida son las propias teorías las que construyen los problemas que abordan. Y, recíprocamente, suponemos también que los problemas caracterizan las teorías en cada momento histórico (son su objeto de estudio) y la evolución de aquellos provoca nuevas necesidades teóricas y el desarrollo, a veces revolucionario, de las teorías.

En este punto es importante señalar que, junto a los ingredientes explícitos, las teorías tienen ingredientes implícitos que se van poniendo de manifiesto progresiva y lentamente a lo largo de su desarrollo. Según el epistemólogo Larry Laudan (1977), los ingredientes implícitos que comparten las teorías que forman parte de un mismo *programa de investigación* son dos:

- una serie de *compromisos ontológicos* acerca del tipo de entidades que se deben tomar en consideración y acerca de las relaciones básicas entre dichas entidades;
- una serie de *normas metodológicas* que hacen referencia a cómo llevar a cabo una investigación, al tipo y la extensión de los datos empíricos que deben considerarse, al tipo de respuestas admisibles y, en particular, a lo que se tomará como unidad de análisis de las teorías en cuestión.

La explicitación de la unidad de análisis de una teoría es muy importante porque pone de manifiesto una decisión metodológica que origina limitaciones voluntarias tanto del tipo de problemas que la teoría decide considerar como del tipo de respuestas que la misma considerará «admisibles». No se puede reprochar a una teoría que no explique algo que no se propone explicar, pero se le debe exigir que tome en consideración aquellas entidades que pueden afectar de forma substancial las respuestas que la propia teoría considera admisibles con respecto a los problemas que se plantea. En otras palabras, las teorías científicas deben respetar la coherencia entre sus compromisos ontológicos y sus normas metodológicas.

En principio, parece lógico suponer que el diálogo entre dos teorías será más fácil y más claro cuando se lleve a cabo partiendo de sus componentes explícitos pero, como veremos, cuando dos teorías no forman parte del mismo programa de investigación y, en consecuencia, no comparten los compromisos ontológicos ni las normas metodológicas, entonces puede ser necesario partir de ciertos ingredientes más o menos implícitos de las mismas para establecer el diálogo. En este caso, el propio diálogo puede obligar a explicitar algunos de dichos ingredientes y hasta provocar el desarrollo teórico o técnico de las teorías involucradas.

En lo que sigue, describiremos brevemente tres modalidades de diálogo entre teorías que, en principio, no tienen por qué formar parte del mismo programa de investigación. Exigiremos que dichas modalidades de diálogo sean compatibles con el principio epistemológico que hemos enunciado relativo al desarrollo de las teorías y que hace referencia a la evolución de estas como un todo.

La descripción de las diferentes modalidades de diálogo que proponemos a continuación requiere un cambio en la forma de conceptualizar las propias teorías científicas. Si se utiliza el lenguaje de la TAD, debería hablarse de «praxeología científica» o «praxeología de investigación» en lugar de «teoría científica», de la misma manera que debería hablarse de «praxeología matemática» en lugar de hablar simplemente de «teoría matemática». En adelante utilizaremos preferentemente la expresión «praxeología de investigación» (PI) en lugar de «teoría científica». Como toda praxeología, una praxeología de investigación consta de cuatro componentes básicos [T/τ/θ/Θ]. El bloque práctico [T/τ] constituye la «práctica de investigación» y está formado por el conjunto de *tipos de problemas* (*T*) que se consideran o se pueden formular, así como de las *técnicas de investigación* (τ) que se utilizan. El bloque teórico [θ/Θ] se compone de los distintos *discursos tecnológico-teóricos* que se utilizan para describir, justificar e interpretar la práctica de investigación.

Para ejemplificar estas nociones, aplicables a toda praxeología de investigación, podemos partir de un problema concreto de investigación didáctica π que podemos considerar un elemento de un tipo de problemas (o tareas) *T*. Tomaremos aquí un problema en cierta manera ajeno tanto a la TAD como a APOS y que puede formularse en el ámbito de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) en los siguientes términos:

> π: ¿Cómo identificar un *obstáculo didáctico* en un problema de enseñanza de las matemáticas y cómo diseñar y gestionar una situación didáctica que permita a los alumnos superarlo? ¿Cómo hacerlo, en concreto, en el caso de la enseñanza de la noción de «ángulo» interpretado como un par de segmentos del mismo origen? (Berthelot & Salin, 1996).

La *tecnología* θ que permite justificar, interpretar y hasta generar una técnica de investigación útil para abordar este problema se deduce de uno de los primeros resultados obtenidos por la teoría de situaciones didácticas (TSD) y que fue formulado inicialmente como sigue (Brousseau, 1989): existen conocimientos que producen respuestas adaptadas en ciertos contextos habituales, pero que engendran respuestas falsas fuera de dichos contextos. Son los *obstáculos cognitivos* entre los que se pueden distinguir diferentes tipos en función de su origen. Si el conocimiento que hace obstáculo es un conocimiento «espontáneo» que aparece en el curso del desarrollo del niño, se habla de obstáculo *ontogenético*; si dicho conocimiento ha jugado un papel en el desarrollo histórico del concepto, se habla de obstáculo *epistemológico* y si ha sido introducido por el propio proceso de enseñanza se denomina obstáculo *didáctico*.

En este trabajo, la *técnica de investigación* τ que se utiliza como metodología de investigación es la metodología habitual de la TSD para identificar un obstáculo didáctico en un problema de enseñanza de las matemáticas. Consta de las siguientes etapas: la primera consiste en localizar en las respuestas de los alumnos en relación al concepto enseñado algún conocimiento potencialmente productor de sus errores; la segunda, en asegurarse que el obstáculo no es ni ontogenético ni epistemológico; la tercera, en poner en relación la enseñanza habitual en torno al concepto en cuestión y la emergencia del conocimiento inadaptado; la última etapa de esta metodología consiste en elaborar y experimentar un proceso de enseñanza alternativo (basado en otra forma de interpretar el concepto) que permita a los alumnos superar este obstáculo en situaciones adidácticas.

La teoría Θ estaría formada en este caso por las asunciones básicas explícitas e implícitas formuladas con los términos primitivos de la TSD. Se trata de asunciones no cuestionables (fuera de los periodos de crisis o revolución científica) por decisión metodológica y que han mostrado ampliamente su fecundidad como, por ejemplo, las relativas a las nociones de contrato didáctico, situación adidáctica, variables didácticas, etc.

Vemos pues que la expresión «teoría científica» es una metonimia, esto es, designa el todo, la praxeología de investigación, mediante una parte, la *teoría* Θ, que le sirve de «signo» o «estandarte». Y el principio epistemológico citado, que hace referencia a la evolución simultánea de la teoría Θ y los tipos de problemas T, se expresa en este lenguaje diciendo simplemente que la praxeología de investigación evoluciona como un todo. La evolución del bloque práctico-técnico $[T/\tau]$, provoca cambios en el bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ y, recíprocamente, el desarrollo de este permite construir nuevas *técnicas de investigación* τ y nuevos *tipos de problemas* T. Por esta razón, a partir de ahora nos referiremos a las teorías científicas como praxeologías de investigación.

1.1. Diálogo partiendo de los tipos de problemas

Podríamos intentar comparar dos praxeologías de investigación (en adelante, PI) a través de contrastar los resultados que se obtienen cuando ambas abordan un mismo problema. Pero esto no es posible porque, en coherencia con el principio epistemológico mencionado más arriba, y en contra de lo que postula el «empirismo ingenuo», los hechos empíricos no constituyen una base objetiva (e independiente de las PI) de donde surgirían los problemas. En la formulación de los problemas de investigación intervienen herramientas tecnológicas y teóricas de las PI en cuestión. En la medida que los problemas son «construidos» por las PI, no es posible abordar un mismo problema mediante dos PI diferentes. De todos modos, veremos que es posible establecer una modalidad de diálogo entre PI partiendo no directamente de los problemas, sino de ciertos ingredientes (relativamente) implícitos de una PI generalmente interpretados como la base empírica que sustenta los tipos de problemas considerados.

En efecto, dadas dos praxeologías de investigación didáctica, PI_1 y PI_2, supongamos que PI_1 plantea un tipo de problema π_1. Salvo en casos muy particulares no se podrá tomar π_1 como objeto de estudio de PI_2, pero sí se puede dar un «paso atrás» desde π_1 e intentar reinterpretar mediante las herramientas que proporciona PI_2 los hechos empíricos o las cuestiones problemáticas que están en el origen de π_1 (aunque en ocasiones la propia base empírica o la problemática original deberán ser ampliadas, recortadas o modificadas de alguna otra forma). Entonces es posible que PI_2 pueda construir nuevos tipos problemas π_2 abordables con sus propias herramientas y que mantendrán cierta relación originaria con π_1. Los dos tipos de problemas que resultan de esta modalidad de diálogo pueden ser más o menos próximos, dependiendo principalmente de las relaciones entre las PI consideradas. En cualquier caso, creemos que el diálogo será más fecundo si acaba involucrando todos los componentes de las dos PI.

En el trabajo de Esther Rodríguez, Marianna Bosch y Josep Gascón (2008) se ha iniciado esta modalidad de diálogo entre el enfoque de la metacognición del movimiento clásico del *Problem Solving*, que hace el papel de PI_1, y la TAD, que se toma como PI_2. Al reinterpretar con las herramientas de la TAD los hechos empíricos que están en la base de lo que se conoce como el «problema de Pólya» (que juega el papel de π_1 formulado por PI_1) se reformula el citado problema obteniendo un nuevo problema de investigación didáctica π_2 realmente «muy alejado» de π_1. En efecto, el problema de Pólya (π_1) puede enunciarse, en primera instancia, como sigue:

> π_1: Suponiendo que los estudiantes dominan las técnicas básicas o elementales y poseen los conocimientos matemáticos necesarios, ¿cómo

> conseguir que sean capaces de construir y utilizar adecuadamente estrategias complejas para resolver «verdaderos» problemas matemáticos o problemas «creativos»? (Ibíd. p. 288).

El movimiento del *Problem Solving*, iniciado por Pólya (1945) pretendió responder a este problema mediante la enseñanza de *reglas heurísticas* generales presuntamente útiles para cualquier tipo de problemas pero, como dice Brousseau (1997), esto no hizo más que desplazar el problema, puesto que una heurística no es más fácil de utilizar que un teorema y, de hecho, es aún más difícil de transformarla en una tarea.

Es en este punto en el que, a partir del trabajo de Schoenfeld (1985), la noción de «metacognición» entró con fuerza en el ámbito de la educación matemática y, más específicamente, en las investigaciones en torno al *Problem Solving*. Pero esta inclusión tampoco sirvió para resolver el problema π_1 de forma satisfactoria como pone de manifiesto el propio Schoenfeld (2007), reclamando la necesidad de ampliar drásticamente la base empírica, mediante la integración de la dimensión socio-cultural junto a lo cognitivo y tomando en consideración, además, las prácticas docentes del profesor de matemáticas.

La reformulación de π_1 desde la perspectiva de la TAD consiste, esencialmente, en introducir y dar prioridad a las dimensiones epistemológica e institucional del problema (Rodríguez et al., 2008, p. 290). Como consecuencia, la reformulación π_2 del problema de Pólya que se propone desde la TAD (PI_2), puede expresarse en los siguientes términos:

> π_2: En las instituciones de enseñanza actuales, ¿qué condiciones se requieren y qué restricciones limitan la realización de procesos didácticos que, partiendo de cuestiones problemáticas «vivas», permitan a los alumnos recorrer los distintos momentos didácticos y, por lo tanto, generar (construir o reconstruir) una secuencia de praxeologías matemáticas locales como respuesta a dichas cuestiones? Como consecuencia, y dada una institución de enseñanza concreta, ¿qué características de las praxeologías didácticas implementadas se requieren para llevar a cabo este tipo de procesos didácticos, creando así condiciones apropiadas para ello y evitando las restricciones presentes en la medida de lo posible? (Ibíd., p. 294).

Esta nueva formulación demanda una respuesta en términos de un tipo de organización didáctica capaz de implementar las condiciones que se requieren para llevar a cabo dicho tipo de actividad matemática. En la TAD, los recorridos de estudio e investigación (REI) constituyen el prototipo de organización didáctica funcional que satisface dichas condiciones y, consecuentemente, se plantea el problema *ecológico* relativo a las condiciones de viabilidad de los REI en las instituciones didácticas actuales.

El cambio más importante originado por la reformulación de π_1 en π_2 consiste en el paso de la perspectiva *individual* de π_1 a la perspectiva *institucional* y *ecológica* de π_2 en la que se subrayan las dimensiones epistemológica y didáctica del problema, por encima de la dimensión cognitiva. De hecho, las dificultades que en π_1 se relacionan con la ausencia o deficiencia de determinadas estrategias cognitivas o meta-cognitivas de los alumnos (elección y planificación de estrategias, control y regulación del desarrollo del proceso de resolución y revisión global del mismo), en π_2 se considera que pueden ser explicadas en términos de determinadas características de las praxeologías matemáticas escolares (singularmente del aislamiento y desarticulación de estas) así como de las características de las organizaciones didácticas asociadas.

Si bien en el ejemplo anterior los problemas π_1 y π_2 están muy alejados, en otros casos, cuando se utiliza esta modalidad de diálogo entre dos PI más cercanas, pueden obtenerse problemas relativamente próximos. Veamos un ejemplo. David Tall (2003) presenta una teoría cognitiva (PI_1), basada en la filosofía de Bruner, en la que se definen tres mundos de pensamiento: encarnado (*embodied*), proceptual y formal. Propone que los modos de representación en matemáticas se pueden categorizar en tres distintas maneras de operar: el mundo o modo encarnado, basado en las percepciones y acciones humanas en el contexto del mundo real; el mundo o modo simbólico-proceptual que combina el papel de los símbolos y el cálculo simbólico y que está basado en una teoría previa que él mismo propone (Tall, 2001), en la que se estipula que estos símbolos actúan de forma dual tanto en forma de procesos como en forma de conceptos (*proceptos*); finalmente el mundo o modo formal-axiomático que consiste en un acercamiento formal que se inicia con axiomas relacionados a partir de los cuales se hacen deducciones lógicas para demostrar teoremas.

En su estudio sobre el aprendizaje del cálculo diferencial, D. Tall considera que este se desarrolla básicamente en los dos primeros mundos de pensamiento. Para trabajar sobre el aprendizaje de un concepto específico plantea un tipo de problema que puede formularse como sigue:

> π_1: ¿Cuál es el desarrollo cognitivo necesario para la construcción de la noción de derivada en el cálculo?

Para dar respuesta a este problema Tall parte, en primer término, del conocimiento previo de los alumnos sobre el significado de que algo sea recto, a lo que denomina «raíz cognitiva», que pertenece al «mundo encarnado». A partir de las apreciaciones de los alumnos sobre la rectitud, que se llevan a cabo desde este «mundo», considera posteriormente lo que la «rectitud» implica cuando se analiza localmente el comportamiento de una curva. En este momento, la necesidad de explicar el comportamiento local de una curva provoca que el individuo se plantee el desarrollo de una herramienta matemática más sofisticada, la «linealidad local», que se puede relacionar estrechamente con la idea de rectitud local, pero que pertenece al mundo simbólico «proceptual». Esta herramienta consiste en la formulación matemática de la pendiente de la tangente a la curva como el límite de la pendiente de la recta secante que se extiende posteriormente a la noción de derivada como función.

Desde la teoría APOS (PI_2), este problema puede reformularse como el problema de la construcción del concepto de derivada en el cálculo. Aquí, el tipo de problemas que se formula es el siguiente:

> π_2: ¿Cuáles son las acciones, procesos, objetos, esquemas y las relaciones entre ellos que se requieren en la construcción de la noción de derivada?

A partir de esta pregunta, en la teoría APOS se diseña una descomposición genética que es la herramienta teórica que da cuenta de la forma en la que las posibles acciones, procesos, objetos y esquemas se articulan en la construcción de dicha noción (Asiala et al., 1997).

Así, la construcción de un concepto como el de derivada se inicia a partir de acciones específicamente diseñadas sobre objetos matemáticos conocidos, en este caso la función y la recta, para construir una primera aproximación lineal local de la función. Cuando el individuo reflexiona sobre estas acciones, puede generalizarlas, coordinarlas e interiorizarlas en un proceso, es decir, puede hacer cálculos simbólicos y mentales así como representaciones gráficas de la pendiente de la tangente a una función en un punto sin necesidad de seguir reglas memorizadas o algoritmos específicos. A través de actividades específicas se busca que el estudiante tenga la necesidad de considerar este proceso como una totalidad sobre la cual pueden hacerse nuevas acciones, además de analizar sus propiedades. Este proceso se puede encapsular en un objeto: la derivada en un punto. Este objeto se «desencapsula» en el proceso que le dio origen y se generaliza en un proceso que permite considerar la aproximación lineal en cada punto de una función para después encapsularse en un nuevo objeto matemático que es la función derivada.

La reformulación del tipo de problemas π_1 formulado por D. Tall en términos de la teoría APOS permite así obtener un nuevo tipo de problemas de investigación π_2 que pueden considerarse como «próximos» (especialmente cuando se compara con el ejemplo anterior).

1.2. Diálogo partiendo del componente *teórico* de las PI

Si intentamos enriquecer una praxeología de investigación integrando en ella, de manera mecánica, nociones extraídas de otra PI (lo que podemos designar como «eclecticismo teórico») aparecen dificultades porque las nociones construidas en una PI solo toman sentido en un sistema conceptual concreto, dependiente de una problemática específica. Estas dificultades se han puesto claramente de manifiesto cuando, por ejemplo, se ha pretendido integrar la noción de situación didáctica, construida dentro de la TSD, en otros enfoques teóricos que no comparten ni los compromisos ontológicos, ni las normas metodológicas, ni la problemática didáctica de la TSD.

Dada la preponderancia cultural de la teoría Θ sobre el resto de los componentes de la PI (que llega al extremo de identificar dicho componente de la PI con la PI globalmente considerada), si se inicia el diálogo partiendo del componente teórico se corre el peligro de no involucrar en el diálogo al resto de los componentes de la PI. Aunque realmente es muy importante contrastar y comparar los *postulados* *básicos* de ambas PI así como sus respectivas unidades de análisis (entre otras cosas porque esta comparación comportará un esfuerzo de explicitación), no será posible avanzar en el diálogo sin alcanzar el resto de los componentes de las PI y, muy especialmente, si no intervienen en el diálogo las *técnicas*, la *tecnología de investigación* y los *problemas* que constituyen el corazón de la PI.

Así, por ejemplo, un trabajo en torno del «networking theories» (Arzarello, Bosch, Gascón & Sabena, 2008) muestra claramente las limitaciones del diálogo entre dos teorías cuando este se centra únicamente en una de las dimensiones de la problemática didáctica. En efecto, en dicho trabajo, al intentar comparar el papel que juega la *dimensión ostensiva* en dos enfoques didácticos (la TAD y el APC-*space*), surgió la necesidad de ampliar el ámbito de discusión a fin de que este contuviese otras dimensiones fundamentales de los fenómenos didácticos (singularmente las dimensiones epistemológica e institucional). Al mismo tiempo se puso de manifiesto que las teorías didácticas, como teorías científicas relativamente autónomas, tienen necesidad de modificar, en coherencia con su marco teórico específico, los conceptos importados del ámbito de la semiótica, al igual que los importados de cualquier otra disciplina (ya sea la epistemología, la psicología o la sociología).

De todos modos, las limitaciones descritas para esta segunda modalidad de diálogo no invalidan la posibilidad de dar un paso atrás (en este caso desde el sistema conceptual explícito de una PI) y preguntarse en qué forma las intuiciones o principios básicos, y a menudo implícitos, de PI_1 pueden reinterpretarse para ayudar a desarrollar la lógica interna de PI_2 sin violentarla, y recíprocamente. Aunque esta modalidad de diálogo entre dos PI constituya solo un punto de partida, debemos resaltar que, en ocasiones, es la única vía para iniciarlo.

1.3. Diálogo partiendo de los componentes técnico y tecnológico

Podríamos decir que las *técnicas* y la *tecnología de investigación* recubren lo que habitualmente se denomina la «metodología de investigación», aunque sin reducirse a ella. En efecto, en el lenguaje de las PI que estamos utilizando, las técnicas de investigación son descritas, justificadas, interpretadas y generadas por los resultados tecnológicos que la PI formula y que toman la forma de «teoremas», «leyes», «fenómenos» o, en general, «regularidades» que constituyen el contenido más visible y explícito de una disciplina científica: el de los «resultados». Parafraseando a Descartes podríamos decir que, cuando una PI resuelve un problema, se obtiene un «resultado» que, debidamente interpretado (y, en algunos casos, adecuadamente generalizado), permite generar nuevas técnicas de investigación útiles para obtener nuevos resultados. De esta manera la noción de *tecnología de investigación* permite clarificar la relación, habitualmente bastante oscura, entre una «teoría científica» (PI en nuestro lenguaje) y su «metodología de investigación» (ver, por ejemplo, la contribución de Michèle Artigue, Marianna Bosch y Josep Gascón en este mismo volumen).

Esta modalidad de diálogo entre dos PI, que parte de los «resultados» que una PI formula y de la metodología científica utilizada para obtener dichos resultados, es la modalidad más habitual de diálogo en las comunidades científicas «maduras», donde hay generalmente un paradigma dominante y en las que se toman en consideración los resultados provisionales de la investigación para compartirlos, debatirlos y validarlos conjuntamente en el seno de la comunidad. Sin embargo, en el caso de las PI en didáctica de las matemáticas, se trata de una modalidad de diálogo poco frecuente en los trabajos que abordan el tema de *networking theories* (Prediger et al., 2008, 2010). En general, no se suele discutir sobre la manera cómo una PI utiliza o interpreta un resultado obtenido por otra PI, ni sobre la forma de retomar una metodología de investigación de otra PI, ni sobre la comparación entre los resultados obtenidos por dos PI, incluso cuando estos pudieran aparecer como contradictorios (ver, como contraste, Bikner-Ahsbahs et al., 2010; Kidron et al., 2008; Artigue, 2009; y, dentro de la modalidad de diálogo entre teorías «cercanas», Artigue, Bosch, Gascón & Lenfant, 2010).

2. Diálogo APOS-TAD partiendo del componente teórico: cuestionamiento de la matemática escolar

En lo que sigue nos proponemos desarrollar y sistematizar un diálogo que se inició en el año 2001 con un trabajo de cooperación entre los autores de este artículo y que se recoge en Josep Gascón (2003). Se trata del diálogo entre la teoría APOS cuyas principales aportaciones se describen en diversos trabajos (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala et al., 1996; Czarnocha et al., 1999; Dubinsky & Mc Donald, 2001; Trigueros, 2005; Trigueros & Oktaç, 2005) y la TAD (Chevallard, 1992, 1997, 1999, 2007; Chevallard, Bosch & Gascón, 1997; Bosch & Gascón, 2005, 2006). Veremos que, a pesar de sus limitaciones, las tres modalidades de diálogo anteriormente descritas pueden ser fructíferas para el desarrollo interno de cada una de estas PI, siempre y cuando hagamos el esfuerzo de integrar en el diálogo todos los componentes de cada una de ellas.

La teoría APOS y la TAD son dos praxeologías de investigación en didáctica de las matemáticas que incorporan el análisis de la matemática escolar como parte de su problemática. Esto significa que, cuando abordan un problema didáctico, ambas PI cuestionan, entre otras cosas, la forma en que los programas, los libros de texto y las instituciones docentes describen las matemáticas a enseñar. Para llevar a cabo este cuestionamiento, construyen alternativas a las mismas como parte de su metodología de investigación. En este sentido, puede decirse que ambas PI toman la propia matemática como parte de su objeto de estudio. Este es un postulado común muy importante que nos ha servido como punto de partida del «diálogo» que hemos empezado a establecer.

La teoría APOS es una teoría basada en las ideas de la epistemología genética de Piaget. Su objeto primario de investigación es el aprendizaje de las matemáticas en la escuela o, dicho de otro modo, la construcción del conocimiento matemático por un alumno que puede considerarse como genérico de una institución de educación superior. Según APOS, en la práctica matemática que tiene lugar en el ámbito escolar, las relaciones que los sujetos establecen con las matemáticas no tienen por qué coincidir con las que se establecen en el ámbito de la investigación en matemáticas ni con las que tienen lugar en las instituciones en las que se utilizan las matemáticas de diversas maneras. Es importante entonces modelizar los distintos desarrollos de la actividad matemática que pueden llevar a cabo los estudiantes con el fin de determinar una evolución de esta actividad que sea, sino óptima, al menos eficaz en términos del aprendizaje de los alumnos bajo ciertas restricciones institucionales (de acuerdo a la definición de «aprendizaje de las matemáticas» dentro de la misma teoría).

La teoría APOS considera que es necesario elaborar, desde la didáctica, modelos que describan la forma en la que los estudiantes construyen los elementos de un determinado ámbito del conocimiento matemático. Estos modelos se explicitan a través de lo que en dicha PI se conoce como «descomposición genética» del concepto o ámbito matemático que está en juego (Dubinsky & Lewin, 1986; Dubinsky et al., 1992; Dubinsky & Harel, 1992). La descomposición genética consiste en la descripción detallada de la manera en que un alumno, que podemos considerar como un «alumno genérico», podría construir dichas ideas matemáticas como acciones, procesos, objetos y esquemas cognitivos.

La noción de «alumno genérico» de una institución determinada podría ser útil como punto de contacto para ambas PI. En efecto, en el caso de la TAD la noción de alumno genérico podría asimilarse a la noción de «sujeto en posición de alumno», que no debe confundirse con la noción de «persona» considerada como el emergente del conjunto de sujeciones institucionales que un individuo trae consigo (Chevallard, 1989). En el caso de la teoría APOS, se habla simplemente del alumno para referirse al alumno genérico. Veremos cómo dicha noción permitirá tomar en consideración la incidencia de la interpretación institucional de un concepto sobre la descomposición genética del mismo en dicha institución.

Sobre la base de la descomposición genética, considerada como modelo preliminar, los investigadores diseñan actividades didácticas específicas para promover dichas construcciones. Es importante aclarar que no hay una única descomposición genética; dado que dicha descomposición es un modelo general, distintos investigadores pueden proponer descomposiciones genéticas diversas, pero, una vez que estas se proponen, es necesario verificar su validez a través de los datos sobre la forma en que los estudiantes trabajan con estos problemas matemáticos relacionados con el concepto o ámbito de interés. A menudo, los datos ponen de manifiesto construcciones distintas a las previstas en el modelo y, en ese caso, es necesario revisar y refinar el modelo. Así, la descomposición genética sirve como base para el diseño de actividades que los alumnos trabajan en el salón de clase y sirve, también, como un modelo a priori para analizar cuáles de esas construcciones pueden inferirse de la actividad de solución de problemas de los alumnos, en un proceso de estudio que incluye los conceptos en cuestión, ya sea mediante actividades diseñadas con la propia descomposición genética o a través de otro tipo de cursos.

A lo largo de los años, la teoría APOS se ha enriquecido a partir de los resultados de investigaciones sobre la construcción de distintos conceptos matemáticos. Las nociones originales de la teoría se han ampliado. La necesidad de considerar los cambios que se producen en los esquemas de un sujeto genérico conforme avanza en el proceso de estudio, condujo a la introducción de la nociones de «evolución de un esquema» y de «tematización de un esquema» (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; McDonald et al., 2000; Cooley et al., 2007; Parraguez & Oktaç, 2009; Trigueros & Martínez-Planell, 2010). Además la teoría se ha visto fortalecida a través de investigaciones que han puesto de manifiesto el éxito de su aplicación en la enseñanza de conceptos específicos o de cursos completos (Vidakovic, 1997; Dubinsky & McDonald, 2001; Weller et al., 2003; Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007; Salgado & Trigueros, 2009; Campero & Trigueros, 2010).

La TAD, por su parte, puede ser considerada como un desarrollo del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas iniciado por la TSD (Gascón, 1998, 2003). A medida que este programa se iba desarrollando, se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas, que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985) en el corazón de la problemática didáctica y la noción de relatividad institucional del saber matemático.

Como consecuencia de ello, la actividad matemática institucionalizada se convirtió en el objeto primario de investigación para la TAD. Con más precisión, la TAD postula que el objeto primario de estudio de la didáctica de las matemáticas no es otro que la *ecología institucional* de las organizaciones matemáticas y didácticas asociadas y, por lo tanto, cuestiona y modeliza los procesos de génesis y difusión intra-institucional e inter-institucional de las praxeologías, no los procesos cognitivos ni del alumno ni del profesor.

Para llevar a cabo este programa se requiere explicitar un modelo epistemológico de las matemáticas que sirva como referencia (siempre relativa y provisional) para analizar en cada caso la actividad matemática institucionalizada. Los modelos así producidos son lo que designamos como «modelos epistemológicos de referencia» (MER). Estos modelos se describen en términos de praxeologías (matemáticas y didácticas) y constituyen, en cierto sentido, el núcleo firme de la TAD (Bosch & Gascón, 2005, 2006).

En este punto aparece un importante paralelismo entre la noción de «descomposición genética» (DG) que permite describir la construcción de un concepto o ámbito matemático en APOS, y la noción de «modelo epistemológico de referencia» (MER) que se utiliza en la TAD para describir, analizar y evaluar los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio.

Al igual que la noción de descomposición genética, el MER es un modelo relativo y provisional (una hipótesis) que describe la estructura de una praxeología matemática institucionalizada y propone un proceso hipotético de construcción institucional de dicha praxeología. Hay que decir que, en los trabajos llevados a cabo hasta la fecha en el ámbito de la TAD, raramente se explicitan los criterios que se han utilizado en la elaboración del MER, criterios que quedan normalmente bajo la responsabilidad privada del investigador (Sierra, 2006), mientras que en los trabajos realizados en el ámbito de la teoría APOS, suelen explicitarse claramente tanto las construcciones consideradas en la descomposición genética como los criterios con los que se elaboran las actividades de enseñanza. Dado que la comunidad científica que trabaja en el ámbito de la teoría APOS tiene mucha experiencia en el aprovechamiento de los datos provenientes de las actividades de los alumnos para refinar las descomposiciones genéticas, sus propuestas podrían ayudar a desarrollar la metodología de la TAD, proporcionando estrategias para utilizar sistemáticamente dichos datos como criterio complementario para contrastar y modificar progresivamente los MER considerados.

Dicho esto, si comparamos ahora la forma como cada una de estas dos PI lleva a la práctica este postulado, esto es, si cotejamos la manera concreta en que cada una de ellas toma efectivamente la matemática como parte de su objeto de estudio, observaremos dos puntos de divergencia. En primer lugar, la TAD pone el acento en el nivel institucional de la construcción del conocimiento matemático, remarcando la preeminencia explicativa de la «relación institucional» a los objetos matemáticos por encima de la «relación personal» a dichos objetos. Esto es, en la TAD se considera que la actividad matemática que un sujeto de una institución docente puede llevar a cabo (en torno a un ámbito determinado de las matemáticas) —es decir, las prácticas personales que se estructuran en la praxeología personal— está fuertemente condicionada por el tipo de actividad (las prácticas institucionales) que es posible llevar a cabo en la institución en relación al mismo ámbito de las matemáticas. En otras palabras, las praxeologías personales son un reflejo, más o menos deformado, de las correspondientes praxeologías institucionales (que, a su vez, contribuyen a construir).

En cambio, en la teoría APOS se enfatiza el nivel personal de la construcción del conocimiento matemático, aunque podamos interpretar que lo que se toma en consideración es el «alumno genérico de la institución» en lugar del alumno concreto. En efecto, la teoría APOS, con base en la dialéctica sujeto versus objeto de conocimiento de la epistemología de Piaget, defiende la unidad indisoluble de los aspectos «matemático» y «cognitivo» de los componentes básicos del modelo (*acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*) que forman parte de su núcleo firme.

Sin embargo, el nivel institucional también está presente en los estudios realizados desde esta perspectiva. En efecto, las construcciones y los mecanismos de construcción del conocimiento matemático que se toman como punto de partida se materializan en un conjunto de actividades o tareas matemáticas que se usan en la enseñanza, es decir en un contexto institucional concreto (Asiala et al., 1996; Trigueros y Oktaç, 2005; Weller et al., 2002). Este componente «didáctico» de la PI, que se denomina el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), quizás menos conocido, es lo que permitiría integrar el nivel institucional en la teoría APOS.

En segundo lugar, el modelo epistemológico de la teoría APOS propone una interpretación de las matemáticas que enfatiza su descomposición en «conceptos» o, mejor dicho, en redes o sistemas de conceptos matemáticos, aunque es importante destacar que dado que el foco de la teoría es el aprendizaje de los sujetos genéricos, la actividad de los mismos al enfrentar tareas matemáticas específicas es un componente importante de la teoría. Es dicha actividad y, en particular, la reflexión sobre la propia actividad el mecanismo (*abstracción reflexiva*) que permite la construcción de los conceptos matemáticos descritos en la descomposición genética.

En los estudios llevados a cabo hasta este momento con la teoría APOS, se ha centrado la atención en el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario. Es posible que, dado que se ha tomado en consideración esta única institución, las restricciones específicas que la institución puede poner a la actividad diseñada no han sido introducidas en la teoría. En las investigaciones se mencionan, sin embargo, algunas consideraciones acerca de la institución en la que los estudios se llevan a cabo. La teoría APOS empieza a utilizarse para investigar la construcción de ideas matemáticas fuera de la universidad; es en estos estudios y en la comparación con los previos realizados a nivel universitario donde las restricciones institucionales pueden aparecer de manera más explícita.

La TAD por su parte propone un modelo epistemológico que pone el acento en la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada y en la que los sistemas de conceptos, teoremas y demás objetos matemáticos se consideran componentes de las praxeologías matemáticas que aparecen organizadas en dos niveles. El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer*, es decir, los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen y utilizan para abordarlos. El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamamos *logos* o, simplemente, *saber*. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso *tecnológico* (la «razón», *logos*, de la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas.

En la TAD, la actividad de construcción y reconstrucción institucional de praxeologías matemáticas, que constituye la dinámica del modelo epistemológico propuesto, es una actividad humana y como tal también puede describirse mediante praxeologías que, en este caso, se denominan praxeologías didácticas. La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos; esto es, *momentos didácticos* que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. La noción de «momento didáctico» se utiliza, no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de dimensión de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos o momentos del proceso de estudio (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003).

A pesar de esta aparente disparidad, la teoría APOS formula siempre la descomposición genética de los objetos matemáticos en términos de *acciones* de las personas que llevan a cabo la actividad matemática y, tanto en los textos desarrollados como en las actividades diseñadas para la investigación y para la enseñanza, estas acciones se explicitan en términos de tareas matemáticas específicas y de actividades que permiten la interiorización de dichas acciones en procesos, su encapsulación en objetos o su tematización en esquemas. Las primeras dos fases del ciclo ACE, consisten, justamente, en la promoción del trabajo colaborativo de los estudiantes con esas actividades específicas y la discusión, tanto entre los estudiantes cuanto con el profesor, para promover, en la medida de lo posible, que la mayor parte de los estudiantes haga las construcciones predichas por el modelo. Esta interpretación muestra que, en realidad, los modelos epistemológicos de las matemáticas que sustentan ambas PI no están tan alejados como podría parecer a primera vista.

3. Diálogo entre APOS y TAD partiendo de los componentes técnico y tecnológico

Es importante comentar, antes que nada, que la teoría APOS y la TAD son PI «jóvenes» en pleno periodo de desarrollo y, por lo tanto, muy incompletas. Cada una de ellas puede beneficiarse, para su propio desarrollo, de la reinterpretación de algunos de los «resultados» y de la metodología de la otra PI tal como hemos descrito en la tercera modalidad del diálogo entre PI (sección 1.3). Esta posibilidad se acrecienta[1] gracias a que ambas PI coinciden, como hemos visto, en integrar la matemática «escolar» como parte de su objeto de estudio.

Veremos que las ideas acerca de los tipos de concepción (*acción*, *proceso* y *objeto*) desarrollados por APOS, adecuadamente reinterpretadas, pueden ser de utilidad para caracterizar el grado de desarrollo de las técnicas que se utilizan en una institución (según la terminología de la TAD), mientras que las ideas acerca de los niveles sucesivas de desarrollo de los esquemas (*intra*-, *inter*-, *trans*-) que propone APOS aportan elementos para precisar los grados de completitud de las praxeologías en la TAD. Recíprocamente, el principio de la *relatividad institucional del saber* que aparece en la TAD ligado a la teoría de la transposición didáctica, puede ser reinterpretado para generalizar el papel que tiene actualmente la descomposición genética en la teoría APOS. Por otra parte, el ciclo ACE de enseñanza propuesto en APOS podría describirse de una manera más detallada utilizando una reinterpretación de la teoría de los momentos didácticos desarrollada por la TAD. En todos, los casos se respeta la lógica interna de cada una de las PI ampliando su ámbito de aplicación y en ningún caso se tiene la pretensión de incorporar directamente las nociones de una PI en otra sin la necesaria adecuación.

1. Una situación similar, y todavía en mayor grado, se da entre la TAD y la TSD, debido a que ambas comparten muchos de sus principios básicos y forman parte del mismo programa de investigación.

3.1. Desarrollo institucional de las técnicas en la TAD reinterpretando los niveles de conceptualización de la APOS

En la TAD se parte de la práctica matemática institucionalizada, esto es, de las *tareas* y las *técnicas* matemáticas que se llevan a cabo efectivamente en una institución, para intentar describir la actividad matemática en su globalidad. De las *praxeologías puntuales* generadas por un único tipo de tareas se pasa, por agregaciones sucesivas, a las *praxeologías locales* (cada una de las cuales está caracterizada por una *tecnología*) y, progresivamente, a las *regionales* (centradas en una *teoría*) (Chevallard, 1999).

En lo que sigue, utilizaremos una reformulación de los tipos de concepción (acción-proceso-objeto) que la teoría APOS propone, para describir los niveles progresivos de desarrollo institucional de las técnicas matemáticas, tomando aquí la noción de técnica matemática en el sentido de la TAD.[2]

(1) Diremos que una técnica τ se propone como *acción* (o aparece como *técnica-acción*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica aparezca:

(a) Como una sucesión de acciones *arbitrarias*, esto es, acciones para las que no se plantea, en I, ninguna necesidad de justificación hasta el punto que τ aparece en I como justificación de sí misma simplemente porque, supuestamente, «funciona».

(b) Como una técnica *rígida*, lo que se pone de manifiesto si en I no aparece ningún tipo de variación de τ.

(c) Como una técnica que se aplica a actividades *aisladas*, lo cual se manifiesta en el hecho que τ siempre se pone en práctica en I para realizar un tipo muy concreto, preestablecido y aislado de tareas y nunca se mezcla ni compone con otras técnicas para constituir técnicas más complejas.

2. La TAD distingue entre desarrollo *institucional* de una técnica, que se manifiesta en la manera cómo es posible poner en práctica dicha técnica en la institución en cuestión, y el desarrollo *personal* de dicha técnica, que siempre tiene que referirse y evaluarse en relación al correspondiente desarrollo institucional.

(2) Diremos que una técnica τ se propone como *proceso* (o aparece como *técnica-proceso*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica:

   (a) Pueda ser *descrita, interpretada y justificada* mediante un discurso tecnológico-teórico que esté *disponible* en I y cuya incidencia sobre el funcionamiento efectivo de τ en la práctica matemática sea (al menos potencialmente) relevante.

   (b) Sea *flexible*, lo que se manifiesta en que, en I, existan variaciones de τ que se obtienen modificando (y, en particular, simplificando) el repertorio de gestos que forman parte de τ (o su orden de realización). Estas variaciones pueden tener por objetivo economizar su puesta en práctica para llevar a cabo determinadas tareas o aumentar su ámbito de validez, entre otros. Un rasgo importante de flexibilidad es la existencia en I de la técnica inversa de τ para abordar la tarea inversa (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

   (c) Se *articule o coordine con otras técnicas* para formar técnicas más complejas que, normalmente, permiten llevar a cabo en I otros tipos de tareas más generales que los que podían llevarse a cabo con τ.

(3) Diremos que una técnica τ se propone como *objeto* (o aparece como *técnica-objeto*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica se tome efectivamente como objeto de estudio en sí misma. Esto significa que en I aparecen explícitamente tareas matemáticas (y técnicas matemáticas para abordar dichas tareas y un discurso tecnológico-teórico asociado a dicha práctica) para responder a *cuestiones relativas a* τ (dichas cuestiones se denominan *tecnológicas* respecto de τ). Así, deben aparecer en I tareas matemáticas cuya realización permita responder a cuestiones relativas al dominio de validez y a la economía de τ, a la relación entre τ y otras técnicas, a la interpretación de los resultados que se obtienen al poner en práctica τ, a la justificación del porqué τ proporciona los resultados que proporciona, etc. (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

De la anterior reinterpretación de la caracterización que hace la teoría APOS de los diferentes tipos de concepciones en términos de los niveles de desarrollo de las técnicas institucionales, en el sentido de la TAD, se deduce que estos, más que constituir niveles claramente diferenciados y definidos de desarrollo institucional de las técnicas, forman parte de un *continuo* que describe el *proceso de desarrollo institucional de las técnicas* porque las características (a), (b) y (c) no son absolutas, sino una cuestión de grado.

Todos los niveles intermedios (entre la *técnica-acción* y la *técnica-objeto*) de desarrollo institucional de una técnica representarán tipos de *técnicas-proceso* más o menos próximos a uno u otro extremo. Es lógico pensar, desde este punto de vista, que dicho continuo se manifestará igualmente en las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los sujetos de la institución. Por lo tanto, si una técnica τ, en una institución I, aparece como *técnica-objeto*, entonces en la práctica matemática de los sujetos de I, τ también puede utilizarse como *técnica-proceso* y hasta como *técnica-acción*. Por el contrario, si el desarrollo institucional de una técnica τ no sobrepasa el nivel de *técnica-acción*, entonces los sujetos de I estarán fuertemente condicionados a utilizar τ casi exclusivamente como *técnica-acción* (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

3.2. La evolución de los esquemas, los niveles *intra-inter-trans* y el desarrollo de las praxeologías

Reformulando otro de los resultados básicos de APOS, podríamos considerar que los esquemas personales (o, mejor, los esquemas del alumno genérico) se ponen de manifiesto mediante la práctica matemática (institucionalizada) que lleva a cabo el sujeto en cuestión y que dicha práctica, como todas, puede describirse desde el punto de vista de la TAD mediante una praxeología que, en este caso, denominaremos «praxeología del sujeto genérico» (de la institución de referencia). Así, mientras que desde el punto de vista de la teoría APOS la evolución de los esquemas muestra el desarrollo personal de los conceptos matemáticos, desde la perspectiva de la TAD se considera que el desarrollo de las praxeologías del sujeto genérico de una institución (que modelizan las prácticas matemáticas que emergen de los esquemas) está fuertemente determinado por las praxeologías institucionales. Así, mientras que ante una práctica matemática concreta de un estudiante, la teoría APOS intenta vislumbrar cuál es la estructura y las características del esquema que puede entreverse a través de dicha práctica, la TAD intenta describir la actividad matemática desarrollada por el estudiante en términos praxeológicos y en referencia a las praxeologías institucionales. No hay, en principio, ninguna contradicción aparente entre ambas ambiciones.

Con esta interpretación de la práctica matemática que emerge de un esquema como una práctica describible mediante una praxeología (o mediante componentes praxeológicos más o menos coherentes entre sí), podemos reformular los diferentes niveles de desarrollo de los esquemas (APOS) a fin de proponer una evolución institucional de las praxeologías (TAD) que permita desarrollar la lógica interna de la TAD sin violentarla. Para ello utilizaremos las caracterizaciones que hace APOS de los niveles de desarrollo de los esquemas para identificar las transformaciones que sufren las praxeologías que describen la práctica matemática emergente de un esquema, cuando este recorre los sucesivos niveles de desarrollo.

La teoría APOS define los mecanismos de evolución de un esquema mediante los tres niveles siguientes (Dubinsky & McDonald, 2001):

> *Intra*-: Caracterizado por el foco en un objeto y sus relaciones internas de manera aislada, esto es, independiente de otros objetos cognitivos de la misma naturaleza.
>
> *Inter*-: Caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre esas entidades cognitivas. En este nivel el individuo agrupa ítems e incluso los llama con el mismo nombre.
>
> *Trans*-: El individuo construye una estructura subyacente de manera implícita o explícita para comprender las relaciones construidas en el nivel *inter*-. Dicha estructura da coherencia al esquema mediante la posibilidad de decidir qué pertenece al ámbito del esquema y qué no.

Desde el punto de vista de la TAD se podrían relacionar estos niveles con la dinámica de construcción y desarrollo de las praxeologías, destacando especialmente el papel que juegan las técnicas y las tecnologías en esta dinámica. Este estudio se podría llevar a cabo en términos de los sucesivos niveles de amplitud de las praxeologías (paso de puntual a local, de local a regional, etc.) y sus grados de completitud (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004). El objetivo sería intentar describir el tipo de dinámica praxeológica que interviene en los niveles de desarrollo de los esquemas en una institución dada. En concreto, proponemos las siguientes relaciones:

- Los esquemas que se asocian al nivel *intra-* permiten llevar a cabo una actividad matemática describible mediante una colección de *praxeologías* aisladas (que, en un caso límite, pueden reducirse a una única praxeología) e incluso al componente práctico de estas praxeologías. Estas praxeologías aisladas suelen estar generadas por técnicas que aparecen como *técnicas-acción* en la institución en cuestión y, en un caso límite, se reducen al bloque práctico de una praxeología *puntual*.
- Los esquemas que se asocian al nivel *inter-* requieren que se disponga de elementos tecnológicos que corresponden a una colección de *praxeologías* al menos *locales* y relativamente completas. En un caso límite, la práctica matemática emergente podría describirse mediante una única praxeología matemática local. Entre las técnicas que se ponen en juego en la práctica matemática asociada al nivel *inter-*, algunas deben aparecer en la institución en cuestión al menos como *técnicas-proceso.*
- Y, por último, los esquemas que se asocian al nivel *trans-* en una institución determinada requieren de un segundo orden de interpretación y justificación que, en la dinámica praxeológica, se situaría en el nivel de la teoría. La explicitación o utilización de elementos teóricos permitiría llevar a cabo una práctica matemática que podría describirse mediante una colección de praxeologías íntimamente relacionadas entre sí que pueden dar origen a una o más praxeologías *regionales*. Entre las técnicas que se ponen en juego en la práctica matemática asociada al nivel *trans-*, algunas deben aparecer en la institución como *técnicas-objeto.*

Esta reinterpretación de la evolución de los esquemas aplicada al desarrollo de las praxeologías, muestra que no es posible separar de manera claramente diferenciada las praxeologías puntuales de las locales, ni distinguir nítidamente las praxeologías locales de las regionales. En consecuencia, tampoco es fácil *precisar* con exactitud el grado de completitud de las praxeologías. Además de la relatividad institucional de estas nociones, resulta que las características definitorias de los niveles de amplitud y de los grados de completitud de una praxeología no son absolutas, sino una cuestión de grado (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

Algo similar sucede con la caracterización de los niveles *intra*-, *inter*-*trans*-: tampoco estos niveles son absolutos ni pueden delimitarse con precisión. Además, al considerarse distintos ámbitos matemáticos, lo que en uno corresponde al nivel *trans*- puede situarse en el nivel *intra*- del otro (Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Trigueros, 2005; Cooley, Trigueros & Baker, 2007).

3.3. La relatividad institucional de la TAD y la descomposición genética de APOS

Una gran parte de la investigación en el ámbito de la teoría APOS se ha centrado en la modelización y análisis de la forma como los alumnos construyen conocimiento matemático, como paso previo para el diseño de actividades de enseñanza que constituye la base experimental de los esquemas propuestos en la descomposición genética. Hasta hoy, muchas investigaciones han abordado este gran tipo de problemas con alumnos de nivel universitario. Podría considerarse que, tal vez, a diferencia de la enseñanza primaria y secundaria, el modelo de enseñanza universitaria es mucho más uniforme en las distintas instituciones, aunque también aquí existen diferencias institucionales que pueden influir en la forma de organizar la enseñanza y el aprendizaje. Creemos que si se tomara en consideración la dimensión institucional, mediante un análisis a través de nociones adaptadas de la TAD, se podría desarrollar el modelo de enseñanza formulado a partir de la descomposición genética.

Si se considera, como se ha hecho ya en algunos estudios, que la forma en la que los alumnos aprenden matemáticas en niveles distintos al universitario y la construcción de conceptos matemáticos elementales por parte de los futuros profesores puede modelarse, aunque sea parcialmente, utilizando las nociones de la teoría APOS (Arnon, 2001; Brown et al., 2001; Zazkis & Campbell, 1996; Zazkis & Gunn, 1997), la necesidad de tomar en cuenta el papel de la institución en el diseño de la descomposición genética sería más evidente, dado que la incidencia institucional es mucho más variada en los niveles escolares distintos a la universidad. En APOS se considera que la descomposición genética no es única, como se ha mencionado anteriormente: distintos investigadores podrían diseñar descomposiciones genéticas diferentes de un mismo concepto o dominio matemático, tomando como punto de partida su experiencia sobre las construcciones que son necesarias en el aprendizaje de un concepto o un ámbito de las matemáticas. Se podría entonces considerar el diseño de una *descomposición genética de un concepto relativa al alumno de una institución dada.*

Supongamos, por ejemplo, que se desea estudiar la forma en que el alumno genérico construye el concepto de derivada. Está claro que lo que se desea que aprenda un alumno genérico de una universidad respecto a este concepto es diferente a lo que se desea que aprenda un estudiante de nivel medio. En estos términos, es posible afirmar que el concepto de derivada en el ámbito escolar no es un concepto absoluto, en el sentido de lo que se desea enseñar y de lo que se pretende que los alumnos aprendan. El modelo de enseñanza basado en la teoría APOS requeriría de la elaboración de una descomposición genética distinta en un caso y en otro. Más aún, aunque la descomposición genética a utilizar fuera la misma, muy posiblemente se consideraría importante brindar al estudiante universitario oportunidades de hacer todas las construcciones incluidas en ella, mientras que en el caso de los alumnos de nivel medio se haría énfasis en actividades que les ayudarían a construir únicamente una parte de ellas; en ese sentido se puede considerar que el modelo de construcción del conocimiento depende de la institución considerada.

La relatividad institucional de la descomposición genética se pone de manifiesto con mayor claridad cuando se utiliza en el diseño de las actividades a desarrollar en clase relacionadas con las construcciones propuestas en el modelo. En el ejemplo considerado, las actividades para los estudiantes del bachillerato no harán ninguna referencia a las ecuaciones diferenciales; sin embargo, en una descomposición genética del concepto de derivada para un curso universitario de biología las construcciones asociadas a ellas aparecerán inevitablemente y de manera relevante. Al tomar en consideración la relatividad institucional de la descomposición genética de un concepto, la teoría APOS ampliaría su problemática sin contradecir ninguno de sus fundamentos.

En resumen, creemos que, por una parte, el uso sistemático de la noción de «alumno genérico» en la teoría APOS permitiría estudiar la descomposición genética de un concepto relativa al alumno genérico de una institución. Por otra parte, aunque APOS habla de «concepto matemático», lo que en realidad se propone son «prácticas matemáticas en torno a un concepto derivadas de la descomposición genética». Y estas prácticas tienen estructura praxeológica en términos de la TAD. El análisis de dicha estructura podría completar también el análisis que se hace desde la teoría APOS en las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos. Si en lugar de hablar de «descomposición genética de un concepto» se considerara la descomposición genética de un «ámbito de la actividad matemática» (cosa que, de hecho, parece implícita en la primera expresión), entonces tendríamos, de nuevo, una ampliación del actual punto de vista de la teoría APOS que la aproximaría a la TAD.

3.4. Relación entre el ciclo ACE y los momentos del estudio

La descripción de las organizaciones didácticas en términos de las dimensiones o momentos del estudio que propone la TAD puede utilizarse también para analizar las actividades didácticas que se diseñan para el ciclo ACE y detectar si existe algún tipo de proceso didáctico privilegiado por el uso de la teoría APOS en el diseño de materiales de enseñanza, así como sugerir nuevas propuestas congruentes con la descomposición genética asociada.

Las actividades que se diseñan con la descomposición genética tienen como propósito brindar a los alumnos oportunidades de operar y reflexionar de manera que elaboren las construcciones que el modelo predice como necesarias para el aprendizaje del ámbito de las matemáticas en estudio. Los momentos del estudio permiten revisar dichas actividades, no ya en términos de su relación con la descomposición genética, sino en relación al papel que juegan dentro de la estructura de los procesos de estudio. Se podrá así buscar, en su diseño, tanto el desarrollo de las construcciones mentales que busca la teoría APOS como el equilibrio del proceso de estudio que promueve la TAD.

Entre las actividades diseñadas para llevar a cabo el ciclo ACE, se pueden distinguir algunas cuyo propósito consiste en promover que los estudiantes lleven a cabo las primeras acciones sobre objetos matemáticos conocidos, para iniciar el proceso de construcción de los nuevos objetos. También se encuentran actividades en las que se intenta brindar oportunidades a los alumnos de establecer relaciones nuevas entre objetos que, a los ojos del estudiante, no estaban relacionados. Estos dos tipos de actividades pueden considerarse como las primeras tareas que los estudiantes enfrentan en relación a los objetos matemáticos o esquemas que se desea construir. De la misma manera que en la TAD, su principal función puede entenderse como hacer «existir» la posibilidad de obtener nuevos resultados a partir de objetos conocidos, o de presentar esos nuevos objetos a los ojos de los alumnos. Para enfrentar estas tareas, que podrían considerarse dentro del *momento del primer encuentro* del ciclo ACE, los estudiantes trabajan en grupo y, en muchas ocasiones, con el apoyo de herramientas informáticas que permiten concretar de alguna manera los objetos abstractos con los que se trabaja en las matemáticas universitarias.

El *momento exploratorio* del ciclo ACE se puede pensar como aquel en el que los estudiantes realizan acciones sobre objetos matemáticos conocidos, reflexionan sobre estas acciones y pueden interiorizarlas en procesos. Podría pensarse que este momento se encuentra concentrado en la fase de actividades del ciclo de enseñanza de APOS, pero esto no es así. En la segunda fase del ciclo, la de discusión en clase, se reconsideran las actividades y se lleva a cabo una reflexión colectiva sobre las acciones realizadas y los resultados obtenido con el fin de apoyar la interiorización de las acciones en procesos. Lo mismo puede decirse de la finalidad de algunas actividades de la fase de ejercicios del ciclo ACE; en ella, el alumno se enfrenta a problemas no necesariamente diseñados a partir de la descomposición genética, con el fin de estimular la reflexión individual. Algunas de estas actividades se pueden relacionar con el desarrollo de lo que en la TAD se consideran técnicas, situándose así en el *momento del trabajo de la técnica*. Otras, en cambio, estarían relacionadas con la construcción de propiedades que permiten formular definiciones de los objetos matemáticos o relacionar distintos objetos en términos de sus propiedades. En este caso las actividades podrían considerarse como formando parte del *momento tecnológico-teórico*.

Entre las actividades que se diseñan siguiendo el modelo previsto por la descomposición genética, se pueden distinguir algunas cuyo objetivo consiste en contribuir a la interiorización de acciones en procesos o la coordinación de distintos procesos para construir nuevos procesos. Estas actividades podrían interpretarse como la producción de nuevas técnicas en el sentido de la TAD. Si bien algunos estudios en este ámbito ponen de manifiesto que en muchas instituciones no se cuenta con dispositivos para desarrollar esta dimensión de la actividad matemática, en el ciclo de enseñanza de la teoría APOS, y por la importancia que se da a la interiorización y a la coordinación de los procesos, este momento emerge con fuerza y es sumamente importante.

Con el momento tecnológico teórico se pueden identificar aquellas actividades en las que los procesos están relacionados con la interiorización de acciones que se orientan a la construcción de propiedades de objetos matemáticos, o con los procesos que permiten establecer relaciones entre distintos objetos para construir nuevos objetos o nuevos esquemas. También se pueden incluir aquellas actividades que promueven la encapsulación de procesos en objetos o la evolución de los esquemas. Nuevamente, conviene recalcar que las actividades relacionadas con los distintos momentos del estudio se presentan por primera vez en la fase de actividades del ciclo de enseñanza ACE, pero vuelven a aparecer en las otras fases para brindar a los estudiantes mayor oportunidad de reflexión.

Aquellas actividades que tienen como meta precisar las definiciones y los teoremas relacionados con los objetos construidos y trabajados en los distintos tipos de actividades, pueden relacionarse con el *momento de institucionalización* de la TAD. Es importante notar que este momento juega un papel muy importante en la fase de discusión en clase del ciclo ACE. Dicha discusión, como se mencionó anteriormente, se lleva a cabo entre el maestro y los alumnos en el salón de clase y uno de sus objetivos principales es, justamente, la institucionalización de los procesos y objetos construidos por los alumnos a través de la reflexión sobre su actividad matemática.

El *momento de la evaluación* del proceso didáctico corresponde a la dimensión del proceso de estudio que pone énfasis en los resultados del mismo y que permiten contrastar el aprendizaje de los estudiantes. En la aplicación de la teoría APOS este balance se lleva a cabo, por una parte, a través de la revisión de su trabajo en las diversas actividades y, por otra, a través de pruebas. En la enseñanza basada en la teoría APOS se incluyen pruebas tanto individuales como colectivas en las que los estudiantes trabajan en grupo. En el marco de la teoría APOS, la evaluación juega además un importante papel como herramienta para valorar la validez de la descomposición genética, es decir, para verificar si las construcciones predichas en el modelo diseñado producen efectivamente las construcciones deseadas. En caso de que la descomposición genética no resulte efectiva, los resultados obtenidos de la evaluación dan pistas que permiten refinar el modelo para una aplicación posterior.

Hasta ahora la teoría APOS ha centrado la atención en la relación dialéctica, personal o colectiva, de los sujetos con el objeto de conocimiento. Esta relación se ha descrito en términos de la actividad cognitiva de los individuos así como en términos de los cambios que dicha actividad cognitiva experimenta conforme se sigue el ciclo de enseñanza. No se cuenta con estudios en los que se analice la forma en que la actividad propuesta se lleva a cabo en instituciones específicas. Las herramientas de la TAD pueden permitir, además de la descripción y balance de las actividades propuestas en términos de los momentos del estudio, la valoración de la viabilidad de la descomposición genética en distintas instituciones, así como la comparación de las construcciones que dicha actividad permite en cada una de ellas. De esta manera, se podría tomar en consideración la relatividad institucional de los conocimientos matemáticos, lo que constituiría una ampliación del tipo de problemas que la teoría APOS puede abordar sin violentar su estructura interna.

4. El diálogo entre APOS y TAD: recapitulación y cuestiones pendientes

Hasta aquí hemos descrito dos modalidades de diálogo entre APOS y TAD que parten, respectivamente del componente teórico y de los componentes técnico y tecnológico de ambas praxeologías de investigación. Queda pendiente, para futuras investigaciones, retomar un trabajo que, partiendo de un problema de investigación didáctica construido por una de las PI, sea posible reformularlo con las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona la otra PI ampliando así y profundizando la práctica científica de ambas.

Esta modalidad de diálogo presenta un grado de complejidad importante debido, precisamente, a la inseparabilidad de los distintos componentes de las praxeologías. En efecto, y como muestran M. Artigue, M. Bosch y J. Gascón en este mismo volumen, los tipos de problemas que formula una PI no se pueden desligar de su componente tecnológico que constituye el nivel privilegiado de la formulación de los fenómenos. En consecuencia, y en coherencia con uno de nuestros postulados epistemológicos, la modalidad de diálogo que parte de los tipos de problemas que se abordan involucrará de manera radical al resto de los componentes de ambas PI.

En las otras modalidades de diálogos que hemos desarrollado anteriormente, se han puesto de manifiesto los mecanismos que aportan puntos de «impulso» para cada una de las praxeologías de investigación. Es de esperar que en la tercera modalidad, que todavía no hemos iniciado, también aparezcan, al lado de las dificultades esperadas, nuevas funcionalidades de los puntos de encuentro que ya hemos identificado. Así, por ejemplo, el hacer explícita la dimensión institucional —siempre presente en los problemas que aborda la TAD— en los análisis que realiza la teoría APOS, puede ayudar a aproximar la problemática de esta a la problemática de la TAD. Y, recíprocamente, en la medida en que la TAD incluya en su ámbito de interés la interpretación de la dinámica praxeológica sugerida por los mecanismos de evolución de un esquema (mediante los tres niveles *intra*-, *inter*-, *trans*-), tendremos un acercamiento de la TAD a las cuestiones problemáticas que plantea la teoría APOS. En otras palabras, las aportaciones de las dos primeras modalidades de diálogo constituyen herramientas esenciales para que cada una de las PI pueda formular algunos de sus problemas en términos más compatibles con la otra, lo que no hace más que corroborar, de nuevo, la unidad indisoluble de los componentes de una praxeología de investigación.

Digamos, para acabar, que lo que se ha podido considerar habitualmente como enfoques inconmensurables cuando solo se ha tomado en consideración el componente teórico de las praxeologías de investigación, no aparece aquí, después de este trabajo conjunto entre APOS y TAD, como una característica intrínseca de las PI. En efecto, este trabajo pone de manifiesto que cuando la práctica científica —y las personas que la llevan a cabo— juega un papel central en el diálogo, en coherencia con el papel igualmente nuclear que juega dicha práctica en el desarrollo de las praxeologías de investigación, enfoques aparentemente muy alejados pueden dialogar con resultados muy fecundos, sin tener que renunciar a sus respectivas asunciones básicas, ampliando su problemática y ámbito de aplicación y desarrollando, sin violentarla, su propia lógica interna.

Referencias

Arnon I., Nesher, P. & Niremburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary-school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 167-214.

Artigue, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'intégration de cadres théoriques en didactique des mathématiques. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). Barcelona: CRM.

Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. & Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1535-1544). Lyon, Francia: INRP.
http:// www.inrp.fr/editions/cerme6

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*, 179-188.

Asiala, A., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. Shoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education 2* (pp. 1-32). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Asiala, M., Cotrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 557-578.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Nicosia: Cyprus University Press.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 417-442.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M. & Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of PME 34*, vol. 1 (pp. 145-175). Belo Horizonte, Brazil.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2), 205-250.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79-136.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Coord.), *Balises en didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). 25 years of the didactic transposition, *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, *58*, 51-65.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits sociocognitifs et ingénierie didactique. En N. Bednarz & C. Garnier (Dir.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Actes du colloque international « Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif »* (p. 277-285). Ottawa: Cirade/Agence d'Arc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Brown, A., Thomas, K. & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campero, J. & Trigueros, M. (2010). Propuesta didáctica en optimización dinámica. Investigación en el aula. *Educación Matemática, 22,* 87-117.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. En A. Bessot (Ed.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989* (pp. 211-235). Grenoble, Francia: LSD-IMAG.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropo-*

lógica de lo didáctico (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE/ Horsori.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., De Vries, D. & St. John, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16*, 345–364.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 370-392.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* vol. 1 (pp. 95-110). Haifa, Israel: PME.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The process conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Dubisnky, E. & Lewin, P. (1986): Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior 5*, 55-92.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics.

ZDM The International Journal on Mathematics Education, 38(3), 226-246.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two incommensurable scientific research programmes? *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 44-55.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M. & Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 247-264.

Laudan, L. (1977). *Progress and its problems*. Berkeley, CA: University of California Press. (Traducción castellana: *El progreso y sus problemas,* Madrid: Encuentro, 1986.)

Martínez-Planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2009). Students' ideas on fucntions of two variables: Domain, range, and representations. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5* (pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, J. Kaput & A. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education 4* (pp. 77-102). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications, 432*, 2112-2124.

Piaget, J. & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, D. F.: Siglo XXI editores (4ª edición).

Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2nd ed. 1957). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. & Lenfant A. (2008). Comparing, combining, coordination – Networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 163-164.

Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan J. & Sensevy, G. (2010). Introduction. Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research – Strategies and difficulties when connecting theories. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529-1534). Lyon, Francia: INRP. http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 287-301.

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2008): The functional algebraic modelling at secondary level. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Educacion* (pp. 2170-2179). Nicosia: Cyprus University Press.

Salgado, H. & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática, 21*, 91-117.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: Research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 537–551.

Tall, D. O. (2003). Using techology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. En L. M. Carvalho & L. J. Guimarãces (Eds.), *Historia e Tecnologia no Ensino da Matemática 1* (pp. 1-28). Rio de Janeiro, Brasil.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*, 5-31.

Trigueros M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. En D. Pitta-Pantazi &

G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359-2368). Nicosia: Cyprus University Press.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Annales de didactique et sciences cognitives, 10*, 157-176.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometric representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19.

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. En E. Dubinsky, D. Mathews & B. Reynolds (Eds.), *Readings in Cooperative Learning. MAA Notes 44* (pp. 173-195). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Weller, K., Clark, J. M., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A. & Merkovsky, R. R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBMS Issues in Mathematics Education 12* (pp. 97-131). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL.* http://pc75666.math.cwu.edu/~montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf

http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*(1), 133-169.

Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education

Carl Winsløw
University of Copenhagen, Denmark

Résumé. Le créateur de la théorie anthropologique du didactique, Yves Chevallard, a reçu récemment la médaille Hans Freudenthal attribuée en reconnaissance d'un « *major cumulative program of research* ». L'objet de cet article est de donner une vision globale de ce programme théorique en en soulignant les aspects tout particulièrement pertinents pour la recherche en éducation mathématique.

Resumen. El fundador de la teoría antropológica de la didáctico, Yves Chevallard, ha recibido recientemente la medalla Hans Freudenthal, otorgada como reconocimiento de un «*major cumulative program of research*». El objetivo de este artículo es ofrecer una presentación de este programa teórico, subrayando sus aspectos más relevantes para la investigación en educación matemática.

Abstract. The founder of the anthropological theory of the didactic, Yves Chevallard, was recently awarded the Hans Freudenthal medal, given in recognition of a "major cumulative program of research". The aim of this paper is to present an outline of this theoretical program, and to highlight some of the features which we believe to be of particular relevance to research on mathematics education.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 117-138)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

"Men die, systems last." As Hans Freudenthal completed his *Didactical phenomenology of mathematical structures* (1983), he left these words as an epigraph to his preface. He does so with a certain ironic distance, as he qualifies this capital book as "the most chaotic" of all his works. In the book, Freudenthal develops his basic idea: that "mathematical concepts, structures, ideas, have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world" (p. ix). He develops this thesis, not as a theoretical construction with sparse examples to "illustrate it", but through detailed and rich *studies* of concrete and fundamental mathematical themes—some of which may, indeed, appear also a bit "chaotic". The "system"—in the sense of a kind of superstructure to explain the meaning and method of these studies—appears mainly in the preface, where the didactic motivation of the subsequent chapters is explained: "to show to the teacher the places where the learner might step into the learning processes of mankind" (p. ix), and more widely to enable the learner to see the importance and reality of mathematical tools. According to Freudenthal, this may sometimes require a considerable work of excavation, because of the economy of "inversion and conversion", which over time causes practical mathematics to be turned into more condensed, abstract forms.

In view of these preliminaries, it seems particularly fitting that Yves Chevallard has become the most recent recipient of the prize that bears Freudenthal's name (see Artigue, 2010). Indeed Chevallard (2006) wrote:

> Almost everything out there, as well as everything in our minds, is socially contrived. A straight line is a concept, not a reality outside us. It is something created in order to make sense of the outside world and to allow us to think and act more in tune with that reality.

Chevallard shares Freudenthal's basic contention that mathematical theories and structures arise from the needs of humans—no matter how remote they may seem from any reality, as they appear after several decades of what Freudenthal (1983) calls "inversion and conversion". It is eye-catching that the early eighties saw both the last works of Freudenthal and some of the first, and most influential, of Chevallard

(1991) on didactic transposition, even if the latter was not read with great enthusiasm by Freudenthal (1986). As far as I can see from the comment, this is due (at least in part) to misunderstandings on the meaning and aims of the theory of didactic transposition, which could in turn be ascribed to the somewhat eclectic and exclusively French perspective that dominates Chevallard's presentation. In fact, Freudenthal's distancing comments were noted with regret in the postface to the second edition of Chevallard's book (1991). However, despite this episode, apparently rooted in mistaken rhetoric and bibliographical quarrels at the time, it appears that Chevallard's anthropological theory, as it stands today, is fully consistent with the basic tenets of Freudenthal's programme: to view and to teach mathematics as (primarily) a set of tools to solve real human challenges, rather than as a kind of fine art or independent reality, whose utility and origins have long been forgotten. What Chevallard's theory *adds* is also what makes it potentially useful to Nordic researchers, who since long have accepted and adopted the lessons of Freudenthal and his successors in the realistic mathematics movement. It is those additions that we will try to outline in this paper: the anthropological theory offers very precise tools to analyse mathematical practices in the classroom *as rooted* in wider mathematical and institutional contexts in which and by which they continue to exist. Indeed, it is these "systems" that last, but they do not do so in a "petrified" or automatic way: they do so through the practice of humans. It is a helpful metaphor to compare institutions with trees; young ones change rapidly and are easy to get rid of, while old ones may last for a long time with relatively little exterior change—while in fact the material substance of the trees is continuously renewed, at the rate of a few years. In the same way, old institutions like school mathematics can have a high degree of stability, even as the people involved in them change. The institutional approach to study mathematics education—which is intimately connected with other epistemological theories in didactics, and in particular to the theory of didactic situations (Brousseau, 1997)—is therefore not so much concerned with "voices" of the persons (cf. the countless "qualitative studies" from "classroom research") but focuses on the life of institutions and the way in which they function as (again, metaphorically) ecologies for practice and knowledge.

2. On theories and models

Before delving into the details of the theory, and some uses which have been made of it more recently, let us pause for a moment to ask an inevitable question: what is meant by "theory" here, and what does it mean to "use" a theory? In a way, the term "use" already represents an apparent denial of what we stated, for mathematics, a little while ago: theories unify and develop knowledge and principles which arise, fundamentally, from "uses", that is, practice to solve more elementary tasks or problems. Didactic theories are no different from mathematical ones in this respect, and the sense of "reality" they confer must not be reversed so as to make the theories a kind of limits to practice, or worse, monuments of earlier, forgotten practice which we perpetuate through meaningless, and still more hollow, rituals of practice. Didactic and mathematical theories develop and exist to assist us in framing and supporting practices arising from questions about the world. More specifically, they should help us to identify and build models of some part of the world, be it social, physical or mental. In this sense, they are more like what Lakatos (1980, p. 48) called scientific research programmes: they should continue to exist, and whenever necessary be developed and changed, according to our needs to both study and develop models of those realities in a systematic and unified way.

The social parts of reality—to which mathematics, and its teaching, belong on numerous accounts—are not the easiest ones to model because we are, in a sense, stockholders ourselves. Didactic phenomena which, to the extent they concern mathematics, include also mathematical phenomena, belong to the realm of anthropology (Chevallard, 1985, p. 206): the study of human practice, as it unfolds in communities or more precisely, in institutions. The need to construct our models carefully, and in particular with appropriate distance to what we may perceive as "necessities" (if not "natural laws") for these practices, is clear. In particular, our theory must enable us to model the institutional conditions under which mathematics and the teaching of mathematics are constructed, and articulate—from a distance—the way they operate and interact. The institutional positions of the mathematician (whether he is of Freudenthal's humanistic ilk or not), of the school and of the community of teachers will all be important. Neither of them could be considered "neutral" with respect to the other ones. While *no* model will be entirely free of institutionally rooted preconceptions, the first step in a scientific study of *any* part of reality is to be explicit about the models adopted, and their theoretical basis. To study didactic phenomena, this forces us to be explicit on how we will go about modelling the institutional realms involved—including those to which society entrust the development and warranty of mathematical knowledge and practice, and those in which such knowledge and practice is taught and learnt by new generations. This leads us back to the early works of Chevallard, and more precisely to the idea of didactic transposition.

3. Didactic transposition

The origins of the notion of didactic transposition remain disputed (while its first development in France is often ascribed to Verret, 1975). It suffices here to note that it became central to the concerns of the anthropological theory from its beginnings in the early eighties because of the need to model the widening gap between "academic" mathematics and school mathematics, and the more or less manifest failure of attempts to fill it by an anachronistic reconstruction of the latter on the bases of the former (Chevallard, 1991, p. 169).

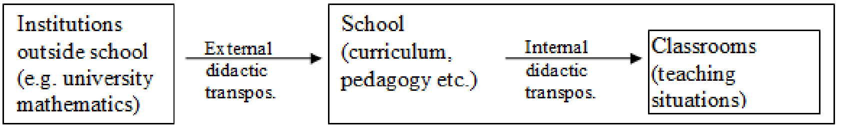


Figure 1. Didactic transposition: the adaptation of knowledge to the classroom from sources outside of the school

Through his study of the historic developments of the notion of *distance* in 20th century mathematics, and the attempts to accommodate it in various domains of school mathematics, Chevallard exhibits the two basic steps of the didactic transposition, which have since become known as *external* and *internal* didactic transposition (figure 1). These two are distinct because they operate, respectively *outside the school* (in what Chevallard terms ironically the *noosphere*, the “thinking circle” around the school), and *inside it* (e.g., as teachers struggle to adopt and adapt a new curriculum in actual teaching). The study, offered in Chevallard’s book, of a part of the didactic transpositions involved in the history of “modern mathematics” in school reforms of the late 1960’s, clearly offers a French perspective. But the mechanisms of didactic transposition exhibited are relevant even in contexts where what Chevallard calls *mathématiques savantes* (“scholarly mathematics”) is less dominant as a source and measure of the practices and theories to be taught. Indeed, the theory of didactic transposition, founded by these works, has been employed in a wide range of other disciplines and countries (Bosch and Gascón, 2006).

The main point of didactic transposition theory is to examine how disciplined knowledge, such as mathematics, depends on institutional settings. “Mathematics” as a discipline is no exception—being in fact more a family of related disciplines, bearing the same name. For instance, “mathematics” in Finish elementary school is bound to a number of current assumptions, conditions, regulations, norms and customs which makes it recognisable to those who “exercise” it (mainly teachers and students). The same could be said about “mathematics” in the international research environment (which is a relatively homogeneous institution, at least within the range of research universities in wealthy countries). In each of these and similar institutions, the discipline develops and transforms over time, as the institutional conditions change. Notions, techniques and even theories could arise and develop in one institution but remain unknown or at least irrelevant in the other one. Indeed, school mathematics (here in the plural, as they differ between countries) are far from being a subset of university mathematics and what is needed to study it. Over time, and within local institutional constraints, the different bodies of school mathematics have developed their own coherence, meaningfulness, norms and so on. It is not a coincidence that the theory of didactic transposition was developed as the “new mathematics" failed—in fact, in the cases studied by Chevallard, and mentioned above, the theory helps to explain not only the failure but also the defect assumptions on which the whole programme was built: namely, that differences between school mathematics and "academic mathematics" are defects, due to ignorance of teachers and planners, rather than effects of old and deep-seated institutional conditions and constraints.

4. Mathematic and didactic organisations

Didactic transposition is sometimes referred to as "the travel of knowledge from source(s) to students". The title of Chevallard's book (1991) could, indeed, give the superficial and erroneous impression that it is all about scientific knowledge being "transported and served" to students. While this mistake is indeed very far from the explicit meaning found in the book, it could nevertheless explain some of the reservations the theory was first met with, including those of Freudenthal. The whole point of didactic transposition theory is to exhibit and analyse the profound *changes* which knowledge and practice undergoes as it is "transposed" from one institution to another, or, within school, from the "official" curriculum to the "implemented" curriculum. For this purpose, the notion of *epistemological reference model* has become central to the theory: we must explicitly state a model of the knowledge and practice (e.g., related to notions of distance) of which we study the transposition. Our descriptions will only be "objective" in the sense that they describe the various steps of the transposition *relatively to this model.*

To build such models in ways that will bring forth relevant results, an anthropological study of practice and knowledge, and of its teaching, needs to go further than to model the most explicit and general forms of what is meant to be taught, what is actually taught, and what is, eventually, learnt. It is for this purpose, but also to substantiate the anthropological grounds of the theory, that Chevallard (1992) has developed another notion whose name had already been used by others (e.g., von Mises, 1949): that of *praxeology.* At first, the use of the word itself helps us to save breath, since it contains, etymologically, what we have until now termed *practice* and *knowledge* (the latter in the sense of *logos*, implying that common knowledge is shared through words or discourse). All uses of the word seem to imply this amalgamation of practice and discourse, or between "know how" and "know that". But Chevallard uses the word to design a more refined entity. A *praxeology* means, in the anthropological theory, a four-tuple (T, τ, θ, Θ) consisting of: a *type of task* T, a *technique* τ, a *technology* θ and a *theory* Θ. We now carefully explain the meaning, within the theory, of each of these terms—I beg the reader not to shun the abstract sections that follow, as they are indispensable to the whole theory and therefore to the aims of this paper.

Every human action is understood as motivated by something (a *task*) which this action is carried out to achieve; in other words, every human action is considered *intentional* or *motivated* (or at least, we only study activity which can be thus considered). What we actually do to carry out the task is what is called a *technique*. The fact that tasks arise in "types" amounts to nothing else than the common and crucial human experience of being able to use the same technique for a whole collection of "similar" tasks; conversely, the technique is recognised and defined by the type of tasks to which it applies. The couple (T, τ) is called a *practice block*, which is the most basic way in which we can describe a systematic practice. Mathematics, of any kind, exhibits a rich diversity of practice blocks, and identifying them is a *sine qua non* for making sense of its most basic methods. More generally, the most elementary form of *learning*—in any context whatsoever—can be described as the perception of tasks related by a common technique.

One of the characteristics of *human* practice and learning, not least in school contexts, is that techniques are often subject to *explanations*, to *arguments* and other forms of discourse, which is what is termed *technology*. For instance, the solution of algebraic equations is accompanied by explanations involving terms like "unknown", "determinant", etc. Finally, the technology may itself be explained and justified, and this "superdiscourse" about the technology is what is called theory. Some form of algebraic theory would be present or at least be relevant in many contexts where equation solving is practiced. The couple (θ, Θ) of technology and theory is called the *theory block* of the praxeology. For reasons that will soon become apparent, the whole quadruple (T, τ, θ, Θ) may also be called a *punctual organisation.*

The fact that several practice blocks (for instance, for several types of equations) may be described, justified and otherwise explained using the *same* technology, means that praxeologies are often bound together in families unified by a common technology; we call such a family of praxeologies *a local organisation.* A local mathematical organisation could, for instance, be unified by the technology related to solving equations. The theory, on the other hand, would typically be concerned with more than one technology (and indeed, one of the roles of theory is to clarify and connect different technologies). The collection of praxeologies unified by a theory is called a *regional organisation*, as it normally includes and relates several local organisations. If the tasks involved are mathematical, the organisations are naturally called *mathematical organisations.*

We notice that other types of task are important to the study of didactic phenomena, and foremost those tasks which are related to *teaching* a given mathematical organisation. The praxeologies emerging from such tasks form *didactic organisations* (punctual, local and regional, in the same way as mathematical organisations). While a didactic organisation is therefore initially defined by the mathematical organisation to be taught, it will also be subject to other conditions, and this may in turn imply that the mathematical organisation is reshaped (as happens in every internal didactic transposition). In other words, mathematical and didactic organisations are, in school practice, *determined together and by each other* or, as Chevallard puts it, they are *co-determined.*

We notice that building epistemological reference models (for instance, of mathematical practice and knowledge) in terms of praxeologies (and organisations) is by no means “natural” in the sense that one way is “right” or “evident”. As in any act of modelling, models are constructed as means to organise our description, experiments, analysis and so on—and their “value” is measured solely in terms of their utility in this respect.

I now outline a concrete example of how these notions are put to use in a recent study, concerning university students’ work with sequences and series, and their convergence properties (Gyöngyösi, Solovej & Winsløw, in press). The context was that of an explorative study of students' use of a computer algebra system (*Maple* 13.0) in connection to theoretical tasks on sequences and series. For the design of the study and in particular its intervention part, we needed a precise model of the mathematical praxeologies involved, and in particular the types of task associated with the use of *Maple* (such uses are examples of *instrumented techniques*). We notice that instrumented techniques—for instance symbolic evaluation of an infinite sum—can be used as a technique for a completely standard task of the type "determine whether a given series is convergent or not". The instrumented technique using the symbolic evaluation in *Maple* does *not* work for all series but leads to a *smaller* type of task, namely the cases where the technique applies. It will often be useful to combine it with other instrumented techniques, such as *numerical evaluation of partial sums* and *graphical representations of the sum function.* A general challenge for students and others who apply instrumented techniques is the relative lack of technology and theory about the *scope of techniques.* In other words, the type of task to which they correspond have "blurred" boundaries, in the sense that users do not know enough about the software to determine these precisely. In the paper cited above, we build up our praxeological model from "great types of tasks" (defined in mathematical terms) and precise instrumented techniques. These elements of the model are used both to design tasks for students, and to analyse their work with these tasks. Other parts of the corresponding didactic organisation are not studied in detail; as in any scientific study, the modelling process implies choices of this nature. The epistemological reference model is, in this case, focused on the mathematical practice blocks, which are observed through traces in students' written work (which include *Maple* output). But it is also important to notice the emergent needs for technology and theory which arise from practice involving instrumented techniques.

This illustrates that the ATD based reference models do not, in general, arise *a priori* but also—particularly as regards the identification of relevant categories of technology and theory—emerge from an inductive and detailed study of practice. In the study quoted above, there are only partial hypotheses regarding *technologies* of instrumented techniques. They concern mainly the functions and strengths of those techniques relatively to a given task, and they are essentially considered relatively to (standard academic) mathematical theory. Identifying modelling hypotheses and “open problems” may in itself be valuable achievements, as this and similar studies show.

The general model and also the motivation for this study come from a previous series of studies on the *transitions within* undergraduate teaching of mathematical analysis (Winsløw, 2008). The analysis of tasks which are found to be particularly problematic for students led us to distinguish two types of transition in the context mentioned. The first type arises from the requirement—common in university courses but very rare at secondary level—that students mobilise theory blocks in autonomous ways, rather than just identifying a task as being of a given type (and hence performable using a known technique). The second type consists in students being confronted with practice blocks which take their objects in theory blocks of previously developed praxeologies—for instance, when tasks concern spaces of functions, or abstractions thereof. It is clear that the first transition is, at least to some extent, a condition *sine qua non* for the second one. This distinction has also been useful in a number of other studies of transition phenomena within undergraduate mathematics, not only in analysis but also in linear algebra (De Vleeschouwer, 2010; Gueudet & De Vleeschouwer, to appear).

5. Study and research courses

The anthropological theory for a long time remained mostly “descriptive” as a research programme. This does not mean “neutral” or “disinterested” with respect to improving practice, as the analysis of didactic transpositions in terms of mathematical and didactic organisations may indeed point to shortcomings and incoherence which could inspire interventions or curricular reforms (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). But two recent additions to the theory, which will be treated in this section and the next one, have made this potential more explicit and forceful: a design tool, called study and research courses, and a model concerning the “higher levels of didactic co-determination”.

When considered locally, in terms of praxeologies, one will often notice the poverty of praxeologies developed by students themselves. In fact, it is not uncommon—even at the upper secondary level—to observe the following didactic technique to teach a given (punctual) mathematical organisation. First, the type of task is introduced by the teacher, through some examples of tasks, which are immediately executed using a technique which is explained by the teacher in view of facilitating students' use of it. The explanation of course provides a technology which is often quite instrumental, in a style like: "This is how we recognise (from surface structure) a task of this type", and "these are the steps involved in carrying out the technique". There follows a period of seat work during which students solve a sequence of tasks similar to the ones solved by the teacher, and more of them appear in assigned homework. As soon as the teacher is satisfied with the rate of success of the students in terms of carrying out the technique, the course moves on to the next punctual organisation. If any attempts are done to relate these punctual organisations, they take place at the level of instrumental technology (for instance, to distinguish "similar" yet different types of tasks); any work with theory is occasional, ritual, and limited to the teachers' explanations. This kind of didactic organisation may be experienced as time-efficient, especially in contexts where examinations and tests are mainly concerned with assessing students' (written) mastery of techniques applied to types of tasks. But it tends to reduce mathematics to what Chevallard has termed, somewhat sarcastically, "visits of monuments" (Chevallard, 2006, p. 25): praxeologies are visited briefly, as by busy tourists who are told they are important, distinguished, etc., but the visitors hurry on to the next monument as soon as the photo session is over.

Mathematical praxeologies—even punctual ones—never arise in the "petrified" form of monuments, with tasks neatly sorted into types with corresponding clear techniques. As any other praxeologies, they can be seen as "answers" to "questions", real questions or challenges which are perceived, in some situation and time, as important. Later they may be refined and cultivated in "pure"—or at least transparent—forms, in which they usually appear in school mathematics. The refinement is not just done for the joy of mathematicians, but also for the ease of teachers. The risk is that while refining and clarifying the answers so that they can be easily taught and acquired, the questions are lost and with them the meaning—or at least the significance—of the answers. And then, contrary to the intention, the ease of teaching and acquisition may turn out to be illusory: monuments visited one by one at a high pace may soon be forgotten and never appreciated for what they are.

The proposal of *study and research programmes* (SRC) is a radically different kind of didactic organisation, not *a priori* linked to a punctual mathematical organisation, but rather to a larger—at least local—one. But even if the curriculum imposes the study of such a wider mathematical organisation *O*, it may be possible to begin with a more or less "real" question *Q* which can be answered, at least in part, by developing *O*. Given such a *generating question Q* (with "generating" referring to the praxeologies that can be developed in searching for answers), and also assumptions about the praxeologies that are within reach of the students (the *praxeological equipment* of the students), one can then trace a "course" of successive subquestions and "answers" which can be produced by the students and which may, with a good choice of *Q* (and no doubt also some intervention by the teacher) involve the construction of crucial parts of *O*. The production of "answers" by the students need not proceed just through "pure research" (or creative action based on previously developed praxeologies) but will also, sometimes with an at least apparent facility in this day and age of the Internet (Chevallard & Ladage, 2009), involve the consultation of *works* by others, i.e., "study" of material that is deemed potentially helpful in attacking *Q*. The dialectics between "study" and "research" is of course the reason for the name SRC.

The way in which the idea of SRC—developed concisely in terms of praxeologies—can be said to represent a design tool, is that the generating question may be investigated *a priori*—before actual work with and by students—to create *hypotheses* about the trajectories that the course of study and research can follow, given certain assumptions about the students' praxeological equipment. One can therefore talk about a *hypothetical* SRC and a *realised* SRC; the comparison of the two may lead to modify not only the generating question *Q*, but also the assumptions made about the students' praxeological equipment (Hansen & Winsløw, 2011).

As two examples of relatively detailed expositions of this proposal, we mention Barquero, Bosch, and Gascón's work (2007) on SRCs related to population growth models, as a means to develop and explore mathematical organisations related to calculus and linear algebra, and Thrane's (2009) work on vector function models of two- and three-dimensional motion, aimed at exploring elements of high school mathematics and sports science. We notice that in both cases, the complete design involved more than one SRC (i.e., more than one generating question).

It should also be noticed that in both cases, the generating questions are often chosen deliberately, to enable mathematical organisations to be related to praxeologies and questions from other disciplines. In fact, SRC designs could also stay within "pure mathematics" (Winsløw, Matheron, & Mercier, 2010). But the multidisciplinary potential is consistent with the origins of Chevallard's first works on SRC, namely a format of cross-disciplinary work introduced in French high school around the year 2000 (the so-called *travaux personnels encadrés*). According to him, in order for a SRC to be legitimate and worthwhile, the generating question *Q* should be both open to many possible derived questions, and also *Q* should be considered, by students and teachers alike, "crucial to a better understanding and mastery of their lived world" (Chevallard, 2006, p. 28).

The emergence of SRCs as an important element of research in the framework of ATD is firmly rooted in, and draws from, a long lineage of research on mathematics teaching based on "design research" principles, and termed "didactic engineering" since the early seventies (Wittmann, 1974; Artigue, 1986). The idea of generating question is, for instance, closely related to that of fundamental situation (Brousseau, 1997, p. 24), but study and research courses go considerably beyond the didactic situations designed and experimented in Brousseau's work, with the "study component" being an important part of the larger scope. It is important to realise that the programme of SRC design both continues and builds on work in didactic engineering from the past 40 years. This continuity contrasts, to some extent, with the recent rediscovery of basic principles of didactic engineering, which is currently "hot" in North America (Lesh & Sriraman, 2010).

6. Levels of didactic co-determination

While a didactic study proceeds necessarily *inductively*, that is, from design, observation and analysis of punctual and local organisations, as developed by the work of teachers and students in smaller sequences of lessons, the analysis of the conditions and constraints which contribute to determine what we observe must take into account institutional levels far beyond the classroom: curricular materials and regulations, school pedagogy and policies, as well as wider political and cultural conditions that surround the school and its students. In the mathematics education literature, attempts to do so unfortunately tend to indulge in free amateur sociology. It is easier said than done to include the more "general" levels in the research perspective in a way that is relevant to didactic research, that is, so that we may actually study the impact of these "outside institutions" on the practices that unfold in classrooms—and more precisely on the developments of mathematical and didactic organisations which take place there.

Chevallard (2002) has proposed an apparently "simple" model for the hierarchy of institutional levels which contribute to "determine" what happens in the classroom (figure 2). The simplicity is only apparent because of the interactions among each neighbouring level and because of the relation, outlined in the figure, with the praxeological model of "what happens in the classroom".

At the basis we have three levels (subject, theme and sector) which appear explicitly in the external didactic transposition: they correspond to actual prescriptions and organisations of the curriculum, from specific types of tasks (such as the solution of quadratic equations) to theoretically defined "sectors" (such as polynomials) which are expected to be encountered by students at a given level in a given school institution. The discipline, with its identified "domains", appear at a higher level, as discursive abstractions which, however, could be determinant for the organisation of the taught discipline in time, and in its interactions with other taught disciplines (especially in countries where the discipline itself is taught in modules defined by such domains—this is currently the case, for instance, in upper secondary mathematics in Finland, as well as in the USA). But it is also clear that the authority of the individual teacher resides at lower levels—in many cases, it is confined to the didactic organisation of themes and subjects, as prescribed by the curriculum and supported by more or less fixed text books.

An excellent example of analysis of didactic and mathematical organisations with respect to these "subdisciplinary" levels of co-determination (with the "co-" indicating the solidarity between didactic and mathematical organisations) is given by Barbé et al. (2005), and analyses the consequences of confining teachers' autonomy to organise, as best they can, the didactic process in "themes". The authors call this state of affairs "thematic autism": the teacher tries to relate a small number of "subjects" by a loose overarching technology, but the theoretical unification (which is a condition for realising a sector as a coherent regional organisation) is beyond the actual or felt responsibilities of the teacher, and the case studied by Barbé et al. (2005) shows that apparent deficiencies in the internal didactic transposition can really be traced back to constraints posed by the external transposition.

The model in figure 2 proceeds to enumerate also a number of "supra-disciplinary" levels of co-determination: the *pedagogy* (norms and other conditions for teaching) which is common for all disciplines within a given school institution; the *school institution* itself, with its modes of regulation, e.g., of teachers' work in and beyond the classroom; the society in which different institutions are established and regulated as an "educational system"; and finally, the wider unit called *civilisation* in which we identify cultural norms and traditions shared by a number of societies.

Notice that, as long as we are just concerned with mathematics teaching in, for example, the Finnish elementary school, the higher levels are not only given but may appear almost "invisible", as natural conditions which, in virtue of their apparent givenness, are not really noticed.

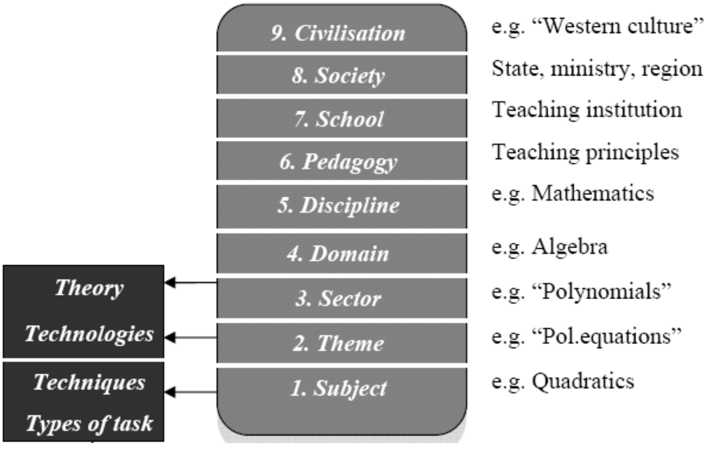


Figure 2. Levels of didactic co-determination adapted from Chevallard (2002), related to the components of (mathematical) organisations

The existence of pedagogic and disciplinary specificities appears only when we begin to *compare* and *relate* didactic and disciplinary organisations across school institutions (for instance, while studying transition phenomena related to institutions through which students pass successively). Similarly, the roles of society and culture appear only in studies which assume what is commonly called an "international comparative" perspective, as when one tries to identify sources of *differences* across countries, e.g., in students' mathematical capabilities (OECD, 2010) or in the structural aspects of didactic processes for a whole discipline or school level (Givvin, Hiebert, Jacobs, Hollingsworth & Gallimore, 2005). The assumptions and assertions about causal effects of *differences at the higher levels* on those target "measures" of comparison are often ill-defined and implicit. Moreover, it turns out that analysing them in terms of the levels of didactic co-determination can indeed help to make them more explicit and thus, in particular, questionable (Artigue & Winsløw, 2010). It goes without saying that the model displayed in figure 2 does not capture all specific variables which are studied in international comparisons—such as specific socio-economic factors, situated at the level of society—but the frequent interpretation of *correlations* between such factors, and the measures compared (students' performance within a given subject category), can at least be examined critically in the light of levels which are ignored or, more or less explicitly, assumed to be irrelevant. Another important function of such a model—which could certainly be more refined for specific purposes—is to point out the potential normative effects of ignoring manifest shortcomings in the measures which are compared, for instance, in terms of their capacity to capture effects of civilisatory differences. To account for the full complexity of the anthropological study of didactic and mathematical organisations is therefore not accomplished simply by exhibiting and applying the general and somewhat "raw" model in figure 2, but, as shown by Artigue and Winsløw (2010), the model constitutes a valuable tool to identify severe shortcomings of far less refined models, such as those used in analysing the effects of "background variables" in the PISA survey.

7. Conclusion

The anthropological theory of the didactic is not simply a collection of theoretical tools and case studies. It is an emergent research programme which defies the boundaries within which much past and present research on mathematical education seems to be confined. Its point of departure has been to defy the unquestioned (or "naturalistic") conception of disciplines, such as mathematics, as institutionally independent "bodies of knowledge" which schools and teachers succeed, more or less, to "disseminate".

The institutional contingency of any organisation of knowledge and practice is forcefully displayed through the distinction of external and didactic transposition, and the level of detail in which these transpositions may be studied in terms, on the one hand, of praxeologies realised within schools, and, on the other hand, of disciplines, sectors and domains "prescribed" from outside the school. The constitution of school disciplines is dependent on a number of conditions and norms residing at the level of pedagogy within the school, and in the society and civilisation in which that institution lives and develops. For a long time, the main perspective of ATD has remained one of critical observation and analysis, and the somewhat deterministic flavour of its terminology could indeed have been a significant reason for the reservations held by some researchers, like the late Freudenthal, as outlined in the introduction.

It is, in fact, clear that a first goal of ATD was to display the mechanisms which, in many contexts, reduce the autonomy of teachers and their institutions quite dramatically, and in fact the demonstration of these confinements has been, and remain, necessary to show that the shortcomings or even paradoxes of didactic practices are far from being the sole result, and thus responsibility, of the praxis of teachers or schools. But with the more recent additions, not least the perspective of "study and research courses", ATD has developed an equally strong potential for proposing ambitious ways to *transform* the conditions and constraints of schools and disciplines, in agreement with the needs and norms according to which societies and civilisations aim at shaping their future. To devise efficient ways to work with mathematical entities, triangles for example, as "something created in order to make sense of the outside world and to allow us to think and act more in tune with that reality" (Chevallard, 2006), is by no means an "order" that could simply be left to teachers to deliver, given institutional conditions that are typically largely unchanged by official rhetoric. It leaves us with a challenging—in fact daunting—research programme of didactic and educational engineering which goes far beyond devising local didactic techniques and technologies, but on the other hand cannot be even begin without such local interventions. The force of ATD, in front of these challenges, is to situate them in different, but related levels, to furnish relatively precise (and still improving) models to describe and act on educational reality and its context, and—perhaps foremost—to be an accumulative theory, open to ideas and results from outside, and at the same time to be determined to maintain a strong internal coherence of the research programme.

References

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe. Une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(1), 5-62.

Artigue, M. (2010). The Hans Freudenthal Medal for 2009 goes to Yves Chevallard, IUFM d'Aix-Marseille, France. *Educational Studies in mathematics.* Advance online publication. doi: 10.1007/s10649-010-9244-7.

Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(1), 47-82.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 235-268.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Using *research and study courses* for teaching mathematical modeling at university level. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Nicosia: Cyprus University Press.

Brousseau, G. & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique [*sic*] of Mathematics, Selected Papers* (pp. 131-167). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la XI^{e} école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. & Ladage, C. (2009). E-learning as a touchstone for didactic theory, and conversely. *Journal of e-Learning and Knowledge Society, 4*(2), 163-171.

De Vleeschouwer, M. (2010). *Enseignement à l'Université, perspectives institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire* (Doctoral dissertation). University of Namur, Belgique.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1986). Review of the book *La transposition didactique*, by Y. Chevallard. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 323-327.

Givvin, K. B., Hiebert, J., Jacobs, J. K., Hollingsworth, H. & Gallimore, R. (2005). Are there national patterns of teaching? Evidence from the TIMSS 1999 Video Study. *Comparative Education Review, 49*(3), 311-343.

Gueudet, G. & Vleeshouwer, M. (in press). Secondary-tertiary transition and evolutions of didactic contract: The example of duality in linear algebra. *Proceedings of the VIIth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Gyöngyösi, E., Solovej, J. & Winsløw, C. (in press). Using CAS based work to ease the transition from calculus to real analysis. *Proceedings of the VIIth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Hansen, B. & Winsløw, C. (2011). Research and study course diagrams as an analytic tool: The case of bi-disciplinary projects combining mathematics and history. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 685-694). Barcelona: CRM.

Lakatos, I. (1978). *The methodology of scientific research programmes.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lesh, R. & Sriramann, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 123-146). Berlin: Springer.

Mises, L. von (1949). *Human Action. A Treatise on Economics.* New Haven, CT: Yale University Press.

OECD (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do: Student performance in reading, mathematics and science*. Paris: OECD.

Thrane, T. (2009). *Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse* (Master's thesis). University of Copenhagen. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie12/

Verret, M. (1975). *Le temps des études.* Paris: Honoré Champion.

Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIII^e^ école d'été de didactique des mathématiques* [CD]. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2010). *Study and research courses as an epistemological model for didactics*. Manuscript submitted for publication.

Wittmann, E. (1974). Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissen-schaft. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6*(3), 119-121.

Eje 1
La TAD en el continente didáctico hoy

Axe 1
La TAD dans le continent didactique aujourd’hui

Axis 1
The ATD within the field of educational research disciplines

Les moments de l’étude : un point d’arrêt de la diffusion ?

Michèle Artaud
UMR P3 ADEF, Aix-Marseille 1 (IUFM), France

Abstract. If the concept of mathematics organization has widely spread in the community of mathematics educators, and even beyond, the same cannot be said about praxeologies formed around the concept of organization of the study, including those relating to moments of study. This paper seeks to highlight elements concerning praxeologies of study, the development of which is either encouraged or hindered by this (non-)spreading and the conditions that allow or, to the contrary, prevent this diffusion to occur.

Resumen. Si el concepto de organización matemática se ha difundido ampliamente en la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas, e incluso más allá, no ocurre lo mismo con las entidades praxeológicas formadas alrededor de la noción de organización del estudio, incluyendo las relativas a los momentos didácticos. Nos proponemos aquí poner de relieve elementos de las praxeologías del estudio cuyo desarrollo se ve favorecido o, por el contrario, obstaculizado por esta (no-)difusión y las condiciones que permiten o, por el contrario, impiden que se produzca esta difusión.

Résumé. Si la notion d’organisation mathématique a largement diffusé dans la communauté des didacticiens des mathématiques, et même au-delà, il n’en va pas de même des entités praxéologiques formées autour de la notion d’organisation de l’étude, et notamment celles relatives aux moments didactiques. Nous nous proposons ici de mettre en évidence des éléments relatifs aux praxéologies de l’étude dont le développement est favorisé ou, au contraire, gêné par cette (non-)diffusion et de conditions qui permettraient ou qui, au contraire, empêchent cette diffusion.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Nous partirons dans cette communication du postulat que « les praxéologies relatives aux moments de l'étude ont peu diffusé en dehors du cercle des collaborateurs les plus proches d'Yves Chevallard », postulat que nous ne chercherons pas à justifier ou à mettre à l'épreuve ici, pour nous centrer sur la mise en évidence d'éléments relatifs aux praxéologies de l'étude dont le développement est favorisé ou, au contraire, gêné par cette diffusion restreinte, et de conditions qui permettraient ou qui, au contraire, empêchent la diffusion de ces praxéologies.

1. Une variabilité didactique peu assumée

1.1. Juguler un processus d'étude

Nous considérerons d'abord le thème des puissances d'un nombre, enseigné en classe de 4^{e} en France (élèves de 13-14 ans), qui suscite chaque année des questions posées par les élèves professeurs de l'académie d'Aix-Marseille dans le cadre de leur formation initiale. Ce thème est donc travaillé dans la formation mais fait durablement problème, comme en témoigne cette question, posée par un élève-professeur de l'année 2007-2008 lors de la 21^{e} séance de formation – l'année en comporte 24 :

> Les puissances en 4^{e} : sur ce chapitre, le séminaire m'a apporté de nombreux éléments mais un point reste encore, pour moi, mystérieux ! Je n'arrive pas à comprendre pourquoi les formules sont données seulement pour les puissances de 10. Mes élèves ont repéré la formule sur les entiers quelconques (alors que les puissances de 10 n'ont pas été encore traitées) et l'utilisent dans les calculs malgré de nombreuses remarques. Je leur ai demandé de ne pas l'utiliser car hors programme mais bien que je leur demande de détailler les étapes de calcul (en revenant à la définition), ils utilisent cette formule. Comment le justifier autrement ? (Je leur ai permis d'utiliser la formule pour vérifier leurs calculs.) (2007-2008, 21, 4^{e})

Examinons ce que dit le programme de quatrième sur ce point :

> **Connaissances**
>
> Puissances d'exposant entier relatif
>
> [Thèmes de convergence]

> *Notation scientifique*
>
> [Thèmes de convergence]
>
> **Capacités**
>
> – Comprendre les notations a^n et a^{-n} et savoir les utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples et pour des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$, où a et b sont des nombres relatifs non nuls.
>
> – Utiliser sur des exemples numériques les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m \times n}$ où m et n sont des entiers relatifs.
>
> – *Sur des exemples numériques, écrire et interpréter un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de* 10.
>
> – *Utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur du résultat d'un calcul.*
>
> **Exemples d'activités, commentaires**
>
> Cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. Pour des nombres autres que 10, seuls des exposants simples sont utilisés. Les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissance et non par l'application de formules. […]
>
> *Par exemple, le nombre* 25 698,236 *peut se mettre sous la forme :* $2{,}569\,823\,6 \cdot 10^4$ *ou* $25\,698\,236 \cdot 10^{-3}$ *ou* $25{,}698\,236 \cdot 10^3$. (Ministère de l'Éducation nationale, 2007a, p. 48)

Le programme de la classe suivante, la troisième, mentionne pour sa part :

> **Connaissances**
>
> Puissances
>
> [Thèmes de convergence]
>
> **Capacités**
>
> Utiliser sur des exemples les égalités : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m/a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^nb^n$; $(a/b)^n = a^n/b^n$ où a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs.

> **Commentaires**
> Les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment les puissances de dix, déjà travaillées en classe de quatrième sur des exemples numériques simples, sont à consolider.
> Comme en classe de quatrième, ces résultats sont construits et retrouvés, si besoin est, en s'appuyant sur la signification de la notation puissance qui reste l'objectif prioritaire. La mémorisation de ces égalités est favorisée par l'entraînement à leur utilisation en calcul mental. (Ministère de l'Éducation nationale, 2007a, p. 61)

On a ainsi une ligne de partage entre la classe de 4^e^ et la classe de 3^e^ qui se dessine grossièrement de la façon suivante : les puissances de 10 sont à l'étude en quatrième du point de vue de la multiplication et de l'inverse et permettent de mettre en place la notation scientifique ; cette étude se poursuit en classe de 3^e^ du point de vue de la division [1] et, plus généralement, ce sont les puissances d'un nombre qui sont à l'étude dans cette classe. Ce travail d'étude des puissances d'un nombre en troisième est préparé en classe de 4^e^ par l'étude d'un petit nombre de spécimens des types de tâches rencontrés en situation (soit dans des problèmes) assortis de techniques justifiées par la définition de a^n : cela permettra de préparer expérimentalement l'émergence des résultats technologiques au programme de la classe de 3^e^. Ce dont se fait l'écho, donc, la question de l'élève professeur que nous avons citée, c'est la difficulté à faire exister, à propos des puissances d'un nombre, le travail prévu en quatrième, du moins sans anticiper sur la constitution de l'organisation mathématique enjeu de l'étude de la classe suivante. On notera que cette difficulté n'est pas sans trouver un écho dans les ouvrages pour la classe de 4^e^ : dans les six ouvrages que nous avons consultés, quatre donnent dans la partie « cours » les égalités $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $a^n \times b^n = (ab)^n$.

Ce qui peut rendre viable cette ligne de partage, c'est une gestion adéquate de la dialectique entre le moment exploratoire et le moment technologico-théorique relatifs aux organisations mathématiques (OM) étudiées. En effet, dès que les spécimens des types de tâches étudiés en

1. Bien entendu, rien n'interdit de faire accomplir des tâches du type « calculer $10^n/10^m$ ». La technique employée sera cependant la suivante : $10^n/10^m = 10^n \times (1/10^m) = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m}$; elle sera donc justifiée par les égalités relatives à la multiplication et à l'inverse.

quatrième à propos des puissances d'un nombre autre que 10 deviennent « trop nombreux », le moment de travail réalise un (épisode du) moment exploratoire qui engendre la réalisation d'un (épisode du) moment technologique associé relatif à l'organisation mathématique au programme de la classe de 3[e], et cela arrive ici d'autant plus rapidement que la définition et la technique qu'elle produit constituent les ingrédients principaux de la démonstration des propriétés au programme de la classe de 3[e]. En effet, pour prouver par exemple que $a^n \times a^m = a^{n+m}$, on écrira, en s'autorisant de la définition, que $a^n = a \times a \times \cdots \times a$, n fois ; puis que $a^m = a \times a \times \cdots \times a$, m fois ; et enfin que :

$$a^n \times a^m = (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}}) = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}.$$

La manière de gérer didactiquement le problème évoqué par la question doit ainsi prendre appui sur une mise en œuvre un peu fine de la dialectique entre expérimentation et théorisation qui permettra de réaliser les moments de l'étude. Envisageons ainsi le cas où un professeur débute l'étude de ce thème par une activité d'étude et de recherche (AER) ayant pour objet de faire émerger une organisation mathématique (OM) contenant le type de tâches « calculer $a^n \times a^m$ ». Dans la réalisation du moment exploratoire, on verra sans doute d'abord émerger un embryon de technique consistant à « compter combien de fois on a a », qui constituera une première OM ponctuelle justifiée par la définition de a^n, définition qui pourra émerger à cette occasion. C'est là qu'il conviendrait quasiment d'arrêter l'étude quand a est différent de 10 (après un bref moment de travail et d'institutionnalisation), le moment exploratoire se poursuivant pour $a = 10$ de façon à faire émerger l'élément technologique $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$, qu'il s'agira ensuite de déduire de la théorie déjà disponible, notamment de la définition de a^n. En d'autres termes, on n'étudiera que « partiellement » le type de tâches « calculer $a^n \times a^m$ » : c'est le sous-type de tâches « calculer $10^n \times 10^m$ » qui devra être « complètement » étudié.

On pourrait considérer que le problème constaté vient d'un défaut d'analyse de l'organisation mathématique à mettre en place : ce ne serait pas le type de tâches « calculer $a^n \times a^m$ », mais les types de tâches « calculer $10^n \times 10^m$ » et « calculer $a^n \times a^m$ pour $a \neq 10$ » qui auraient à être étudiés, chacun donnant lieu à une organisation mathématique ponctuelle (OMP). Sans minimiser cet aspect du problème, et notamment la reconnaissance des deux sous-types de tâches, la question de l'élève professeur citée précédemment montre de manière exemplaire que, bien que l'élucidation de l'OM ait été correctement menée grâce au travail accompli en lien avec la formation, la mise en place de cette OM est largement problématique et on est bien face à une difficulté dont la racine se situe dans l'organisation de l'étude.

1.2. Une variabilité didactique masquée

On voit ainsi émerger un rapport institutionnel à l'étude d'organisations mathématiques qui devrait faire partie de l'équipement praxéologique du professeur dans l'enseignement tant primaire que secondaire et dont l'*infrastructure* (Chevallard, 2009) des moments de l'étude permet de rendre compte. Pour avancer, considérons maintenant un thème qui fait l'objet de nombre de productions professionnelles à l'école primaire, à savoir la différence faite entre deux « natures », ou deux « modes » de calcul : le calcul dit « réfléchi » et le calcul dit « automatisé ». Cette différence a gagné plus récemment le collège et on examinera ce que développe à ce propos l'un des documents « ressources pour les classes de 6^e^, 5^e^, 4^e^, et 3^e^ du collège », celui intitulé « Le calcul numérique au collège » (Ministère de l'Éducation nationale, 2007b). On rencontre d'abord dans un tableau « un cadre permettant de penser les différents moyens de traiter un calcul pour obtenir un résultat exact ou approché » (p. 3) :

> Le tableau suivant offre un cadre permettant de penser les différents moyens de traiter un calcul pour obtenir un résultat exact ou approché :

	Calcul automatisé	**Calcul réfléchi ou raisonné**
Calcul mental	Résultats mémorisés Procédures automatisées	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
Calcul écrit	Techniques opératoires (calcul posé)	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis

Calcul instrumenté (calculatrice, logiciel)	Calculs usuels (quatre opérations), racines carrées, calculs trigonométriques, utilisation des fonctions simples d’un tableur…	– programmation d’un calcul complexe – adaptation de la procédure aux possibilités de la machine

Dans la partie traitant du calcul mental, le calcul mental réfléchi se voit caractérisé, par contraste avec le calcul automatisé, de la façon suivante :

> Le calcul mental réfléchi nécessite l’élaboration de stratégies de calcul personnelles. Il met donc en jeu l’initiative, le raisonnement et des connaissances (explicites ou non) sur la numération et les propriétés des opérations. Sa pratique nécessite la mise en œuvre de relations entre calcul et raisonnement, d’où l’expression de calcul raisonné, parfois proposée pour le désigner. Donnons deux exemples :
>
> 1. Il n’est nul besoin de mémoriser la « règle » de la division par 0,1. L’utilisation de connaissances et procédures mémorisées y supplée avantageusement. Il suffit pour cela au niveau de la classe de 6^e de savoir qu’un quotient ne change pas quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre ($\frac{a}{0,1} = \frac{a \times 10}{0,1 \times 10} = a \times 10$) ou encore, à partir de la classe de 4^e, que 0,1 c’est un dixième, que diviser un nombre c’est multiplier par son inverse et que l’inverse d’un dixième c’est 10. Il faut donc surtout savoir que $a : 0,1 = a \times \frac{1}{0,1} = a \times 10$.
> 2. Le calcul de 25×12 peut être effectué de différentes façons :
>
> – en utilisant le fait que $25 \times 4 = 1000$ et que $12 = 4 \times 3$ (qui sont deux résultats mémorisés) ainsi que la maîtrise « en actes » de la propriété d’associativité de la multiplication ; ainsi : $25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3 = 300$;
>
> – en utilisant le fait qu’on ne change pas la valeur d’un produit quand on multiplie un facteur par un nombre et qu’on divise l’autre facteur par ce même nombre : $25 \times 12 = (25 \times 4) \times (12 : 4) = 100 \times 3 = 300$;
>
> – en utilisant le fait que 25 est le quart de 100 (après avoir repéré que 12 est divisible par 4) ; il suffit alors de prendre 100 fois le quart de 12 : $25 \times 12 = \frac{100}{4} \times 12 = 100 \times \frac{12}{4}$;

– en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la « règle » de la multiplication par 10 qui est une procédure automatisée et la connaissance des doubles de nombres usuels (résultat mémorisé) ; ainsi : $25 \times 12 = 21 \times (10 + 2) = 25 \times 10 + 25 \times 2 = 250 + 50 = 300$. (p. 4)

Considérons le type de tâches « multiplier un nombre entier par 25 » et supposons que, dans une classe de 6[e], les éléments suivants figurent dans le cahier de synthèse dans la rubrique « calcul mental » :

Multiplier un nombre par 25	Calculer 37×25
On effectue la division euclidienne de ce nombre par 4	$37 = 36 + 1 = 9 \times 4 + 1$
On multiplie le quotient par 100 et on ajoute le reste fois 25	$9 \times 100 + 25 = 925$
Justification : expérimentale.	
$4 \times 25 = 100$ $16 \times 25 = 4 \times 4 \times 25 = 4 \times 100 = 400$	
$17 \times 25 =_c 425$	$43 \times 25 =_c 1075$
$17 = 16 + 1 = 4 \times 4 + 1$	$43 = 40 + 3 = 4 \times 10 + 3$
$17 \times 25 = 16 \times 25 + 25$ $= 4 \times 4 \times 25 + 25$ $= 400 + 25$ $= 425$	$43 \times 25 = 40 \times 25 + 3 \times 25$ $= 10 \times 4 \times 25 + 75$ $= 1000 + 75$ $= 1075$

[...]

Devant la multiplication proposée par le document « ressources », 25×12, on verrait les élèves mettre en œuvre cette technique, peut-être maladroitement pour certains, et dire : 12, c'est 4 fois 3 donc le résultat est 300. La distinction faite est donc ici encore une affaire d'organisation de l'étude : ce qui permet la variation des manières de faire, c'est précisément que les types de tâches objet du « calcul réfléchi » n'ont pas été étudiés au sens où on n'a pas par exemple ici découpé le type de tâches « multiplier un nombre par 25 » pour élaborer une technique à son propos. C'est d'ailleurs ce que l'on peut reconnaître dans le passage du document qui suit l'extrait précédent :

> Le calcul réfléchi consiste souvent à rendre un calcul plus simple, en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s’appuyant sur des résultats immédiatement disponibles. Ceci nécessite l’élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves. Le calcul réfléchi s’oppose au calcul automatisé en cela que les procédures construites sont avant tout personnelles et doivent être choisies en tenant compte des particularités des nombres en présence ; L’exploitation en classe des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l’accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées « en acte ». L’explicitation des différentes procédures est nécessaire pour permettre à l’élève de découvrir d’autres procédures que la sienne et éventuellement de s’en approprier une nouvelle. En dehors de quelques procédures appelées à devenir automatisées (car très performantes et d’usage fréquent), l’explicitation des procédures ne doit pas donner lieu à l’institutionnalisation d’une procédure particulière, car ce qui est simple pour un élève ne l’est pas nécessairement pour un autre, la notion de simplicité étant fonction des connaissances numériques de chacun. (Ministère de l’Éducation nationale, 2007b, p. 5)

La dernière phrase donne la clé de la différence : sur les types de tâches qui seront enjeu du calcul dit « réfléchi », on en reste à l’exploration et éventuellement à la constitution d’un environnement technologico-théorique, constitution qui ne sera que partielle puisque l’on ne met pas en perspective les portées des différentes techniques. Dans le cas du calcul « automatisé », on dispose par contraste d’une OM suffisamment travaillée (au double sens du moment de travail) pour penser qu’il s’agit dans la position d’élève de types de tâches routiniers. On est donc là encore face à deux rapports d’étude différents à deux organisations mathématiques, la différence étant du même ordre que celle mise en évidence précédemment à propos des puissances en classe de 4e. Cette différenciation didactique, masquée sans doute faute de praxéologies didactiques adéquates, glisse dans ce second cas vers une attribution au savoir : tout se passe comme si il y avait deux natures de calcul.

Voici ainsi ce que l'on pouvait lire dans le document d'accompagnement de l'école primaire portant sur le calcul mental :

> Par ailleurs, l'expérience atteste, depuis des dizaines d'années, que les enfants ont souvent tendance à calculer mentalement en appliquant les algorithmes écrits. Ceci est dû très probablement à un établissement insuffisant du calcul mental préalablement à l'apprentissage des techniques écrites qui sont souvent abordées trop tôt et, par la suite, à une prise de conscience insuffisante des différences de traitement entre calcul écrit et calcul mental. Calculer mentalement 127 + 16 en référence à la technique écrite est plus coûteux en terme de charge mentale de travail que d'ajouter successivement 10 et 6. Il importe clairement que les techniques écrites s'appuient sur une pratique du calcul mental déjà bien installée.
>
> Le propre du « calcul automatisé » qu'il s'agisse de l'emploi d'une calculette ou d'un algorithme appliqué avec papier et crayon, est de délaisser l'intuition des nombres, l'ordre de grandeur ; il met en œuvre un algorithme uniforme sur des chiffres et c'est précisément le nœud de son efficacité. Le calcul mental nécessite, au contraire, une intuition des nombres (qui s'affine avec l'entraînement) ainsi qu'une part d'initiative et de choix. Il opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité). (Ministère de l'Éducation nationale, 2003, p. 33)

On voit clairement dans le début de ce passage le problème évoqué. Les techniques de « calcul posé », techniques algorithmiques très puissantes, sont des techniques qui supposent, comme toute technique, l'accomplissement de certains gestes dans certains dispositifs, l'un des dispositifs essentiels ici étant le fait de disposer d'un papier et d'un crayon. Lorsque l'on a un calcul mental à faire, on ne dispose pas, généralement, d'un papier et d'un crayon ou du moins, si l'on en dispose, y avoir recours pose problème : on songera ici aux techniques discursives de l'ancienne arithmétique dans lesquelles le calcul mental était crucial, comme l'ont noté Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999), le fait de « poser le calcul » rompant le discours et en faisant perdre le fil. Il s'agit donc de mettre en place une autre technique, qui soit adaptée à l'absence du dispositif « papier-crayon ». Mais presqu'aussitôt, par l'intermédiaire d'un inventaire de propriétés attribuées au calcul mental (il suppose « une intuition des nombres […] une part d'initiative et de choix. Il opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés ») et un changement de dénomination, « calcul réfléchi » ou « calcul raisonné », on glisse vers une opposition au « calcul posé » :

> L'expression de « calcul mental », signifie qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul. Les expressions « calcul réfléchi » et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de « calcul rapide », autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la méthode (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes. (Ministère de l'Éducation nationale, 2003, p. 33)

La dernière phrase illustre pourtant clairement, lorsque l'on modélise à l'aide des moments de l'étude, que l'on a là un enjeu lié à l'organisation de l'étude : le fait que l'on « élabore une procédure » signifie que l'on en est, pour le type de tâches considéré, au moment exploratoire. Le moment exploratoire de ces types de tâches est en outre supposé servir le travail de l'OM proprement enjeu de l'étude, et notamment des éléments technologico-théoriques relatifs aux propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité). La « part d'initiative et de choix » attribuée au calcul mental est d'abord la marque du fait que l'étude effectuée à son propos est partielle et que les techniques n'auront pas la possibilité de se routiniser, notamment parce que l'on variera beaucoup les types de tâches à accomplir.

Ce phénomène de masquage de la variabilité didactique peut prendre d'autres formes, telle celle qui consiste à analyser les organisations de l'étude en distinguant des types de tâches didactiques sans prendre en charge leur rôle dans la réalisation des fonctions de l'étude. On va par exemple examiner la gestion de l'hétérogénéité ou de la diversité, ou encore la création de *topos*, de temps didactique, voire de milieu sans examiner en quoi ces différents types de tâches s'articulent avec d'autres pour réaliser des moments didactiques. Nous ne développerons pas davantage ce point ici.

2. Analyser et développer des praxéologies didactiques

On peut penser qu'une condition qui favoriserait la diffusion des praxéologies relatives aux moments de l'étude serait une mise en forme de praxéologies, existantes ou qui pourraient exister, sorties des lieux de leur production. On notera que, à cet égard, le séminaire de didactique des mathématiques à destination des PCL2 de l'IUFM d'Aix-Marseille joue un rôle essentiel en raison de la clinique qu'il permet. Nous donnerons ici certains éléments de cette mise en forme à partir de deux exemples d'analyse issus de ce séminaire (Artaud & Jullien, 2009) et qui prennent place tous les deux dans une classe de 2de des lycées français (élèves de 15-16 ans).

2.1. Le moment exploratoire et le moment technologico-théorique

Le premier exemple que nous examinerons est le début d'une AER pour introduire les triangles semblables (voir figure 1).

Après deux minutes dédiées à une lecture individuelle, P explicite l'objet de l'activité.

> « Votre attention s'il vous plaît. Il y a un personnage qui veut savoir la hauteur de l'arbre. Il va mener une expérience. Pour cela, il va placer un miroir à 15 mètres de l'arbre, et il va se déplacer derrière le miroir, d'une longueur de quatre mètres, jusqu'à ce qu'il puisse voir la cime de l'arbre. Grâce à cette expérience-là, a priori, il serait capable de calculer la longueur MN de l'arbre. Donc dans un premier temps, ce que je vais vous demander, c'est de repérer dans la partie I les données et la conclusion à laquelle on doit aboutir. Puis de réfléchir aux méthodes que vous connaissez pour résoudre ce type de problèmes. »
>
> Des élèves lancent « Pythagore », d'autres « Thalès » et P leur enjoint de se mettre au travail. Les élèves s'affairent pendant que P circule dans la classe.

ACTIVITES : TRIANGLES SEMBLABLES

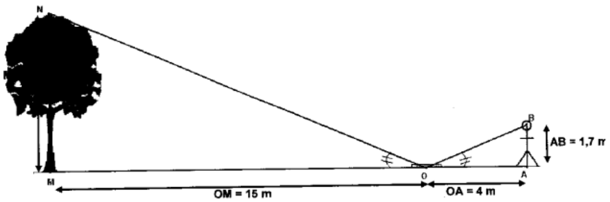
ACTIVITE 1:

Partie 1

Eric souhaite mesurer la hauteur d'un arbre. Pour cela, il réalise l'expérience suivante :

- Il place un miroir au sol situé à 15 m du pied de l'arbre.
- Il se déplace après le miroir jusqu'à ce qu'il puisse voir la cime de l'arbre dans le miroir. Il s'est alors déplacé d'une distance de 4m.

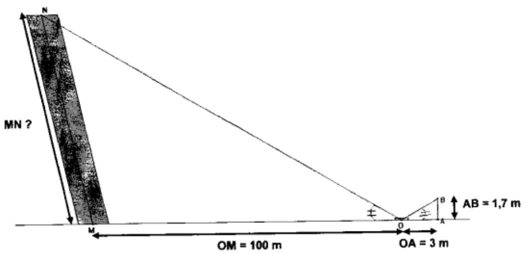
De plus, on sait que les yeux d'Eric se situent à 1,70 m du sol.
On représente son expérience par le schéma ci-dessous :



Quelle est la hauteur MN de l'arbre ?

Partie 2

Eric se rend en Italie et souhaite réaliser la même expérience avec la tour de Pise.
On représente son expérience par le schéma suivant :



Pensez-vous que cette expérience va permettre de calculer la hauteur MN de la tour de Pise? Justifier.

ACTIVITES: TRIANGLES SEMBLABLES **Janv. 07**

Figure 1. Le document support de l'activité sur les triangles semblables

Deux minutes plus tard, P récolte les données en interrogeant les élèves, en notant au tableau au fur et à mesure.

On obtient d'abord que la distance OM vaut 15 mètres, que OA = 4 mètres. Puis que l'on a deux triangles rectangles, MNO et OAB, et enfin que la hauteur AB est égale à 1,7 m.

P relance : « Qu'est-ce qu'on a d'autre comme information ?... les angles peut-être ? »

Des élèves donnent alors successivement que $\widehat{BOA} = \widehat{MON}$; puis que $\widehat{OMN} = 90° = \widehat{BAO}$.

Ce qu'il faut calculer : la longueur MN.

P : « Qu'est-ce que vous connaissez comme méthode pour calculer une longueur ? »

> Les élèves citent pêle-mêle Pythagore, Thalès, le théorème des milieux ou la trigonométrie.
>
> P : « Pour utiliser Pythagore ou la trigonométrie, il faut quoi comme conditions ? »
>
> Des élèves disent qu'il faut un triangle.
>
> P : « Quoi comme triangle ? »
>
> Es : « Rectangle ».
>
> P approuve, puis demande aux élèves de considérer l'activité 2 : « est-ce qu'on a les deux triangles rectangles ? » Les élèves conviennent que ce n'est pas le cas, et on disqualifie ainsi les deux techniques. On souhaite donc calculer MN à l'aide du théorème de Thalès.

On a là le début du moment exploratoire de l'OM enjeu de l'étude, et notamment de l'OMP relative au type de tâches « Déterminer une longueur qui apparaît comme un côté d'un triangle ». Les élèves ont déjà travaillé sur les triangles isométriques et on voit sans doute l'effet de ce travail dans l'énoncé des éléments pertinents lorsque le professeur demande des techniques de calcul de longueurs. Parmi les techniques envisagées par les élèves, l'utilisation du théorème de Pythagore « ne marche pas » directement : on n'a pas les moyens de calculer l'hypoténuse du triangle OMN si l'on ne calcule pas d'abord le cosinus de l'angle en O. Mais ce calcul est faisable avec le triangle OAB en déterminant au préalable l'hypoténuse à l'aide du théorème de Pythagore. La trigonométrie seule, en revanche, donne le résultat ; on a la tangente de l'angle en O avec le triangle OAB : $\frac{1{,}7\text{ m}}{4\text{ m}} = 0{,}425$. On obtient donc que $\frac{\text{MN}}{15\text{ m}} = 0{,}425$, soit que MN = 6,375 m. Mais le résultat ne pourra pas s'étendre dans le cas de triangles non rectangles. Cela aurait eu tout à fait sa place dans le travail exploratoire, et cela aurait permis à la fois de synthétiser le travail fait au collège (ce qui est un objectif du programme de la classe de seconde), mais aussi d'en préciser la portée en justifiant son insertion dans l'OM « plus générale » à propos des triangles semblables.

La réponse du professeur est autre : il disqualifie à peu de frais les techniques qui n'entrent pas dans le cheminement prévu. Cette technique didactique, on vient de le voir, n'est pas fonctionnelle à l'égard de la constitution d'une organisation mathématique amalgamée. En outre, elle ne met pas en œuvre un élément de dialectique des médias et des milieux que l'on peut sommairement analyser ainsi : « Lorsque les élèves énoncent des assertions, les mettre à l'épreuve ». Cette dialectique s'avère souvent pertinente dans la réalisation d'un moment exploratoire, notamment parce qu'elle permet d'enrichir et de créer du milieu comme le suggère cette question d'un élève professeur de la promotion 2009-2010 et l'élément de réponse qui lui a été apporté (Artaud & Jullien, 2010). Voici tout d'abord la question :

> En classe de 4^e^, j'ai donné aux élèves une activité pour introduire le parallélisme de (IJ) et (BC). Mais les élèves n'ont pas réussi à voir le parallélisme. Mon énoncé « approximatif » : I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC] ; I, J et K sont trois points non alignés du plan ; retrouver les sommets A, B, C du triangle ABC. Les élèves ont commencé à construire une figure à partir de I, J et K. Voyant qu'ils n'y arrivaient pas, ils sont partis de A, B et C puis ont construit I, J et K. Un élève a vu que IJ = $\frac{1}{2}$ BC (mais pas pour les autres longueurs, ça n'a pas été vu toute de suite). Pour le parallélisme, j'ai dû retracer les droites (IJ) et (BC) avec une autre couleur pour que les élèves le voient. Est-ce normal ou est-ce moi qui n'ai pas posé les bonnes questions (cruciales) ? (2009-2010, 4^e^ & 3^e^, 14)

L'élément de réponse proposé est reproduit ci-après :

> … Plaçons-nous au point où en sont les élèves quand l'un d'entre eux s'aperçoit que IJ = $\frac{1}{2}$ BC. Que doit faire le professeur en ce point ? D'abord, mettre à l'épreuve l'assertion avec la classe. Puis une fois l'assertion avérée expérimentalement, voir si cela permet d'avancer dans la solution du problème posé. IJ = $\frac{1}{2}$ BC, donc comme K est le milieu de BC, il suffit de placer C à la distance IJ de K et B de la même façon. On obtient alors A comme symétrique de B par rapport à I, et il apparaît que, dans le « cas général », la droite (AI) ne coupe pas la droite (BC) en C. Il y a donc une autre condition à satisfaire et il faut poursuivre l'analyse des figures complètes effectuées. Il n'est pas « anormal » que l'ensemble des éléments utiles ne surgissent pas « tout de suite » : il faut pour cela « enrichir le milieu ». La technique la plus productive à cet égard est de

> mettre systématiquement à l'épreuve les assertions technologiques (ou techniques) qui émergent, à la fois du point de vue de leur véracité mais aussi de leur capacité à produire la technique (ou à résoudre le problème posé) ; c'est cela qui permettra de relancer, si cela s'avère nécessaire, le moment exploratoire ou le moment technologico-théorique.

On voit apparaître d'abord, par la confrontation de ces deux matériels, le fait que dans l'analyse, l'évaluation et le développement du moment exploratoire par le professeur hors de la présence des élèves, celui-ci a à réaliser une exploration des techniques ou des embryons de techniques susceptibles d'émerger et à voir leur portée à propos du spécimen examiné, mais également en dehors. Mais on voit aussi très clairement l'importance du lien entre le moment exploratoire et le moment technologico-théorique, notamment dans le second cas où c'est la dialectique entre ces deux moments qui permet de ménager suffisamment de *topos* aux élèves dans l'émergence de l'OM.

Moment exploratoire et moment technologico-théorique sont ainsi dialectiquement liés, et on rencontre au moins deux cas de figures de cette articulation.

Dans le premier, on fait émerger une technique dont la validité dépend de celle d'un ou plusieurs éléments technologico-théoriques qui émergent de l'exploration, qu'il va donc falloir établir et, dans certains cas, déduire de la théorie (géométrique, analytique, algébrique, numérique, statistique...) disponible. C'est le cas par exemple dans l'émergence de l'OM suivante, relative à la construction à la règle et au compas d'une droite coupant un cercle de centre O en un point A de ce cercle, et en ce point seulement. Une exploration graphique de la situation conduit à essayer de repérer la droite par rapport au « seul » élément fixe de la configuration, le rayon ; si l'on s'assure du fait que cette droite est perpendiculaire en A au rayon OA, la technique est faite, puisqu'il suffira de construire à la règle et au compas la perpendiculaire en A au rayon OA. C'est ce cas qui était à l'œuvre dans les AER que nous avons évoqués précédemment.

Dans le second cas, l'exploration d'un type de problèmes fait émerger une technique qui repose sur des éléments technologiques antérieurement établis, dont la systématisation amène à voir que l'on fait « toujours la même chose », cette « chose » fonctionnant comme « lemme technique » et pouvant être enregistrée dans la théorie de façon à être accomplie une fois pour toutes et permettre de produire alors une autre technique, moins coûteuse.

C'est le cas par exemple, pour sortir de la géométrie, dans la résolution du trinôme du second degré en classe de 1re (élèves de 16-17 ans) : on va au départ, devant un polynôme du second degré à factoriser, reconnaître le début d'un carré puis une forme $A^2 - B^2$; ou encore une forme $A^2 + B^2$; etc. L'accomplissement systématique de cette technique en fera émerger la généralité : mise en œuvre sur la forme générique d'un trinôme du second degré, elle conduira à la définition du discriminant et au théorème donnant les cas d'existence des solutions et leurs valeurs, résultat qui permettra de produire la technique « classique » : on calcule le discriminant ; etc. Nous donnerons maintenant un exemple de ce type d'articulation entre moment exploratoire et moment technologique.

2.2. Vers l'institutionnalisation

Il s'agit du travail d'un professeur sur un thème qu'il a intitulé « Vecteurs et équations de droites ». Le travail sur les vecteurs et les repères dans le plan s'est déjà déroulé et a donné lieu à une synthèse. Il s'agit donc là de synthétiser le travail mené sur les équations de droites. Le professeur est parti de la poursuite d'une AER faite à propos des vecteurs, où il s'agissait de « caractériser l'alignement de points dont on connaît les coordonnées ». Une des « techniques proposées » était la suivante :

A (7 ; 3)	$7 = 3 \times 2 + 1$	
B (13 ;6)	$13 = 6 \times 2 + 1$	A, B, D et E alignés.
C (28 ; 14)	$28 = 14 \times 2 + 0 \neq 14 \times 2 + 1$	C non aligné avec les autres.
D (17 ; 8)	$17 = 8 \times 2 + 1$	
E (25 ; 12)	$25 = 12 \times 2 + 1$	

Et il s'agissait alors « d'éprouver cette technique sur les autres points de l'AER ». C'est cela qui a permis de faire émerger l'OM relative aux équations de droites. On notera que l'on a ici une autre technique de réalisation d'un épisode, semblable à celui que nous avons examiné plus haut, du moment exploratoire : quand une autre technique surgit qui n'entre pas dans le cheminement prévu, l'écarter provisoirement pour y revenir ultérieurement.

La classe a ensuite travaillé sur le problème suivant : quelle relation existe-t-il entre A(0; 2), B(2; 5) et M(x, y) pour que les points A, B et M soient alignés ? C'est à l'issue de cette étude que survient la synthèse. Le professeur procède en questionnant les élèves sur ce qui a été vu précédemment et pilote le travail de façon à ce que la classe ne s'enlise pas, comme en témoigne l'extrait suivant du compte rendu d'observation (Artaud & Jullien, 2009) :

> P : « C'est vrai. Mais qu'est-ce que t'as retenu ? »
>
> E : « Qu'il y avait une relation entre x et y pour trouver quand c'était colinéaire, euh, alignés. »
>
> P : « Quand les points étaient alignés, d'accord. »
>
> E : « Cette formule que Ni avait donnée... »
>
> P : « Ensuite, qu'est-ce qu'on a vu d'autre ? »
>
> E : « La colinéarité on l'avait vue avant, non ? »
>
> E : « Oui, la colinéarité on l'avait vue avant. »
>
> E : « Donc, on peut pas le dire. »
>
> E : « Euh, l'alignement des... enfin deux droites parallèles... quand on a fait l'exercice. »
>
> P : « Ça c'était la correction de samedi, oui. »
>
> E : « Ah ben, c'était samedi, hein. »
>
> P : « C'est vrai... On a vu les équations de droites. Les équations de droites, elles sont de quelle forme ? »
>
> E : « $y = ax + b$. »

On obtient ainsi la « définition d'une équation de droite » et P démontre avec les élèves qu'un point M appartient à la droite (AB) si ses coordonnées vérifient l'équation $y = (y_B - y_A)/(x_B - x_A)x - (y_B - y_A)/(x_B - x_A)x_A + y_A$ si $x_A \neq x_B$, l'équation $x = x_A$ sinon. Le travail s'effectue, non sans quelques difficultés dont nous ne développerons pas l'analyse ici (Artaud & Jullien, 2009), en s'appuyant sur l'étude effectuée précédemment : on écrit que $\overrightarrow{AM}$ doit être colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, etc. On est donc clairement dans le même cas que celui de l'équation du second degré cité plus haut : on a une technique qui repose sur des éléments technologiques antérieurement établis, qui permet de produire un « lemme technique » pouvant être enregistré dans la théorie. On a cependant une différence dans la mise en place décrite : hors du travail d'AER qui a fait émerger les équations de droites, les élèves n'ont accompli qu'une fois la technique et, à l'issue de la démonstration, le professeur conclut ainsi la séance sur la *praxis* qui a émergé (Artaud & Jullien, 2009) :

> P : « [...] Le type de tâches qu'on va avoir à faire c'est quoi ? Déterminer l'équation d'une droite. »
>
> P le note au tableau.
>
> P : « Pour déterminer l'équation d'une droite, on vous donnera... à partir de deux points... (*en complétant*) passant par A($x_{A\,;}$ y_A) et B($x_{B\,;}$ y_B). Comment je vais faire pour déterminer cette équation de droite ?... Oui, alors, vas-y... »
>
> E (inaudible)
>
> P : « Dis-le clairement. On va calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On va calculer quoi ? (*Tout en le notant*) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$... On prend un autre point. Ses coordonnées on va les écrire ? L'autre point ? M(x ; y). Et on va écrire que quoi ? Que... ? On écrit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Exemple. Deux exemples, que vous allez faire, qu'on va faire dans le cours. »

Le professeur a donc, en fait, « raté » le lemme technique et la technique qu'il permet de produire (dont l'élément principal consiste en la détermination du coefficient directeur) : le fragment de technologie produit dans la séance restera potentiellement technologique. On peut y voir principalement deux raisons : la première tient à ce que ce professeur, bien qu'expérimenté et instruit en TAD, ne disposait pas de l'infrastructure didactique proposée plus haut, certes rudimentaire mais néanmoins éclairante, que constituent les deux types d'articulation entre un moment technologico-théorique et un moment exploratoire ; la seconde est liée au moment de l'institutionnalisation.[2]

L'institutionnalisation s'effectue en effet dans le cadre des AER et PER sous deux types de dispositifs, les bilans d'étape et la synthèse, les

2. On pourrait comme précédemment attribuer le problème à la constitution de l'OM par le professeur ; cette constitution est cependant fortement articulée à celle de l'organisation de l'étude, celle-ci devant permettre de corriger les manques de celle-là.

premiers permettant de préparer la seconde. La synthèse gagne généralement à être différée, nous l'avons noté, notamment pour mettre en forme une OM suffisamment amalgamée qui prenne en charge le niveau thématique mais aussi le niveau du secteur. Si l'on en reste au niveau thématique, à l'issue du travail sur les équations de droites, le type de tâches « démontrer que trois points sont alignés » a maintenant deux techniques, dont l'une n'a pas été institutionnalisée bien qu'elle ait émergée de l'AER. Il s'agit donc d'amalgamer ces techniques en une seule, en précisant les occasions d'emploi de chacun des éléments. On obtiendrait par exemple [3] :

Démontrer que trois points A, B et C sont alignés :

– si les points sont donnés par des conditions vectorielles, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires en les exprimant dans un repère fixé par la configuration ;
– si les points sont donnés par leurs coordonnées, déterminer l'équation d'une droite définie par deux points et montrer que les coordonnées du troisième point vérifient l'équation ;
– si l'on a déjà l'équation d'une droite définie par deux des points, montrer que les coordonnées du troisième point (éventuellement à déterminer) vérifient l'équation.

Pour déterminer l'équation de droite dans le deuxième cas, on voit alors que si l'on écrit la colinéarité d'un vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $\overrightarrow{AB}$, on reproduit en la complexifiant, la première technique. On est donc conduit à s'interroger sur des techniques de détermination d'équation de droites autres, et la technique qui consiste à calculer coefficient directeur et ordonnée à l'origine a toute chance de venir à l'esprit.

Ce type d'organisation mathématique amalgamée existe encore fort peu, et nous croyons y voir un manque d'infrastructure tant du point de vue de la réalisation du moment d'institutionnalisation (Artaud, Cirade & Jullien, 2011) que du point de vue de l'analyse des techniques. Tout se passe comme si, en effet, l'analyse d'une technique devait se présenter sous une forme simple, élémentaire alors que, sauf dans le cas d'organisa-

3. On notera qu'une amalgamation au niveau du secteur devrait venir compléter la technique par un bloc qui a été étudié au collège, justifié par la géométrie euclidienne.

tions mathématiques ponctuelles très limitées, on a généralement besoin de pouvoir articuler plusieurs éléments, obtenant ainsi des techniques agrégées comme nous l'avions mis en évidence dans la communication donnée lors de la deuxième édition de ce congrès (Artaud, 2010) :

> … l'isolation de certaines pratiques « nouvelles », qui apparaît certainement nécessaire lors de l'émergence d'une organisation mathématique, est conservée lors de la mise en forme de cette organisation mathématique, ce qui apparaît dommageable ; les *praxéologies d'institutionnalisation* existantes doivent être développées de manière à permettre une « amalgamation » convenable des organisations mathématiques, notamment aux niveaux du secteur et du domaine.

3. Conclusion

Bien que les techniques relatives aux moments exploratoire et technologico-théorique présentées ci-dessus prennent appui sur les dispositifs d'AER et de PER, il en existe d'autres, dont la principale bien sûr prend appui sur le dispositif des situations adidactiques développé par Guy Brousseau (1986, 1998) en mettant en jeu pour l'essentiel des situations d'action et de formulation pour le moment exploratoire, de formulation et de validation pour le moment technologico-théorique. Il en va de même pour le moment d'institutionnalisation, avec des situations didactiques cette fois-ci. Les moments de l'étude fournissent ainsi une infrastructure fonctionnelle qui permet de rendre compte des organisations de l'étude existantes et de révéler des phénomènes didactiques dont l'exploration permet le développement de la théorie didactique : c'est, croyons-nous, une force de cette modélisation.

Références

Artaud, M. (2010). Conditions de diffusion de la TAD dans le continent didactique. Les techniques d'analyse de praxéologies comme pierre de touche. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 233-253). Montpellier, France : IUFM.

Artaud, M., Cirade, G. & Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l'équipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 769-794). Barcelone : CRM.

Artaud, M. & Jullien, M. (2009). *Séminaire de didactique des mathématiques pour les PCL2, année 2008-2009*. IUFM d'Aix-Marseille.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2009). *Journal du Séminaire TAD-IDD 2008-2009. Séance 6 du 29 mai 2009.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2008-2009-6.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2003). *Collection École. Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. École primaire*. Paris : CNDP. http://www2.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2007a). Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de physique-chimie du collège. *BO n° 6 du 19 avril 2007*. Paris : Auteur. http://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2007/hs6/MENE0750668A_annexe2.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2007b). *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. Le calcul numérique au collège*. http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs

Corine Castela
LDAR, Université de Rouen (IUFM), France

Abstract. This text puts forward the development of the notion of praxeology. Its main purpose is to encourage that the variety of knowledge regarding a given socially produced technique in the different institutions where this technique is used, is taken into account. As a tool to analyse this technological knowledge, six possible functions of this knowledge are distinguished in the first section, with examples related firstly to geometrical problem-solving and secondly to automatic control engineering. The second section proposes a new representation of the praxeological model more particularly focusing on the nature of the validation process according to the institutions involved.

Resumen. Este texto propone un desarrollo de la noción de praxeología con el objetivo de favorecer que, en la tecnología, se tomen en cuenta los distintos saberes relativos a una técnica socialmente producida en las distintas instituciones donde esta vive. La primera parte introduce una pauta de análisis del saber tecnológico que distingue seis funciones, con ejemplos tomados de los ámbitos de la geometría y de la ingeniería del control y automatización de procesos. La segunda parte se centra en la presentación de un modelo praxeológico extendido que explicita la diversidad de los procesos de validación posibles y su determinación multi-institucional.

Résumé. Ce texte propose un développement de la notion de praxéologie, dans le but de favoriser la prise en compte au sein de la technologie des différents savoirs relatifs à une technique socialement produite dans les diverses institutions où vit cette technique. La première partie introduit une grille d'analyse du savoir technologique qui différencie six fonctions, avec des exemples pris dans les domaines de la géométrie et du contrôle des systèmes. La seconde partie est centrée sur la présentation d'un modèle praxéologique développé qui explicite la diversité des processus de validation possibles et leur détermination multi-institutionnelle.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 163-185)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Ce texte poursuit un travail de la notion de praxéologie déjà évoqué au premier congrès de la TAD à Jaén (Castela, 2007). Je rappellerai pourquoi mes recherches sur la fonctionnalité des savoirs mathématiques pour la résolution de problèmes m'ont conduite à remettre sur le métier la notion de technologie, dont j'ai proposé (Castela, 2008) ce qu'on pourra considérer comme une extension ou comme un déploiement, suivant le sens qu'on attribue aux termes *justifier, expliquer, produire* qui participent à sa définition dans les textes fondateurs (Chevallard, 1999). Une nouvelle direction de recherche a redonné une impulsion à la réflexion : dans le cadre de l'accompagnement du travail réalisé par Avenilde Romo Vázquez (2009) pour sa thèse sur l'enseignement des mathématiques en formation d'ingénieurs, j'ai été amenée à réexaminer la question des fonctions assurées par les savoirs que l'un de mes articles (Castela, 2008) intégrait à la technologie d'une technique. C'est le premier point qui sera présenté ici, illustré par des exemples relevant de deux contextes institutionnels très différents d'utilisation de techniques mathématiques : il s'agit dans le premier cas de problèmes de constructions géométriques dans le cadre d'un enseignement de mathématiques, dans le second de situations d'asservissement de systèmes physiques dans le cadre d'un enseignement d'automatisme. Mais le développement proposé, qui attribue une place décisive et pérenne au sein des praxéologies à des savoirs non validés par une théorie, introduit la nécessité de prendre en charge explicitement dans le modèle la question de la validation et de ses formes diverses, plus largement de la légitimation des praxéologies par les institutions où elles vivent. C'est le second point abordé dans ce texte : me situant dans la perspective ouverte par l'introduction de l'échelle des niveaux de détermination (Chevallard, 2002), je proposerai une représentation du modèle praxéologique qui explicite notamment la multi-détermination institutionnelle d'une praxéologie. Je terminerai en essayant de montrer l'intérêt de cette proposition : comme guide pour décrire les différents états d'une praxéologie relative à un même bloc practico-technique, comme outil pour poser de nouvelles questions, concernant par exemple le processus de légitimation institutionnelle d'une praxéologie, qu'on s'intéresse à des dynamiques d'émergence ou de circulation inter-institutionnelle.

Ce résumé situe les propositions présentées dans ce texte dans le cadre de la didactique des mathématiques. Je voudrais, avant d'entrer dans le vif du sujet, les aborder d'un point de vue plus général de façon à ce que le lecteur ait une idée de l'ensemble des préoccupations qui sous-tendent aujourd'hui mon travail. J'ai été amenée à prendre un certain recul relativement au champ de la didactique des mathématiques par le problème suivant : que signifie se réclamer de la théorie anthropologique du didactique ? Si, comme c'est mon cas, l'on ne se contente pas d'utiliser les ressources d'un ensemble conceptuel déjà-là, si l'on prétend participer à un processus collectif d'élaboration critique, on est amené à s'interroger sur des questions de fondements, fondements de la théorie, fondements de sa propre activité de chercheur. Entrer dans ce travail à titre personnel m'a conduite à cerner les aspects de la cognition humaine auxquels je choisis de m'intéresser parce que je leur accorde un rôle déterminant. Je me réclame d'une approche anthropologique, mais qu'ai-je dit là si cet adjectif se contente de qualifier ce qui est spécifique de l'humain ? Je prends le parti d'une conception socioculturelle de l'essence humaine : une personne est le fruit de la rencontre d'un potentiel individuel et de ressources sociales ; pour actualiser ce qui n'est qu'un potentiel d'humanité, un individu doit tout au long de sa vie rencontrer des ressources culturelles situées en dehors de lui-même, socialement et historiquement produites et rendues disponibles par certaines organisations sociales. Et c'est bien cette conception de l'anthropologique qui m'oriente vers la TAD, comme ayant introduit en didactique des instruments conceptuels qui me permettent de développer cette approche socioculturelle. En premier lieu, les concepts associés d'institution et de sujet : institution comme organisation sociale stable déterminant, selon une suggestion de Carl Winsløw, une écologie d'un champ donné de l'activité humaine, rendant possible par les ressources mises à disposition et encadrant par les assujettissements exercés l'action de ses sujets. En second lieu, le concept de praxéologie : une praxéologie mathématique (usuellement une organisation mathématique) se veut dans la TAD un modèle anthropologique de l'activité mathématique en même temps que du savoir mathématique. Il me paraît important de généraliser cet objectif au-delà des seules organisations mathématiques et didactiques. Le concept de praxéologie constitue un outil de modélisation des activités humaines et des ressources, notamment cognitives, socialement produites et capitalisées par des groupes humains pour outiller avec une certaine efficacité leurs activités. Le terme de « praxéologie » est donc ici utilisé pour désigner un objet social, généralisant la notion de savoir. Il n'y a pas de praxéologie dans le sens culturel considéré en dehors d'une organisation sociale stable, c'est-à-dire d'une institution, au sein de laquelle existent des dispositifs assurant la diffusion et la légitimation des ressources individuellement ou localement produites, comme la pérennité du capital ainsi constitué grâce à la transmission aux nouvelles générations. Autrement dit, premièrement, le domaine du praxéologique est celui de la cognition institutionnelle, deuxièmement, le didactique en est une composante intrinsèque. J'ai insisté sur la dimension *Ressource pour l'activité* : une praxéologie *P* reconnue par une institution *I* fournit aux sujets de *I* des ressources pour traiter les tâches d'un type *T*. En même temps, elle norme leurs façons d'affronter ces tâches dans *I*. L'apprentissage d'un sujet de *I* relatif à *P* est le processus par lequel cet individu se soumet aux normes de *P* et s'approprie ses ressources, autrement dit se fait sujet de *P*. On peut donc considérer qu'une praxéologie *P* est une institution. Et l'étude de l'apprentissage institutionnel, c'est-à-dire du développement par une institution de son capital praxéologique, intègre celle des formes et des phases du processus qui stabilise et légitime *P* dans *I* et ce faisant l'institue, c'est-à-dire la fait institution, deux raisons de considérer qu'il s'agit d'un processus d'institutionnalisation[1].

Cela définit la perspective sous laquelle j'envisage mon travail actuel, participant de ce que j'aurais envie de nommer une épistémologie de la cognition institutionnelle, domaine de la didactique conçue comme la science qui étudie « les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines » (Chevallard, 2007, p. 719), un domaine dont l'objet n'épuise pas le didactique puisque la cognition individuelle n'en relève pas. Dans les

1. J'ai intégré ici à ma réflexion une approche développée dans le cadre de la socio-épistémologie ; voir par exemple (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez Sierra, 2006).

textes se référant à la TAD, notamment ceux d'Yves Chevallard, et publiés dans des revues scientifiques, je n'ai rencontré aucun élément qui me donne à penser que les fondements explicités précédemment de mon activité de recherche entrent en contradiction avec ceux de la TAD ; ils me paraissent au contraire en forte résonance. Mais cela peut être une affaire d'interprétation personnelle car les fondements de la théorie ont jusqu'à présent surtout été donnés à voir en actes, de définition et d'utilisation. Il me semble que les congrès de la théorie anthropologique du didactique doivent s'attaquer à un travail d'explicitation de ses prémisses, de ses partis pris, comme condition nécessaire au développement collectif de la théorie par la résolution scientifique de débats contradictoires. Ce qui suit est une contribution à un débat sur la notion de praxéologie, considérée comme devant être encore peaufinée pour outiller efficacement l'épistémologie de la cognition institutionnelle évoquée précédemment.

1. Les fonctions du savoir technologique d'une technique

1.1. Les savoirs nécessaires à la fonctionnalité en mathématique d'une technique mathématique

Les recherches que j'ai développées relèvent toutes, jusqu'à une période très récente, d'une seule et unique problématique. Dans la lignée des travaux consacrés à la résolution de problèmes – je citerai, sans exhaustivité, Alan H. Schoenfeld (1985) et les travaux français sur le « méta », notamment ceux qui ont été coordonnées par Jean-Luc Dorier (1997) –, j'ai centré mon travail sur des connaissances, que l'on peut qualifier de pragmatiques ou pratiques, qui favorisent l'utilisation efficace des savoirs académiques en jeu dans les pratiques mathématiques auxquelles il s'agit d'initier les élèves. On trouvera dans la partie 1.2. des exemples qui préciseront, si nécessaire, le champ des connaissances considérées. Que les mathématiciens construisent individuellement de telles connaissances, la preuve en est amplement apportée par les nombreux articles émanant de la communauté anglophone qui s'intéressent à la résolution de problèmes et à l'*advanced mathematical thinking* ; des travaux explorent les pratiques des experts, certains proposent d'intégrer les connaissances pratiques qui y sont révélées dans les curriculums. Mais ces recherches abordent la cognition du point de vue de l'individu et il n'en existe pas, à ma connaissance, qui soit de nature à étayer les affirmations suivantes : des savoirs pratiques circulent explicitement au sein de certaines des institutions de la recherche en mathématiques ; de ces savoirs dépend la fonctionnalité des OM institutionnalisées dans les publications, dont les chercheurs reprennent les techniques pour les utiliser ; conditions d'une contextualisation efficace dans des travaux nouveaux, ces savoirs sont peu diffusés, du moins tant que leur intervention est décisive dans la concurrence entre équipes.

Ces connaissances, traditionnellement exclues des textes du savoir théorique mathématique, le sont aussi des instructions officielles définissant les programmes scolaires français. La construction par les élèves de telles connaissances correspond donc à ce que j'appelle des enjeux (institutionnellement) ignorés d'apprentissage. J'attribue à une réalisation insuffisante de ces apprentissages une partie des difficultés manifestées à l'occasion de certaines transitions par des élèves précédemment en réussite en mathématiques. Mais organiser institutionnellement une prise en charge didactique des enjeux ignorés d'apprentissage relatifs aux pratiques mathématiques suppose que ceux-ci soient identifiés par l'institution à et par des savoirs socialement reconnus et partagés. Même s'il n'est pas nécessairement question de transformer ces connaissances utiles à la résolution de problèmes en objets pérennes d'enseignement, l'Éducation nationale ne peut pas enjoindre aux professeurs de favoriser la dévolution aux élèves de la construction de telles connaissances sans que ce qui est à construire soit reconnu comme légitime par l'institution et par les professeurs. Les apprentissages visés doivent pouvoir être analysés par les professeurs et, au moins en partie, explicités aux élèves. Dans une institution didactique, ayant par définition affaire à des débutants, la praxéologie relative à un type de tâche T doit donc institutionnellement intégrer certains savoirs pratiques, ce développement praxéologique relevant de la transposition didactique des OM. C'est ce que vise un de mes articles (Castela, 2008), qui introduit ce qui peut apparaître comme une extension de la notion de technologie relative à une technique :

> Aux côtés d'éventuels éléments de savoirs empruntés à certaines théories pertinentes (nous parlerons dans la suite de « la *composante théorique* » de la technologie, notée θ^{th}) figurent dans la technologie ces savoirs qui, selon les domaines de recherche, sont qualifiés d'opératoires, pragmatiques, pratiques. Œuvre collective forgée dans l'expérience, cette *composante pratique* de la technologie (notée dans la suite θ^{p}) exprime et capitalise la science de la communauté des praticiens confrontés dans les mêmes conditions matérielles et institutionnelles aux tâches du type T, elle en favorise la diffusion au sein du groupe. (p. 143)

Dans l'article cité, les deux composantes sont distinguées par la forme de leur validation (par une théorie ou par l'usage) mais aussi par leurs fonctions. Je reviendrai successivement sur ces deux points, en commençant dans cette partie par le second.

1.2. Les fonctions de la technologie d'une technique

Selon Y. Chevallard (1999), la technologie d'une technique est

> un *discours rationnel* […] ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T […] une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer* la technique. […] Enfin une dernière fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la *production* de techniques. (pp. 226-227)

Trois fonctions sont ainsi considérées. Partant du corpus des savoirs liés à la résolution de problèmes mathématiques évoqués dans la section précédente, je distingue pour ma part six fonctions dont on peut considérer qu'elles sont ou non prises en charge par les verbes utilisés dans la citation ci-dessus suivant le sens qu'on leur attribue. Après avoir défini chacune d'entre elles, je l'illustrerai dans cette section par des exemples concernant des utilisations en mathématiques de techniques mathématiques. Dans la section 1.3, j'utiliserai les outils proposés pour analyser sur un point particulier le contenu d'un cours d'automatisme.

Les savoirs technologiques d'un bloc $[T, \tau]$ remplissent l'une ou l'autre des fonctions suivantes : *décrire, motiver, faciliter, valider, expliquer, évaluer.*

1.2.1. Décrire la technique

Il s'agit ici de considérer la production d'un discours descriptif des gestes qui composent une technique comme un fait de savoir non identifiable à la maîtrise de la technique elle-même. L'élaboration d'un système de représentations, verbales et plus largement symboliques, des actions est ici en jeu, système qui doit être socialement partagé. La production de ces langages et du descriptif qu'ils permettent me semble constituer une composante décisive du processus de diffusion et transmission d'une invention technique.

Pour illustrer mon propos, je m'intéresserai à un seul type de tâches, usuellement nommé problème de construction, que je vais me contenter de définir par un exemple : « Étant donné deux droites sécantes et un point A n'appartenant à aucune de ces droites, construire tous les cercles tangents aux deux droites et passant par A. »

> Description de la méthode d'analyse-synthèse
>
> Analyse : on suppose le problème résolu et on établit par implications successives une liste de propriétés vérifiées par un objet solution au problème. Synthèse : on considère un objet vérifiant certaines des propriétés rencontrées dans l'analyse et on montre qu'alors il est solution au problème posé ; les propriétés sont choisies de façon à ce qu'il existe un procédé connu de construction des objets les vérifiant.

1.2.2. Faciliter la mise en œuvre de la technique

Les savoirs considérés ici permettent aux usagers d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations et d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. Ce domaine de savoirs est le terrain privilégié des élaborations technologiques d'utilisateurs. Il produit des effets de reprise du descriptif, l'adaptent aux conditions particulières du contexte institutionnel d'utilisation et l'enrichissent de la mémoire des expériences accumulées.

> Faciliter la phase d'analyse : la figure d'étude
>
> Une difficulté de la phase d'analyse est que le problème n'étant pas encore résolu, on ignore comment réaliser un dessin qui puisse servir de support à l'étude. Une façon de résoudre ce problème est de réaliser un

dessin en ne respectant pas l'ordre d'introduction des objets imposé par la construction à réaliser.

1.2.3. Motiver la technique et les gestes qui la composent

On s'intéresse ici à des savoirs qui participent d'une intelligence des fins : ce sont les buts atteints qui justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Il s'agit d'écrire une histoire de la technique qui situe ses composantes les unes par rapport aux autres : pour quoi (*¿para qué?*) accomplit-on tel geste à tel moment ? Les savoirs de motivation sont aussi souvent des savoirs sur le type de tâches puisqu'ils en analysent les buts. Ils permettent d'anticiper les étapes à atteindre et donc jouent un rôle heuristique important lorsque la mise en œuvre de la technique nécessite des adaptations.

Motivation heuristique et logique de l'analyse

Si l'on n'a initialement aucune idée pour définir des objets candidats à être solutions, l'analyse permet d'obtenir des procédés de construction possibles. Par ailleurs, elle fournit une condition nécessaire pour que des objets soient solutions, contribuant donc au niveau logique à l'établissement d'une équivalence.

1.2.4. Valider la technique

La fonction considérée correspond à ce qui est en général entendu sous le terme justifier dans les textes qui définissent la notion de praxéologie. Il s'agit de savoirs qui établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

Validation de l'analyse-synthèse

L'analyse-synthèse produit une nouvelle caractérisation de l'ensemble S des objets que le problème demande de construire car l'analyse définit un ensemble de conditions nécessaires d'appartenance à S et la synthèse prouve qu'elles sont suffisantes. On aboutit donc à une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à S.

1.2.5. Expliquer la technique

Il est ici question d'une intelligence des causes. Il s'agit de savoirs qui analysent comment il se fait que la technique et ses différents gestes permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

Une explication complémentaire de la technique d'analyse-synthèse

> On établit qu'un objet appartient à S si et seulement si il vérifie une nouvelle liste de conditions, laquelle caractérise un ensemble S'. L'analyse montre que si un élément appartient à S, alors il appartient à S', autrement dit que S est inclus dans S', la synthèse que si un élément appartient à S', alors il appartient à S, autrement dit que S' est inclus dans S. Cette double inclusion prouve que les ensembles S et S' coïncident.

On sait depuis la diatribe des géomètres autour des méthodes analytiques de Descartes qu'il existe même en mathématiques des validations qui n'expliquent pas. Il existe aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de la validation dans l'institution qui examine cette question de la validité (sur le rôle des institutions voir la partie 2), en s'appuyant par exemple sur des analogies. Elle contribue à la compréhension des causes par les sujets et est donc très liée à leur culture partagée.

1.2.6. Évaluer la technique

Les savoirs envisagés ici portent sur l'étendue, les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs. Les fonctions évaluer, faciliter et motiver sont parfois intimement associées : la mise en évidence de certaines difficultés (évaluer) peut entraîner au bout d'un certain temps la production d'améliorations (faciliter) dont la motivation est donc fournie par l'évaluation.

> Évaluation des techniques d'analyse-synthèse et d'allégement des contraintes
>
> L'analyse-synthèse est particulièrement intéressante dans le cas où le but est de construire l'ensemble des objets solutions du problème (problème fort). Dans le cas d'un problème faible (seule la construction d'une solution est demandée), si on a une méthode pour construire une solution, l'analyse-synthèse n'est pas indispensable.
>
> La technique d'allégement des contraintes est une façon d'obtenir une solution. Elle est donc adaptée dans le cas faible. Dans le cas du problème fort, il reste à prouver que toutes les solutions construites conviennent bien, ce qui est souvent délicat.

Conformément à ce que j'indiquais (Castela, 2008), la prise en compte de ces six fonctions technologiques conduit à intégrer dans la technologie d'une technique mathématique des savoirs non validés par une théorie, qui, étant directement liés à l'utilisation de la technique, dépendent de l'institution dans laquelle se déroule cette utilisation (désormais notée I_u). Cette composante pratique θ^p pourrait également être qualifiée d'*empirique* en reprenant l'usage que font Marianna Bosch et Josep Gascón (2002) de cet adjectif pour qualifier la praxéologie didactique du professeur « existant dans une institution concrète et un moment historique déterminé, avec des caractéristiques et des limitations particulières » (p. 24). θ^p est porteuse d'une généricité spécifique de I_u. C'est bien d'ailleurs ainsi que certains proposent de considérer mon travail du point de vue de la TAD : θ^p est une production didactique qui n'a de raison d'être que dans une perspective d'enseignement. Dans la section suivante, nous verrons comment l'utilisation d'une technique mathématique par une science appliquée comme l'automatisme donne lieu au développement d'une technologie prenant en compte les conditions spécifiques du domaine. Faut-il considérer que de tels savoirs institutionnellement indexés ne relèvent pas du modèle proposé par la notion d'organisation mathématique ? Une OM serait en quelque sorte une épure praxéologique, libre de toute spécificité contextuelle et donc à la fois défonctionnalisée et disponible pour toute refonctionnalisation dans des contextes variés. Ce point de vue correspond bien à un état du savoir mathématique académique, produit par un processus qu'il est intéressant de prendre en compte. Je l'admettrai en utilisant l'expression *praxéologies mathématiques* – et non OM – pour désigner les développements fonctionnels auxquels donnent lieu les utilisations institutionnelles des OM, ce qui de mon point de vue fournit un cadre de travail riche de potentialités pour *l'étude des processus transpositifs*. Ainsi c'est un type de tâches didactique que de développer la praxéologie mathématique issue d'une OM au programme, en l'enrichissant des savoirs pratiques qui vont en favoriser l'utilisation par les élèves. C'est aussi une dimension de la recherche en mathématiques que de créer les conditions d'usages efficaces pour des questions nouvelles d'une OM récemment mise à disposition. Si des ingénieurs s'emparent de la même OM, ils ne produiront pas la même praxéologie, singulièrement pas la même technologie pratique, ce que nous illustrerons maintenant.

1.3. Analyse d'une technologie de la technique de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants par transformation de Laplace

Le cours dont j'extrais quelques éléments est intitulé « Asservissements continus »[2]. Publié en ligne par Michel Verbreken (2005), il est destiné à des étudiants d'IUT (institut universitaire de technologie, formant en deux ans des techniciens supérieurs). La praxéologie dont il est question est une praxéologie mathématique ; elle est présentée dans le cadre d'un enseignement d'automatique. L'automatique (I_{AU}), domaine scientifique orienté vers les applications dans le monde industriel, utilise des praxéologies mathématiques, qui subissent donc ainsi un premier effet transpositif. Mais I_{AU} produit elle-même des praxéologies qui, à leur tour, sont utilisées dans des domaines de recherche plus spécialisés (comme par exemple l'électricité et la mécanique) et dans les mondes industriels. Les praxéologies mathématiques poursuivent donc leur parcours transpositif. Celui-ci se prolonge à des fins didactiques dans les institutions de formation de techniciens et d'ingénieurs.

Pour comprendre ce qui suit, quelques éléments concernant les types de tâches traités par l'automatique sont nécessaires. J'emprunte ces explications à l'auteur du cours analysé :

> Notre problème est donc d'asservir une grandeur physique $y(t)$ [ce qui] consiste à essayer d'obtenir $y(t) = y_e(t)$ où $y_e(t)$ représente la loi de consigne qu'on s'est fixée. […] Avant de pouvoir asservir $y(t)$, il faut pouvoir agir sur $y(t)$ par modification d'une grandeur de commande $x(t)$. […] $y(t)$ ne dépend pas seulement de $x(t)$ mais est aussi sensible à d'autres grandeurs qui varient de façon imprévisible et qu'on appelle perturbations. […] Quand une perturbation se manifeste, il faudra réagir sur la commande pour rétablir $y(t)$ à sa valeur consigne. Ceci ne peut être obtenu que par une boucle fermée. (pp. 2-3)

2. Dans sa thèse, A. Romo Vázquez (2009) propose une étude comparée de plusieurs textes de cours centrés sur la transformation de Laplace, dont celui qui est analysé ici. Le point sur lequel je me focalise n'est pas regardé en détails dans son travail. Cependant, je lui suis largement redevable des avancées présentées dans ce texte.

La commande en boucle fermée suppose qu'un capteur transforme $y(t)$ en une nouvelle grandeur dont les variations doivent enclencher le processus de correction. Il est impératif que le capteur soit fiable (pas de distorsion par rapport aux variations de y) et véloce, c'est-à-dire qu'il rende le plus rapidement possible compte de l'évolution de y.

Je me propose maintenant de donner une idée du discours technologique présenté dans le cours analysé, relativement à la technique de résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace, cela à l'intention de lecteurs dont je suppose qu'ils ne sont familiers ni avec le contexte de l'automatique ni avec la théorie mathématique impliquée. Ceci me conduit à modifier l'organisation originelle du texte et à compléter le discours explicatif.

1.3.1. À propos de la constante de temps

Les éléments suivants relèvent du chapitre 2 « Réponse temporelle des systèmes linéaires » :

> Les systèmes considérés sont tels qu'une relation différentielle lie les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$. Lorsqu'il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, celle-ci est présentée sous la forme $\tau \cdot dy(t)/dt + y(t) = A \cdot x(t)$ et τ est appelée constante de temps. Si la fonction d'entrée passe d'une valeur constante à une autre, c'est-à-dire vaut $a \cdot u(t)$ ($u(t) = 0$ pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$), la fonction de sortie, $y_{\text{ind}}(t)$, est $y_{\text{ind}}(t) = aA(1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$. Il faut un temps estimé à 7τ pour que la fonction de sortie soit elle-même stabilisée. Lorsque le système en question est le capteur contrôlant la grandeur asservie $y(t)$ envisagée plus haut, 7τ est le temps nécessaire à une prise en compte fidèle d'une variation de y. Cette affirmation est validée par la résolution d'une équation $e^{-t_\alpha/\tau} = \alpha/100$ (à partir de 1 %, l'écart avec la valeur limite est négligé).

Plus loin une partie est consacrée au cas où la fonction $x(t)$ est une fonction linéaire at (rampe). Dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, il est montré que la solution $y(t)$ présente, une fois établi le régime permanent, un décalage par rapport à la fonction $x(t)$:

> L'erreur de traînage [c'est-à-dire la différence $x(t) - y(t)$] est proportionnelle à la constante de temps du système. Ainsi, si le système du premier

> ordre est un capteur dont la précision statique est supposée excellente, la mesure d'une grandeur qui varie en forme de rampe peut être erronée si la constante de temps du capteur n'est pas négligeable. Pour une régulation la constante de temps du capteur n'a pas d'importance capitale. Par contre pour un asservissement où la consigne varie en permanence, il faut que la constante de temps du capteur soit négligeable. (pp. 26-27)

Ces éléments justifient l'intérêt accordé à la constante de temps : elle doit être la plus petite possible pour obtenir une réactivité suffisante et limiter l'effet retard (*motiver*) ; elle est le paramètre décisif parce que l'erreur de traînage lui est proportionnelle (*valider-expliquer*).

1.3.2. À propos de la résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Les extraits examinés se situent dans le chapitre 1 : « Transformation de Laplace. Relation Équation Différentielle-Fonction de transfert » :

> Les éléments suivants devraient suffire pour comprendre ce qui est en jeu : la transformation de Laplace est une application linéaire injective définie sur un ensemble, que je ne spécifierai pas, de fonctions d'une variable réelle ; sa propriété fondamentale est que si $F(p)$ est la transformée d'une fonction f, la différence $pF(p) - f(0)$ est celle de la dérivée f'. Cela a pour conséquence que par application de la transformation de Laplace, une équation différentielle à coefficients constants
>
> $$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0$$
>
> y est, si toutes les conditions initiales sont nulles, transformée en l'équation algébrique suivante :
>
> $$b_n p^n Y + b_{n-1} p^{n-1} Y + \cdots + b_1 pY + b_0 Y = a_m p^m X + a_{m-1} p^{m-1} X + \cdots + a_1 pX + a_0 X,$$
>
> où Y et X désignent les transformées des fonctions x et y. Y étant donnée par la formule $Y = T(p)\cdot X$ où $T(p)$, qu'on appelle fonction de transfert, est un rapport de deux polynômes en p, la résolution de l'équation différentielle suppose de déterminer la fonction dont $T(p)\cdot X$ est la transformée de Laplace. Ce type de tâches est traité dans une partie intitulée « Transformation inverse » :
>
> Trois méthodes s'offrent à nous, mais seulement la dernière sera exploitée.

> […] 1.8.3. Table de transformées de Laplace
> C'est grâce à cette table que nous pourrons exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs. Cette table est présentée à la page suivante. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Évitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique (*évaluer, faciliter*).
> Pour les fonctions $F(p)$ [la fonction dont on cherche l'inverse] compliquées il faudra faire une décomposition de cette fonction en une somme d'éléments simples puis prendre l'originale de chaque élément afin d'en faire à nouveau la somme (*décrire*).
> Il est préférable d'exprimer une exponentielle en faisant apparaître la valeur de la constante de temps τ plutôt que son inverse a (*évaluer, faciliter*). En effet nous montrerons au chapitre suivant que la durée de vie de cette exponentielle est égale à 7 fois τ (*motiver*). Ceci nous oblige à mettre $F(p)$ sous une forme canonique en mettant toutes les constantes en facteur (*décrire, faciliter*). Par exemple, on transformera $(3p + 2)$ en $2(1 + 1{,}5p)$, la valeur 1,5 représente alors la constante de temps (1,5 s) de l'exponentielle qui interviendra dans la fonction $f(t)$. Ainsi on sait qu'au bout de 7 fois 1,5 soit à peu près 10 secondes, l'exponentielle sera nulle (*motiver*). (p. 15)

La dernière partie du chapitre suivant propose une *description* synthétique de la technique, *motivée* par l'interprétation de la constante de temps :

> Nous avons montré que la réponse temporelle d'un système quelconque peut être considérée comme la somme de réponses de systèmes élémentaires […]. Donc c'est la constante de temps la plus grande qui détermine la durée totale du régime transitoire : $t_\infty = 7\tau_{max}$ […] Il faut prendre l'habitude d'écrire une fonction de transfert sous forme canonique factorisée et ordonnée, de façon à mettre en évidence en première position au dénominateur le facteur $1 + \tau_{max}\,p$. (p. 27)

L'influence de l'institution d'utilisation sur la praxéologie mathématique apparaît clairement dans cet exemple. La technique mathématique est modifiée (et donc également sa description) par rapport à la technique initiale, telle qu'on peut la trouver exposée dans un cours de mathématiques pour ingénieurs où, dans la décomposition en éléments simples, les dénominateurs sont de la forme $(p - p_i)^k$. Les adaptations proposées augmentent l'ergonomie de la technique compte tenu des besoins spécifiques du contexte d'utilisation, ces motivations sont explicitées dans le texte du cours en ligne, dont une des caractéristiques est précisément le souci constant de motiver les praxéologies présentées et d'en faciliter l'utilisation.

2. Un modèle praxéologique élargi

Comme cela a déjà été remarqué dans ce qui précède, la conception de la technologie que j'ai présentée conduit à prendre en compte des savoirs non validés par une théorie. Plus généralement le point de vue d'une épistémologie de la cognition institutionnelle évoquée en introduction me conduit à proposer une nouvelle modélisation. Une fois celle-ci définie dans la section 2.1, je donnerai une idée de ce qui fait à mes yeux son intérêt dans la section 2.2.

2.1. Présentation du modèle

Il s'agit de faire explicitement apparaître à la fois les différentes formes de ressources praxéologiques socialement produites, les institutions qui ont à faire avec la praxéologie *P* considérée et les processus de validation et plus largement d'institutionnalisation de *P* réalisés dans et par ces institutions.

$$\boldsymbol{I} \rightarrow \left[T,\ \tau,\ \begin{matrix} \theta^{\mathrm{sc}}, \Theta \\ \theta^{\mathrm{p}} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow \boldsymbol{I}r \\ \leftarrow \boldsymbol{I}u \end{matrix}$$

Figure 1. Modèle praxéologique élargi

On reconnaît au centre une schématisation d'une praxéologie avec un bloc pratico-technique et un bloc technologico-théorique clivé en deux niveaux déterminés par le mode de validation des savoirs impliqués, validations de natures différentes, associées à des institutions de fonctions sociales différentes, ayant des rapports différents à *P*.

I_u désigne des institutions utilisatrices de la praxéologie, c'est-à-dire dans lesquelles le traitement de tâches du type *T* relève de la fonction institutionnelle de certains sujets ; dans ces institutions ont lieu des processus de productions praxéologiques, notamment de validation (figurés par la flèche associée à I_u), mais ceux-ci ne sont pas détachés de l'action : ils répondent à des finalités directement liées à la pratique et sont de nature empirique. La composante θ^p de la technologie prend en charge les savoirs explicites ainsi produits, c'est *la composante pratique ou empirique* de la technologie.

I_r désigne des institutions de recherche dont la fonction sociale est de produire et valider des praxéologies et singulièrement des savoirs. Il m'est arrivé de les nommer « institutions théoriciennes » en référence à la racine étymologique *theoros* car une première caractéristique de ces institutions est d'être relativement à T en dehors de l'action. La fonction des sujets des I_r n'est pas de traiter les tâches de type T mais de produire et valider des moyens de les traiter, ils sont donc en position de chercheurs. Le rapport temporel à T étant différent de ce qu'il est dans I_u permet dans I_r une organisation méthodique de la validation, ce qui me conduit à nommer *composante scientifique* la composante technologique produite dans ces institutions, notée θ^{sc}. Une partie de θ^{sc} est produite et justifiée à partir d'une théorie scientifique et coïncide donc avec la *composante théorique* θ^{th} (Castela, 2008). Mais en dehors des mathématiques, d'autres processus de validation sont reconnus dans les institutions scientifiques : ainsi en résistance des matériaux, de très nombreuses formules en jeu dans le bâtiment résultent de processus de modélisation-vérification expérimentale en laboratoire. Il doit être envisagé comme possible que la place de la théorie soit vide alors qu'il existe une composante θ^{sc}, ou pour le moins que la théorie existante ne suffise pas à valider θ^{sc}. La question de la nature de la composante théorique des praxéologies a été soulevée pendant le congrès. C'est à mes yeux une question qui reste à travailler : certains éléments qu'une conception très large intègre à la théorie me semblent relever plutôt de niveaux de détermination supérieurs, en commençant par celui de la discipline et des paradigmes qui régissent son épistémologie ; dans le modèle que je propose, ils sont pris en charge par $\leftarrow I_r$ et $\leftarrow I_u$.

La flèche qui lie I_r et la praxéologie, singulièrement son bloc technologico-théorique scientifique, manifeste que dans tous les cas, même s'il existe une théorie, la validation a une dimension institutionnelle, qui ne dérive pas du seul savoir. Les modes de validation eux-mêmes ne peuvent être reconnus comme validant que depuis une instance qui les dépasse. Si un savoir technologique peut être validé par une théorie, cette théorie elle-même est l'objet d'un processus institutionnel de validation : du point de vue interne au champ théorique (est-elle cohérente ?) et d'un point de vue externe, dans le domaine scientifique (les prédictions qu'elle produit sont-elles vérifiées ?) et au-delà dans tous les domaines d'utilisation (est-elle productive de progrès techniques ?). L'intérêt d'expliciter cette dimension est qu'elle permet d'introduire la notion de paradigme dans le modèle et d'envisager que des institutions différentes puissent accepter des théories différentes.

Enfin la partie gauche du schéma explicite le fait que le développement praxéologique est initié par l'existence d'un besoin institutionnel.

2.2. Défense de la proposition

Je tenterai maintenant l'exercice difficile de donner en peu de lignes une idée du potentiel de ce modèle praxéologique élargi au-delà des deux cas envisagés dans la partie I auquel il est évidemment adapté : dans le premier, I_u est une institution dont les sujets, mathématiciens ou élèves, utilisent une technique mathématique pour traiter des questions mathématiques ; dans le second, c'est une institution scientifique, par exemple I_{AU}, ou professionnelle au sein de laquelle les techniques servent dans des situations d'asservissement.

En explicitant la diversité des savoirs suivant leurs modes de validation, cette nouvelle représentation fournit une grille d'analyse du discours technologique relatif à une technique donnée qui conduit à prendre en compte des éléments trop souvent négligés parce que non fondés en théorie. Ainsi peut-on entreprendre de distinguer, dans une revue professionnelle ou dans une formation de professeur, le poids respectif donné à des savoirs empiriques reconnus dans des cercles plus ou moins larges de la profession, à des savoirs scientifiques liés à des théories scientifiques et à ces savoirs intermédiaires, produits par exemple dans les IREM avec des processus de validation qui les distinguent de la stricte empirie.

Ce modèle offre également un cadre pour analyser les processus d'émergence dans lesquels sont produites des techniques relatives à des types de tâches mathématiques qu'aucune théorie mathématique ne permet de valider, ce que Maggy Schneider (2007) nomme des praxéologies de modélisation : quelle est la technologie produite, sur quelles bases et par quelle institution est-elle validée ? Ce questionnement est particulièrement intéressant dans le cas où ces praxéologies sont développées en dehors des institutions de recherche en mathématiques. Ainsi Oliver Heaviside (1880-1887), chercheur en physique, introduit-il le calcul symbolique pour résoudre des équations différentielles ; il le valide par induction en comparant les solutions symboliques avec les solutions explicites connues et déterminées par des méthodes classiques de résolution. Il faudra attendre la fin des années trente pour que l'emploi du calcul symbolique soit justifié du point de vue des mathématiques, à partir des intégrales de Carson et de Laplace. Des praxéologies mathématiques que l'on peut qualifier d'incomplètes puisque non fondées par des théories reconnues par I_M (institution de recherche en mathématiques) peuvent donc vivre dans d'autres institutions scientifiques, soutenues par une technologie non théorique ou par une théorie non légitime du point de vue de I_M. L'enseignement de ces praxéologies, aujourd'hui mathématiquement complètes, dans le cadre de la formation de techniciens et d'ingénieurs (Romo Vázquez, 2009), amène à s'intéresser aux technologies élaborées par les institutions utilisatrices : en effet, l'enseignement de la théorie mathématique justificatrice est parfois très lourd et on peut dans certains contextes être tenté de s'en passer. Il s'agit alors d'affronter, dans le cas complexe où plusieurs institutions sont impliquées dans le processus de production de la praxéologie originale, qu'il faut transposer pour l'enseigner, la question plus générale du renouvellement à des fins didactiques du bloc $\theta^{sc} \leftarrow \Theta$ reconnu par I_M.

Des réponses diverses sont apportées à cette question. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie en France et au Chili par C. Castela et al. (2006) montre par exemple que, dans le domaine de la géométrie, les deux pays ont adopté deux options très différentes. En France, dès les premières années du collège, il est choisi de faire entrer les élèves dans le paradigme de la science mathématique, c'est-à-dire de reconnaître la seule démonstration comme moyen de validation. Dans le cas où un théorème ne peut pas être établi à partir du corpus des résultats disponibles, ce théorème est déclaré admis, statut figurant explicitement dans les instructions. On peut dire que dans ce cas l'incomplétude de la praxéologie est assumée, la théorie manque, c'est l'invocation de la garantie experte qui s'y substitue. Si des validations locales ou expérimentales par mesures sur dessins sont proposées, elles expliquent mais ne valident pas. Au Chili, l'approche est autre. Tout au long de la scolarité obligatoire (jusqu'à 18 ans), y compris quand, en *segundo medio* (10^{e} année de scolarité), la démonstration commence à apparaître comme objectif d'apprentissage, des modalités expérimentales de validation sont acceptées, sans jamais être mises totalement à l'écart ; le raisonnement est seulement peu à peu présenté comme préférable ; le statut de théorème admis n'existe pas. Le niveau théorique est occupé mais il ne fonctionne pas selon le paradigme des mathématiques académiques. Pourtant les déclarations d'intentions officielles dans les deux pays sont semblables. Quel jeu de déterminations fait-il qu'au Chili puisse être institutionnellement validé pour l'enseignement un paradigme mathématique mixte ? Puisque la transposition didactique substitue au bloc $\theta^{sc} \leftarrow \Theta$, validé par la communauté experte I_M, un bloc θ^{*sc} **-** Θ^* basé sur un paradigme différent, dans quelle institution noosphérienne concrète I_r^* ce bloc a-t-il été légitimé ? Quels processus historiques peuvent-ils expliquer que la double détermination de I_r^* par la communauté savante I_M et par l'École, institution utilisatrice, aient des effets si différents dans ces deux pays ?

L'élargissement du modèle praxéologique aux institutions et aux processus de validation attire l'attention sur de telles questions relatives aux processus transpositifs accompagnant la circulation inter-institutionnelle des praxéologies. Parce que, comme d'autres, les schémas m'aident à penser, j'en proposerai la représentation suivante où le symbole * exprime l'existence d'une transposition de la praxéologie initiale :

$$\left[T^*, \tau^*, \begin{matrix} \theta^{*sc}, \Theta^* \\ \theta^{p} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \longleftarrow I_r^* \\ \longleftarrow I_u \end{matrix} \begin{matrix} \swarrow I_M \\ \nwarrow I_u \end{matrix}$$

Figure 2. Praxéologie mathématique transposée

Ce schéma est selon moi porteur d'incitations à introduire des problématiques de recherche concernant l'histoire des curriculums telles qu'évoquées ci-dessus à propos du Chili mais aussi l'écologie de certaines réformes cherchant à substituer au bloc technologico-théorique validé par I_M un nouveau bloc fonctionnant selon un paradigme différent : dans quelle institution, à partir de quels critères de légitimation, le nouveau bloc peut-il être reconnu ? Quel rôle une institution de recherche en didactique des mathématiques peut-elle jouer dans le processus ?

3. Conclusion : Prendre en compte la contribution praxéologique des sujets

J'espère avoir montré dans ce texte que le modèle praxéologique élargi est de nature à mieux prendre en compte dans le cadre de la TAD, d'une part la diversité des savoirs socialement produits à propos des techniques disponibles, dans les phases d'émergence d'abord, d'utilisations institutionnelles ensuite, et d'autre part, les processus multi-institutionnels d'institutionnalisation des praxéologies. Je voudrais pour terminer montrer pourquoi ce modèle contribue à la prise en compte des sujets dans la TAD qu'Alain Mercier avait appelée de ses vœux au congrès d'Uzès (2007). Il faut pour cela mettre à jour la réalité institutionnelle cachée sous les symbolismes I_r et surtout I_u. Les processus d'élaboration praxéologique et de validation se déroulent dans une chaîne d'institutions emboîtées et selon une chronologie qu'il faut envisager a priori comme complexe. Je vais ainsi postuler qu'au sein d'une institution utilisatrice I_u, les sujets peuvent localement constituer des communautés de pratiques (Wenger, 1998) stables, identifiables dans certains cas à des institutions en ce sens qu'elles ressourcent et encadrent le travail que leurs membres réalisent. Ces communautés inscrivent leur travail dans le cadre déterminé par la praxéologie instituée dans et par I_u, elles en respectent a priori les normes et profitent des ressources qu'elle met à leur disposition. En particulier, les sujets n'ont pas à reprendre le processus de validation, c'est une question réglée par I_u qui est garante de la praxéologie. Mais ces communautés sont en même temps le lieu privilégié du développement du niveau pratique et empirique des praxéologies, pour utiliser au mieux les marges de manœuvre laissées par les normes en temps ordinaire, pour affronter les désajustements de la technique instituée aux conditions effectives de travail lorsque celles-ci évoluent. Ainsi l'introduction du niveau empirique permet de prendre en compte dans la théorie la contribution, non pas des sujets individuels, mais des communautés de sujets de I_u, au développement des institutions praxéologiques.

Références

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. Théories & empiries. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 23-40). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Relime 9*(1), 83-102.

Castela, C. (2007). Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 117-138). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Castela, C., Consigliere, L., Guzman, I., Houdement, C., Kuzniak, A. & Rauscher, J.-C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. *Cahier de Didirem Spécial n^o^ 6*. Paris : IREM de Paris 7.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XI[e] école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 705-746). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Dorier, J.-L. (Éd.). (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Romo Vázquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs* (Thèse de doctorat), Université de Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285/en/

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL : Academic Press.

Wenger, E. (1998). *Community of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press.

Verbeken, M. (2005). *Cours d'automatique. Les asservissements continus*. http://public.iutenligne.net/automatique/verbeken/CoursAU_MV/general/cours.pdf

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? Dans J. Trgalová, G. Aldon, G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Ressources pour l'enseignement des mathématiques : conception, usage, partage* (pp. 21-36). http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/BR062.pdf

Museographic transposition: Discussing scholarly knowledge of biodiversity in the organisation of museum exhibitions

Adriano Dias de Oliveira and Martha Marandino
Faculty of Education, University of São Paulo, Brazil

Résumé. Cet article aborde l'étude de questions actuellement à l'ordre du jour concernant les caractéristiques du savoir savant relatif à la biodiversité mis en jeu dans l'organisation d'expositions dans les musées de sciences. Nous présentons brièvement les aspects pertinents de la polysémie du concept de biodiversité et la manière dont, du point de vue historique, la diversité de la vie est donnée à voir dans les musées, notamment par des dioramas, regardés comme dispositifs d'exposition jouant un rôle éducatif important. Nous abordons aussi certains aspects liés aux processus de transposition muséographique et à une analyse praxéologique des dioramas.

Resumen. Este artículo tiene como objetivo abordar los cuestionamientos actuales sobre la caracterización del saber sabio relacionado con el concepto de biodiversidad en la organización de exposiciones en museos de ciencias. Presentamos brevemente los aspectos pertinentes de la polisemia del concepto de biodiversidad y de la manera en que, desde el punto de vista histórico, la diversidad de la vida viene siendo expuesta en museos, en especial por dioramas, considerados como aparatos expositivos con un papel educativo significativo. Abordamos también aspectos relacionados con los procesos de transposición museográfica y un análisis praxeológico de los dioramas.

Abstract. The aim of this article is to address present issues concerning the characteristics of scholarly knowledge related to the concept of biodiversity in the organisation of science museum exhibitions. We show that themes such as biodiversity challenge the unambiguity of scholarly knowledge by unveiling its heterogeneity—a heterogeneity that is in its turn influenced by both scientific and social aspects. We briefly present the polysemy of the concept of biodiversity and how, from a historical point of view, the diversity of life has been exhibited in museums especially by using dioramas, which are considered educational display devices. We will also address aspects relating to processes of museographic transposition and a praxeological analysis of dioramas.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 187-202)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Method

We studied dioramas in two museums: the Natural History Museum of Capão da Imbuia (Paraná, Brazil) and the Museum of Sciences and Technology of the Catholic Pontifical University of Rio Grande do Sul. We carried out a qualitative survey in which data were collected from semi-structured interviews with scientists who study biodiversity and from the analysis of extracts from books and manuals that treat the theme of biodiversity. Here, the aim was to map the scholarly knowledge on biodiversity. We also interviewed exhibition staff at each museum we studied to collect information on the production process of dioramas. Finally, we studied the dioramas in the two museums and analysed the official documents of the institutions. The categories for analysis were constructed from the collected data on the basis of theoretical considerations of biodiversity and the theory of museographic transposition.

The main focus of this article is the status of scholarly knowledge. Therefore, from the data collected in our investigative universe we will focus only on the interviews conducted with scientists that study biodiversity and books and manuals that define the concept. The texts chosen are widely used in academia—they are scientific and also for dissemination. Our research of these materials shows that when authors define biodiversity they often characterise its structure in organisational levels, and discuss which values may be assigned to the concept when addressing it. These aspects were used as a guide for us to prepare the categories of analysis which are divided into two major axes: biodiversity organisational levels—genetic, species and ecosystem diversity, and biodiversity values—economic, ecological and conservationist values. Three researchers from the Institute of Biosciences of the University of São Paulo, who were chosen from different departments: genetics, ecology and botany, were interviewed. The choice of subjects from different areas of biology was intended to enrich the investigation of how biodiversity is studied and interpreted in the scientific and academic spheres.

Based on the data we produced on how biodiversity is presented and discussed in the scientific and academic fields, we noted peculiarities in what refers to the conception of scholarly knowledge in the theory of didactic transposition.

2. Biodiversity and natural history museums

Due to the long-time and wide use of the term *biodiversity*, it has become imprecise as a concept within the scientific community, in particular in biology. Since its origin, the definition of biodiversity has been a focus of discussion in scientific scope and the term amplified its impact as a result of the Rio Earth Summit held in Brazil in 1992. In that Summit, the "Convention on Biological Diversity" or CBD was ratified and recognised as the first world agreement aimed at a sustainable use of all biodiversity components. In Leonardo Basso Oliveira's opinion (2005), the meeting "represented a dividing of the waters and enabled a widening of the meaning of the term which went on to be used in other social, political, and economic contexts" (p. 43).

Although there is an agreement on the meaning of the term biodiversity, we still do not have a consensus on its use among biologists (Motokane, 2005). Corroborating this idea, Gaston (1996) goes a little bit further, pointing out the unlikelihood of assigning the term a common denominator. Weelie and Walls (2002) are categorical when they say that biodiversity is an ill-defined concept, unable to offer a simple or universally applicable definition of the term. They go on to say that it is not difficult to find scientific, political or symbolic meanings all being used by the same person. Oliveira (2005), in turn, attributes this condition to the wider function the concept has, as there is no consensus in the different contexts in which it is used. In his analysis of the conceptions of biodiversity by teachers from different levels (elementary, secondary, and higher education), it was seen that a teacher's construction of a biodiversity concept is strongly related to the context and the teacher's own references.

The non-conformity in the field of biology mentioned in the works above, together with the popularisation of the term observed following the CBD, demonstrates how wide the concept of biodiversity is, and that it is not exclusive to biology and even less so to science. Although it originated from the concern with environmental changes that arose in the field of biology, we cannot deny the magnitude of the concept in society. However, in determining how precise it is as a concept we can only agree with Gaston (1996), who states that terminology mainly serves as a convenient human construction.

This adoption of concepts by actors outside the scientific context is a recurring event; however working with concepts outside this scope seems to be more and more challenging and at the same time necessary at different educational levels. At present, some concepts such as that of stem cells are being discussed beyond the academic environment namely in schools, in the media and at exhibitions. The word biodiversity was “inflated” and presently goes beyond scientific limits with new meanings being incorporated which in turn have demanded new educational strategies from organisations that intend to use it as a tool of articulation in education for science.

In light of the specific characteristics that the concept of biodiversity assumes in the different contexts where it circulates, we must understand how the changes it undergoes are processed because it is a widely used term both in academia and in communication and in education. In order to map how the concept changes, the aim of this study is to analyse how science and non-formal scientific and educational organisations work with the theme of biodiversity.

Museums, in particular those of natural history, from the beginning established a relationship with the diversity of life on the planet. In addition, also from the beginning, museums have enabled contact between the public and the wealth of their collections and exhibitions. This legacy originated in private collections of noble Europeans in the 16th century. Having no scientific purpose at that time, these collections represented social status for those who owned them. Another value given to them was to be able to appreciate all the richness that God had put on earth to the benefit of mankind. These collections, formed by samples of plants, animals and historical objects, later formed the basis of the famous *Cabinets of Curiosities* whose goal was to exhibit all “things in the world”. The 17th century was marked by great expeditions followed by a significant increase in the collections of animals and plants leading to the construction of buildings intended to house them (Bragança Gil, 1988; Merhoff, 1997). The development of Natural History as a science in the 18th and 19th century led to the construction of various museums around the world with a view to safeguarding life diversity by means of their collections. Up to this moment the collection was also an exhibition—there was no distinction between them.

Natural history museums were virtually the first places to register and document life diversity. Mehrhoff (1997) points out that these places constitute important documents of the diversity that has existed on the planet, as large parts of what we currently know originate here. Further, museums continue to provide new information because they continuously receive new specimens and have species classified in their collections. Mehrhoff further states that the real value of collections lies in the fact that they represent irreplaceable knowledge on life diversity, a document of biodiversity in time and space, and to preserve them will help us to understand the richness of life on earth.

In Mehrhoff's opinion (1997), rather than seeking to promote such understanding, museums should seek with their exhibitions to arouse people's interest in biodiversity. In our opinion, this is the major challenge that is faced today not only by natural history museums but by any museum that proposes to exhibit biodiversity. Museums are structured and organised to combine their needs as research institutions with establishing a space of relationship with the public via exhibitions. This clear intention of the best possible public education brought to museums new professionals and consequently new and different interests in developing exhibitions with themes as comprehensive as that of biodiversity.

An example of how a new scientific trend is reflected in natural history museums in this novel structure is the consolidation which took place in the 20th century of ecology as a scientific procedure. At that time, according to Van Praët (1989), studies relating to a species no longer focused on the organism per se, but on its relation with the environment. In order to exhibit this complexity museums used new resources such as dioramas in order to exhibit to the public a representation of nature, including among other aspects new values such as conservation and biological relations that went beyond the diversity of organisms (Van Praët, 1989). In the present survey, we analysed these objects as important milestones in the change of natural history museums into educational places in which the intention of teaching and divulging biological concepts was materialised.

3. Dioramas: a brief history and its educational potential

The term diorama comes from the Greek with *dia* meaning "through" and *horama* "to see". It emerged in the theatre in the early 1800's when theatre professionals built sceneries with translucent structures in order to create greater realism or include more details into the production. Its migration to museums originated in the need to exhibit a representation of the natural environment to visitors. This need resulted from the increased focus on ecology in the scientific environment as discussed above. However, in order for the diorama to become a viable museum exhibition tool, a convergence of factors that would enable its success was necessary, such as a specialisation of taxidermists and painters geared to the construction of these devices. In short, the emergence of dioramas brought to museums a mixture of professionals with new profiles for a new way of exhibiting in detail the richness of life and complexity of the environments that science was studying.

Since then, dioramas have been widely disseminated in museums and as a result have been attributed different definitions. The literature that seeks to define dioramas likens them to the idea of representation (Lurie, 1983; Shon, 1987; Asensio & Pol, 1996; Ash, 2004; Breslof, 2005). We also point out that for some authors this representation includes the real object, the proper specimen, whereas for others this aspect is not so evident; however, they all underscore the importance of the scale of the objects that are presented in their real size.

Regarding the impact on the public, writers point out that in addition to an environmental representation, dioramas played an important role in reminding the public to preserve nature as well as enabling contact with the environment that perhaps many of these people have never come across (Ash, 2004; Breslof, 2005; Quinn, 2008).

The intention to reach people is a strong indication of use of dioramas as educational objects in museums. In Ash's opinion (2004), the intention to educate people all over the world is the main motivation for the existence of these resources:

> Learners are encouraged by dioramas to observe, point at, seek more information and raise questions. As they start to link their own experiences lived with the artefacts in the dioramas, they can personalize concepts such as conservation of habitats and species. All this through observations, questions, explanations and other processes. (pp. 84-85)

In Ash's opinion, dioramas promote an interactivity of visitors with the scientific aspects involved because according to her the behaviour of an observer is similar to how a naturalist observes a new environment. Quinn (2008) corroborates this view in his comment about the proximity of a diorama with the natural environment and what this may arouse in visitors. In Quinn's (2008) opinion this potential is the result of the exactness with which a diorama represents an environment: "This is possible because dioramas bring more faithful representations than zoos, for example, they re-create the space where organisms are found more precisely" (p. 1).

However, authors like Van Praët (1989) bring up some aspects that put dioramas in another perspective. In his opinion, the ecological conceptions that the public may construct when they observe a diorama are much closer to those of the exhibition developers than those of scientists.

As described earlier, the intention of educating visitors through dioramas is ubiquitous. However, in the present study we observed that although they appear to be static objects, some visitors believe that dioramas are interactive, reinforcing even further their educational role. This characteristic is believed to lie in the potential to transpose and/or "take" the visitor to the natural environment reproduced there. The combination of scientific and artistic knowledge aiming at giving greater relevance to dioramas is also a strong indication that this exhibition form was conceived for educational purposes. The question whether dioramas reflect what science produces, or whether they are only recreations to entertain and educate the public reinforces even further how important they are for museums, and, to us, are a significant indication of the educational intention behind them. From this perspective, it is important to analyse the didactic transposition process of scientific knowledge into the knowledge mediated by museum exhibitions especially in the development of dioramas.

4. Didactic transposition in museums or museographic transposition

In her doctoral dissertation, Marandino (2001) studied the issue of transformation and production of knowledge in non-formal educational spaces such as museums. In continuation of this investigation theme, she has developed other works with the aim of consolidating the idea that these educational spaces have their own epistemology for production of knowledge in the field of education (Marandino, 2004, 2006).

In a literature review informing her study, Marandino (2001) showed that some authors acknowledged the presence of didactic transposition in museums, although none of them analysed the transposition processes to the extent that Yves Chevallard (1991) did in school contexts. Simonneaux and Jacobi (1997), using Chevallard's work, proposed the term museographic transposition in their study of the production of posters at a biotechnology exhibition. Here, the authors conducted a formative evaluation of a biotechnology exhibition and showed that the museographic transposition is a process that involves different elements such as space, language, concepts and texts.

Asensio and Pol (1999) described exhibit transposition as the complex adequacy whereby scientific knowledge continues to be exhibited and received by the public at an exhibition. The authors clearly state that when studying didactic transposition in museums, it is important to take into account the characteristics of these locations because they are distinct from schools.

Marandino (2001) concluded that scientific knowledge is just one of the various types of knowledge involved in the construction of science museum exhibitions. She further states that organising exhibitions is a game of power between the various types of knowledge involved in the production where some are legitimate and others are not.

Another study that addresses transposition of scientific knowledge in museums is that of Sousa et al. (2002). The aim of this research was to investigate the transposition of scientific knowledge for two exhibitions at the Museum of Astronomy and Related Sciences (Museu de Astronomia e Ciências Afins [MAST]). The authors were guided by the following questions: What are the steps in the process of museographic transposition? How do we establish the relationship between knowledge to be mediated and the communicational resources in the process of museographic transposition? The authors recorded how selected concepts were treated in the scientific reference knowledge and also how these concepts were exhibited. In addition, they studied the observations made by families who visited the exhibitions and conducted interviews with them.

In light of the preceding discussion of knowledge transformation in exhibition development, we asked ourselves what led to the belief that dioramas undergo a transposition process. At first, as shown, it was clear that dioramas are used as educational tools in museums. The history of the museums reveals the educational rationale for introducing dioramas in exhibitions: as a way to contextualise the organisms and the environment and facilitate the comprehension of the biological information to the public (Van Praët, 1989).

Using the anthropological theory of the didactic as reference to understand a diorama as an educational tool, one could say that this object has a *didactic organisation*—a praxeology (Chevallard, 2007; Artigue & Winsløw, 2009). In our case, as the diorama is about biodiversity, it is possible to identify parts of its praxeology. As Chevallard (2007) points out:

> A praxeology is essentially made up of two parts, the *praxis* part and the *logos* part. Each part in its turn consists of two components. The *praxis* part is the union of a *type of task* (such as solving quadratic equations, blowing one's nose, composing a fugue) and a *technique*—a way of doing—which purportedly allows one to carry out at least some tasks of the given type—those in the "scope" of the technique. The *logos* part is the union of a whole set of notions and arguments arranged into a more or less rational "discourse" (*logos*), the so-called *technology* of the technique, which is intended to provide justification for the technique. (p. 133)

In the case of biodiversity dioramas seen as praxeologies, one could say that the *praxis* part is composed by a task—to expose the diversity of organisms and environment—and a *technique*—knowledge about animals taxidermy and plants conservation, woodwork, plastic art, painting, how to write a label or a panel. The *logos* part is composed by the rational discourse of biodiversity—which, as we will see, is not homogenous—and the *technology*—the knowledge from the fields of museology and museography, communication, design, arts, which provides justification for the technique.

The production of a diorama is a praxeology, which involves many techniques related to the way the objects are prepared—animal taxidermy, conserved plants, painting of the environment or ecosystem. In fact, there is a distance between the organisms intended for scientific research produced by museums, and the organisms used for design of dioramas since the production of these latter is subject to the influence of exhibition-related constraints, something that does not happen with material intended only for collection.

These aspects mark the complete dissociation between research that is collection-oriented and research with mediational and educational purposes (Van Praët, 1989). Thus, dioramas are kept apart from specific interests of scientific research and closer to those that seem to be more targeted towards public exhibition. However, authors like Quinn (2008) and Ash (2004) are clear when they state that what makes dioramas effective in representing an environment results from information obtained from scientific research. This aspect emphasises the important link with scientific knowledge and at the same time distances the diorama from it because of the educational and dissemination objectives of the exhibitions.

In other words, to create a diorama is to be concerned with both scientific and educational questions—*logos* and *praxis*. This characteristic—the dual focus on educational apprehendability and scientific rigour—located in the development process of a diorama, provides evidence of the existence of a process of transformation of knowledge. A possible conflict of interests may exist regarding what researchers and educators perceive as being more relevant to exhibition. This conflict may in turn ensure something similar to Chevallard's (1991) notion of epistemological vigilance in the development of a diorama. Thus, those actors—researchers and teachers—participate, among others, in the noosphere of the museum exhibition which is regulated by cultural, science and technology and educational policies from state, city or region, the history of the museums and of each institution, and other elements (Marandino, 2001)—all of which represent the levels of didactic determination (Artigue and Winsløw, 2009).

5. Biodiversity in scholarly knowledge

One of the main aspects in the study of didactic transposition is to outline the origin of knowledge—scholarly knowledge. It is important to outline that, as Chevallard (2007) proposes, the knowledge should not be seen as something homogeneous, isotropic or unquestionable. However, many teachers seem to hold this view. Understanding that scholarly knowledge is epistemologically heterogeneous and recognising political, ideological, sociological and cultural influences it receives is a way to demystify this idea.

As we have seen, scholarly knowledge in our research represents the discourse of scientists who work on biodiversity and the books and manuals used in higher education which seek to define this concept. The present survey identified at first that biodiversity is expressed both in conceptual terms as well as in relation to the values attributed to it. Furthermore, we analysed the relationship between what is found in the studied literature and the conceptions of interviewees in relation to both biodiversity concepts and values.

We constructed a categorisation scheme regarding the definition of biodiversity in the books and in the manuals consulted. A common characteristic is present in these works which is that of structuring the concept of biodiversity at the organisation levels: genetic diversity; species diversity; ecosystems diversity. This perspective was also found by Oliveira (2005) in a historical survey of the concept. As a rule, the levels are interlinked and structured hierarchically because they describe different aspects of the life system ranging from the most specific to the most complex level which addresses the relationship between organisms.

The values attributed to biodiversity refer, according to the texts studied, to the reasons that led us to be interested in biodiversity. We have identified that economic, ecological and conservationist values are the most recurring.

In contrast, the opinion of researchers is that the levels of biodiversity are one among many ways of conceptualising biodiversity, or more generally expressing the magnitude of biodiversity rather than a structure more concerned with formal definitions. Another point that was expressed is that definitions do not always show all levels of biodiversity, nor did the interviewees emphasise the hierarchic nature of the term which is common in the literature.

Among the three levels of biodiversity studied, we identified the level of species as the most recurring in the discourse of researchers. However, when they expanded on their ideas and perceptions of what biodiversity is, the other levels were mentioned. In relation to the values of biodiversity analysed in the interviews we found a slight emphasis on economic value. In one of the cases, the interviewee in his discourse associated the economic factor with that of conservation, where the former can trigger people's interest in the maintenance of biodiversity. One of the interviewees regarded cultural, historical, and social aspects as biodiversity values. He presented man as a creating and modifying agent of the diversity we know, outlining the different manners in which man relates to the environment. This aspect indicates how diverse the ways of attributing a value to biodiversity can be.

The effort made to identify how close or how distant what we see in literature with what researchers who study biodiversity say are, with respect to concept and values, results from the need to express how scholarly knowledge is configured.

Since various information sources may be employed for organising an exhibition, we sought to reflect this variety by mapping several of them in order to characterise the nature of scholarly knowledge on biodiversity. Such sources may be scientific articles and academic manuals, reference texts and materials to be divulged, but also oral communications by researchers from research institutes, universities or even museums. The selected sources reinforced the existence of a polysemy of the concept of biodiversity in the reference knowledge. In short, what we are assuming is that the idea of biodiversity is composed of different shades that are influenced by both scientific and social discourse.

The heterogeneity in scholarly knowledge was identified by Chevallard (1997) and other authors with respect to the social and historical construction of this knowledge as well as the influence of social practices in its constitution. According to Caillot (1996), in the school environment scholarly knowledge is not necessarily the only reference knowledge and it can be formed, for example, by social practices that permeate this environment. According to Chevallard,

> in social life, a *question* is raised, in some institution, and persons in that institution try to do something in order to provide an *answer* to that question. The question is not intended to belong to any established field of study—it can be anything relating to any social practice. The answer that is being looked for has the structure of a praxeology, or of a fragment of a praxeology, or is a piece of a praxeological complex.

The non-linearity of scholarly knowledge was emphasised by Marandino et al. (2003) where the authors' goal was to analyse the transposition of scientific knowledge especially with respect to the concepts of days and nights and seasons of the year for two exhibitions at MAST. One of the emergent points was that depending on the concept that was addressed, reference knowledge arises from "various areas of knowledge", which leads us to reflect on what this knowledge is since it does not always correspond to one single field of scientific production. The authors state that "this survey seems to point to how important it is to consider the peculiarities of the various areas of knowledge when seeking the knowledge of reference of certain concepts" (Marandino et al., 2003, p. 181).

Based on our analysis of the distances and proximities between texts that address biodiversity and conceptions of researchers with respect to the theme, we have identified that the aspects present in the scholarly knowledge corroborate what was evidenced in the works that challenge its homogeneity.

In relation to dioramas, our studies indicate that in this production scientific knowledge on biodiversity undergoes transposition processes since the information related to biodiversity in exhibits is not the same as the information contained in scientific collections although it originates from it. The process of creating a diorama produces didactic materials and accordingly, there occurs a process of transposition. Faced with the importance of dioramas in depicting biodiversity, it is appropriate to investigate how the concept has been addressed in these exhibition devices. Future research challenges aim at identifying whether these exhibition devices incorporate the different scientific meanings, if they emphasise some of them or if they present ideas and notions distinct from scholarly knowledge.

References

Asensio, M., & Pol Méndez, E. (1996). ¿Siguen siendo los dioramas una alternativa efectiva de montaje? *Revista de museología, 8*, 11-20.

Artigue, M., & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(1), 47-82.

Ash, D. (2004). How families use questions at dioramas: Ideas for exhibit design. *Curator, 47*(1), 84-100.

Bragança Gil, F. (1988). Museus de ciência. Preparação do futuro, memória do passado. *Revista de cultura científica, 3*, 72-89.

Breslof, L. (2001). Observing Dioramas. *American Museum of Natural History*.
http://www.amnh.org/learn/musings/SP01/ hw2P.htm

Caillot, M. (1996). La théorie de la transposition didactique est-elle transposable ? In C. Raisky & M. Caillot (Eds.), *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs* (pp. 19-35). Brussels: De Boeck.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (2007). Readjusting didactics to a changing epistemology. *European Educational Research Journal, 6*(2), 131-134.

Gaston, K. J. (1996). What is biodiversity? In K. J. Gaston (Ed.), *Biodiversity: A biology of numbers and difference* (pp. 1-9). London: Blackwell.

Lurie, N. O. (1983). *A Special Style: The Milwaukee Public Museum, 1882-1982*. Milwaukee, WI: The Milwaukee Public Museum.

Marandino, M. (2001). *O conhecimento biológico nos museus de ciências: análise do processo de construção do discurso expositivo* (Doctoral dissertation). University of São Paulo, Brazil.

Marandino, M., Valente, M. E., Cazelli, S., Gouvêa, G., Alves, F., & Falcão, D. (2003). Estudo do processo de transposição museográfica em exposição do MAST. In G. Gouvêa, M. Marandino, & M. C. Leal (Eds.). *Educação e Museu: a construção do caráter educativo dos museus de ciências* (pp. 161-184). Rio de Janeiro, Brazil: Access.

Marandino, M. (2004). Transposição ou recontextualização? Sobre a produção de saberes na educação em museus de ciências. *Revista Brasileira de Educação, 26*, 95-108.

Marandino, M. (2006). Éducation et communication dans les bio-expositions des musées de sciences du Brésil. In C. Dufresne-Tassé (Ed.), *Familles, écoliers et personnes âgées au musée. Recherches et perspectives* (pp. 115-126). Paris: Conseil international des musées.

Mehrhoff, L. J. (1997). Museums, Research Collections, and the Biodiversity Challenge. In M. L. Reaka-Kudla, D. E. Wilson, & E. O. Wilson (Eds.), *Biodiversity II: Understanding and protecting our biological resources* (pp. 447-464). Washington, DC: Joseph Henri Press.

Motokane, M. (2005). *Educação e Biodiversidade: elementos do processo de produção de materiais pedagógicos* (Doctoral dissertation). University of São Paulo, Brazil.

Oliveira, L. B. (2005). *As Concepções de Biodiversidade: Do professor-formador ao professor de Biologia em serviço* (Master’s thesis). University of São Paulo, Brazil.

Primarck, R. B. & Rodrigues, E. (2001). *Biologia da Conservação*. Londrina, Brazil: Planta.

Quinn, S. (2008). *History of the Diorama* [Interview]. http://www.amnh.org/exhibitions/dioramas/bison/transcripts/diorama.php

Sousa, G. G., Valente, M. E. A., Cazelli, S., Alves, F., Marandino, M. & Falcão, D. (2002). A study of the process of museographic transformation in two exhibitions at the MAST. In C. Dufresne-Tassé (Ed.), *L'évaluation, recherche appliquée aux multiples usages* (pp. 108-124). Montreal, Canada: Multimondes.

Shon, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco, CA: Fossey Bass.

Simonneaux, L. & Jacobi, D. (1997). Language constraints in producing prefiguration posters for scientific exhibition. *Public Understanding of Science, 6*(4), 383-408.

Van Praët, M. (1989). Contradictions des musées d'histoire naturelle et évolution de leurs expositions. In B. Schiele (Ed.), *Faire Voir, Faire Savoir : la muséologie scientifique au présent* (pp. 25-33). Montreal, Canada: Musée de la civilisation.

Weelie, D. v. & Wals, A. E. J. (2002). Making biodiversity meaningful through environmental education. *International Journal of Science Education, 24*(11), 1143-1156.

Wilson, E. O. (1997). Introduction. In M. L. Reaka-Kudla, D. E. Wilson & E. O. Wilson (Eds.), *Biodiversity II: Understanding and protecting our biological resources* (pp. 1-3). Washington, DC: Joseph Henri Press.

Museographic transposition: Accomplishments and applications

Martha Marandino
University of São Paulo, Brazil

Marianne Mortensen
University of Copenhagen, Denmark

Résumé. L'idée de transposition didactique est d'abord apparue dans les recherches sur l'enseignement scolaire des sciences, mais son utilisation s'avère aussi pertinente dans des contextes d'apprentissage informel tel celui des musées. Au cours de la décennie passée, des chercheurs ont utilisé le cadre de la transposition muséographique pour étudier comment sont créées les expositions dans les musées. Ce cadre s'est progressivement développé dans trois directions qui mettent respectivement l'accent sur l'épistémologie, la sémiotique et la sociologie. Nous passons en revue les travaux existants sur la transposition muséographique pour illustrer ces trois directions et discuter les mérites de chacune d'entre elles.

Resumen. La idea de transposición didáctica surgió inicialmente en el área de la investigación educativa en ciencias, en el contexto escolar; pero tiene también relevancia en contextos de educación informal, como es el caso de los museos. En la década pasada algunos investigadores usaron el marco de la transposición museográfica para estudiar cómo se creaban las exposiciones en los museos. Esta base teórica se ha ido desarrollando gradualmente en tres direcciones, que se centran respectivamente en la epistemología, la semiótica y la sociología. Hacemos aquí una revisión de los trabajos existentes en el área de la transposición museográfica, para ilustrar estas tres direcciones y discutir los méritos de cada una de ellas.

Abstract. The idea of didactic transposition arose in science education research in school contexts, but has relevance also to informal learning contexts such as museums. In the past decade, museum researchers have used the framework of museographic transposition to study how museum exhibitions are created. The framework has gradually developed in three directions which focus on epistemology, semiotics, and sociology, respectively. We review the existing work on museographic transposition to illustrate these three directions and to discuss the merits of each of them.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 203-216)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction: Why study knowledge transformation in museums?

In research on formal science education, the theoretical idea of didactic transposition originally arose as a response to the inability of psychology to adequately address the practical problems of teaching and learning, with as a result the focus on knowledge as the variable of interest in educational systems (Chevallard, 2007). The main thrust of the notion of didactic transposition is that the knowledge developed by scientists in their research undertakings rarely maps exactly onto the design parameters in terms of which practical teaching action has to be planned. As a result, for science to articulate with practice, a deconstruction and reconstruction of the knowledge in question is required (Layton, Jenkins, Macgill & Davey, 1993). Accordingly, knowledge was seen not as having a definite and "true" substance, but as something that is constructed, transformed, and *transposed*. Didactic transposition deals with the trajectory of knowledge in a process of making it teachable, and includes questions such as: Where does the knowledge come from? How, and by whom is it shaped? What is its degree of effectiveness in promoting learning? (Chevallard, 2007).

Questions such as these are relevant also in informal science education contexts such as museums, science centres, zoos, etc. (in the following designated simply as "museums"). Museums define themselves as places of learning (Exploratorium, 2006; Experimentarium, 2002) and just as in formal science education contexts, museums create teaching environments, mainly exhibitions, on the basis of certain bodies of scientific knowledge which they wish to mediate to their visitors. It could even be argued that the didactic transposition that takes place in a museum context is *more critical* than that which takes place in a formal education context because one of the most important products of the transposition in a museum—the exhibition—is usually relatively static while the product of transposition in a school context may be continuously adjusted by the teacher according to the needs of the learners.

Accordingly, we argue that the study of the didactic transposition that takes place in museums is a necessary and worthwhile undertaking if we as researchers are to produce results than can improve teaching practices (i.e., exhibition development practices) in a way that can potentially affect the learning outcomes of these environments. In the following, we review the studies that have applied the notion of didactic transposition to informal education contexts in order to draw out two main lines of research which we feel are fruitful. We then proceed to outline some interesting perspectives of this work.

2. The museum as an educational place

As informal education spaces, museums promote and organise many kinds of activities and events for a diverse audience with the purpose of increasing and improving scientific culture and literacy (Lucas, 1991; Bradburne, 1998; Beetlestone, Johnson, Quin & White, 1998). The educational activities that take place in the museum are characterised by their relationship to *space, time* and *objects* (Van Praët & Poucet, 1992). The exhibition is the primary medium for the educational endeavours of museums and is typically the result of the work of many teams involving professionals from many areas of knowledge (scientists, museologists, educators, communicators, designers, artists, etc.) Through exhibitions, it is possible for visitors to learn concepts, participate in activities, experience moments of fruition, contemplation, leisure; accordingly, it is important to understand that the narrative proposed by them is a fundamental step towards the fulfilment of education and scientific public communication objectives in museums.

The characteristics of exhibitions have been widely studied (Dean, 1994; Davallon, 1999). Davallon (1988) presents the challenges of exhibition development by considering it a process in which representation occurs when the scientific discourse (the source knowledge) is transformed into the vulgarisation discourse (the target knowledge). He analyses this representation process using a semiotic interpretation which considers the *space* in which the vulgarisation occurs. He suggests that the vulgarisation in the production of an exhibition is not merely a translation process, but a transformation one. In this transformation of the source-text into a target-text, another *object* is produced—the exhibition.

Ramos (2004) affirms that exhibiting something is making it viewable by removing it from its original location. He says that displaying an object is *topography violence*, an act of taking the object from its place of use and conferring to it a dimension of spectacle. Exhibiting, to him, is an exercise of relocating the object.

In our work we focus on understanding and analysing this transformation process, both in an epistemological and museographic way, in the production of an exhibition. The concept of didactic transposition and, specifically, museographic transposition, is our primary theoretical tool to study the production of exhibitions in museum.

3. Developing the model of museographic transposition

Despite being known in formal science education contexts since the seventies, the didactic transposition framework was first seen in an informal science education context in the mid-nineties. Early applications of the framework mainly took the form of the acknowledgement of the existence of a knowledge transposition. This was the case, for example, in a study by Allard, Larouche, Lefebvre, Meunier, and Vadeboncoeur (1995) where the authors acknowledged the occurrence of a tacit knowledge transposition in the discourse produced by museum guides, and argued for improving this discourse by making the transposition deliberate and adapting it to the cognitive abilities of the learners in the target group. Allard et al. thus advocated the prescriptive model of transposition shown in figure 1A.

The term *museographic transposition* was coined about a year later by Simonneaux and Jacobi (1997). Just as didactic transposition is the transformation that occurs during the process of creating taught knowledge from scientific knowledge [1], museographic transposition was defined as the transformation of scientific knowledge into knowledge taught in an exhibition (Simonneaux & Jacobi, 1997). The term *museographic* refers to the visual presentation form proper to the museum, i.e., the exhibition, which may consist of a range of objects and three-dimensional models as well as illustrations and text. The authors, however, limited their discussion mainly to the transposition of knowledge as text and the linguistic choices made in this transposition.

1. The term "scientific knowledge" is used here to denote that which Chevallard designates as "savoir savant" (i.e., *scholarly knowledge*).

In their study, Simonneaux and Jacobi (1997) investigated the museographic transposition of an object of knowledge from the field of biotechnology. The point of departure was an object of biotechnological knowledge and its articulation in scientific journals. The "taught knowledge" was the museographic manifestation of this knowledge in a series of exhibition posters consisting of text and photos. The study thus assumes a single transposition process from the reference knowledge in the scientific discourse to the knowledge expressed in the exhibition milieu (figure 1B) but emphasises the importance of avoiding the dogmatisation of knowledge by transposing not only the scientific knowledge itself but also the characteristics of the origin of this knowledge (Astolfi, Darot, Ginsburger-Vogel & Toussaint, 1997). The transposition model implicitly advocated by Simonneaux and Jacobi (1997) (figure 1B) is accordingly one that includes the context and social setting of a given object of knowledge.

The full implication of the term *museographic* transposition was appreciated by Asensio and Pol (1999) when they addressed the complexity of museum exhibitions by discussing the role of objects as mediators of knowledge. Specifically emphasised by these authors was the importance of objects as interpersonal mediators between the people who produced them and the people who contemplate them, an emphasis which marks the first use of semiotics [2] in the body of work regarding museographic transposition.

Asensio and Pol also pointed to the importance of scientific rigor in research collections, and of the adaptation of domain-specific knowledge —not just applying general findings from psychology, but new theoretical contributions and context-specific studies of the real issues of museums and exhibitions, calling attention to the evolution of didactics— an evolution which has accumulated specific knowledge that may guide the use or non-use of certain types of technologies and other contribu-

2. Semiotics is a general theory of signs and symbolism, and is usually subdivided into the branches of pragmatics (the relation of signs to their impact on those who use them), semantics (the relation between signs and the things they refer to), and syntactics (the relation of signs to each other in formal structures) (*Webster's Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language*, 1989).

tions, the avoidance of errors, and the use of certain teaching materials and experiments. According to these authors, this specific didactic knowledge may assist in the adaptation and simplification of complex content, minimising the risk of losing the relationship with the reference discipline or falling into the trap of superficial popularisation.

Marandino (2001) studied the characteristics of the discourses and areas of knowledge that participated in the construction of the expositive discourse in biology exhibits in order to understand what happened to the scientific knowledge when it was exhibited in museums. The theoretical foundation of the research was an articulation of didactic/museographic transposition concepts and the concept of recontextualisation (Bernstein, 1996). Also, the concepts of noosphere (from Chevallard, 1991) and recontextualisation campus (from Bernstein) were used to understand how the actors and the institutions which relate to the areas of science, education, communication and museology participate in the selection and production of the exhibition discourse.

Marandino (2001) studied five museums using observation of the exhibition, interviews with the staff responsible for them and document analysis in a qualitative approach. The data were aligned with the theoretical framework based on the concepts of museographic transposition and recontextualisation and viewed in the light of a review of museum research literature. This process characterised the elements of institutions, areas of knowledge and actors that influenced the production of the expositive discourse.

This analysis showed that, in the process of recontextualisation, the biological discourse was integrated into the logic of the expositive discourse and participated in the negotiation that occurred in the development of the exhibition, bringing with it its histories, its structure, its contents and its procedures. However, beyond this process, other discourses also entered the negotiation game. A selection process took place in which some elements were left out and new approaches were taken into account with different scopes than that of the original discourse. Depending, among other factors, on the conceptual options—political as well as institution-historical—some voices took part in this discourse negotiation more intensely than others, thus imposing their own logic, structure, procedures and contents.

The results showed that the expositive discourse had a similar behaviour to Bernstein's pedagogic discourse, by displacing other forms of discourse based on its own principles and objectives and assuming the characteristics of the "recontextualising" discourse. This means that the expositive discourse had specific characteristics, distinct from the scientific discourse, which resulted from the relationships between time, space and the objects in the museums. Accordingly, the study affirmed that in the process of museographic transposition, the knowledge established specific relations with the elements which behave in a particular way in museum contexts. Also, the knowledge which was selected to be presented in the exhibition passed through a negotiation process (which is epistemological but also political) that involved the professionals, the different areas of knowledge, the history of the museum and of each particular institution and other social actors and institutions from the museum noosphere or recontextualisation campus (figure 1D).

Contemporaneously with the study by Marandino, Gouvêa de Sousa et al. (2002) took up the museographic transposition model from Simonneaux and Jacobi, and, like Asensio and Pol, they added a layer of complexity to the model in their discussion of the logics of discourse and space [3] that governed the transposition process in the production of an exhibition. This work was based in part on the ideas in the field of semiotics from Davallon (1999). According to Gouvêa de Sousa et al., the point of departure for the transposition process was knowledge from science text books, and the logic of discourse governed the selective reduction of this knowledge while the subsequent implementation of the knowledge into the exhibition was controlled by the logic of space. The authors thus emphasised the fact that the transposition process changed not only the structure of the knowledge but also its modality; from being mainly textual, it was reified in space, objects and activities in the exhibition. Further, the authors implicitly acknowledged the presence of

3. The authors include "gesture" as the logic which governs the mediation of knowledge from exhibition to visitor; we do not include this step in our review of the transposition model here.

an intermediate step of transposition, namely an exhibition planning document; however, the implications of the presence of this document for the transposition process were not discussed (figure 1E).

The exhibition planning document was explicitly introduced into the model by Mortensen (2009) who found the *curatorial brief* to be an important intermediate stage in the knowledge transposition that occurs in exhibition development (figure 1F). Mortensen found the curatorial brief to extract and transform a scientific object of knowledge into a description of a didactic environment, a role which in some ways is similar to that of a teaching programme in a formal education context. In both cases, the focus of the document in question is to transform knowledge into suggestions for didactic activities (Astolfi et al., 1997); however, unlike in formal education contexts, in the museum context the authors of the document are often identical to the actors that implement the didactic activities—the exhibition. This continuity of the actors involved in the museographic transposition should arguably ensure a corresponding continuity in the knowledge transposition process from scientific knowledge to implemented exhibition, yet Mortensen found a considerable relaxation of epistemological vigilance in the second stage of transposition. The introduction of an intermediate stage of knowledge transposition, namely that of the curatorial brief, may thus help pinpoint the location and cause of the relaxation of epistemological vigilance in the exhibition development process reported in the literature (Gouvêa de Sousa et al., 2002; Belaën, 2005).

Another development of the model of museographic transposition was the inclusion of the idea of a reference model from research in formal education contexts (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). Earlier uses of the notion of transposition had labelled the knowledge which was the point of departure as the reference *knowledge* (see figure 1), but in the new usage, the reference *model* consisted of an epistemological model of a given body of knowledge, a model which is distinct from the scientific knowledge which was the point of origin for the transposition or indeed from the knowledge present at any step of the transposition (Mortensen, 2009).

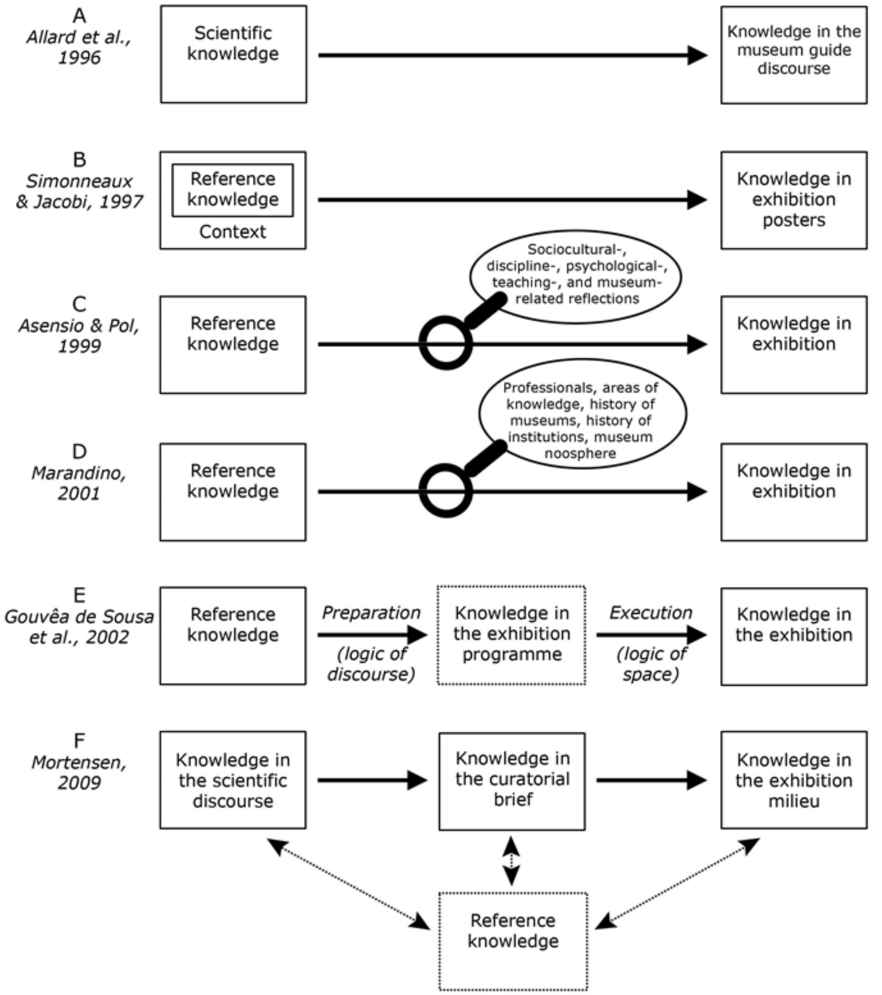


Figure 1. Our conceptualisations of the models of museographic transposition used in research from 1996 to today

The reference model is constructed empirically to encompass, interpret, and analyse the object of knowledge in each of its transpositional stages and modalities and accordingly serves as a broader didactic map (Barbé et al., 2005), thereby removing the focus from the scientific knowledge as the standard to which subsequent stages of transposed knowledge were compared.

In sum, the model of museographic transposition has been gradually developed and it is possible to identify some approaches on the way this framework is been used in the informal education museum context.

4. Three emergent approaches in museographic transposition research

Three approaches emerge from the body of work described above: an *epistemological* approach that emphasises *knowledge* in the various forms it takes in the transposition process; a *semiotic* approach that emphasises the *forms* that the knowledge takes in the transposition process, related to some of the elements that are present in exhibition context such as objects, time and space; and a *sociological* approach, which focuses on the historical, social, political and cultural influences that participate in the production of the exhibition. All three approaches are to some extent present in all the studies on museographic transposition outlined here; however, we found that one of the approaches was usually the main focus as described in the following.

The *epistemological approach* can be identified in the works of Simonneaux and Jacobi (1997), Mortensen (2009) and Gouvêa de Sousa et al. (2000). In these cases, the concept is the central element of the research and studies focus on what happens to the central concept, what other concepts are related to it in the reference knowledge, and what is the difference when it becomes exhibit knowledge. We designate this approach as *epistemological* insofar as it deals with the difference between the network of concepts in the scientific knowledge and the new relationships that are created—another network—in the exhibit. The approach does not ignore the different modalities of knowledge in the transposition process, but rather, it accounts for them by “translating” them into a common modality—as illustrated by the application of the reference model in Mortensen (2009).

The *semiotic approach* is mentioned in the work of Asensio and Pol (1999) and can be identified in the research of Gouvêa de Sousa et al. (2002) and Marandino (2001). This research takes into account the elements from the exhibition—such as objects, time and space—to understand the process of museographic transposition. Here, the working hypothesis is that those elements influence directly the way that the exhibit knowledge will be shown, and, consequently, the way that the selection of the concepts and ideas of the scientific knowledge will happen.

Finally, the *sociological approach* is the perspective assumed by Marandino's (2001) work, as she studies the historical, social and political elements that influence the constitution of the expositive discourse. By analysing the history of the museums and the corresponding changes in the educational objectives, and by considering the influence of the social institutions and their actors on the definition of the role of the museums today, it is possible to identify the increased educational role of those places. Also, considering the history of each institution, their mission and the characteristics of the people who were involved in the production of the exhibitions, it is possible to realise the elements of the museum noosphere. As the perspective of the work of Marandino (2001) tries to understand the way institutions, areas of knowledge and social actors influence the production of the exhibition—what she called a power game—it was necessary to articulate the theory of museographic transposition to the theory of the construction of the pedagogic discourse (Bernstein, 1996). The similitude and distances between the concepts of didactic transposition and noosphere from Chevallard (1991) and recontextualisation and recontextualisation campus, coined by Bernstein, was analysed. The theoretical reference elaborated by these authors helped to study how five science museums deal with the production of the expositive discourse, selecting some discourses from some knowledge areas and taking into account the voice from others. In that game, which is also a social and political one—the scientific knowledge sometimes is central in the determination of the final exhibition discourse, but in other situations it is not powerful enough and can lose space to other discourses—educational, communicational, museographic.

5. Perspectives

The lines of research described may provide fruitful ideas about some of the central didactic questions in informal education contexts such as museums (which are similar to those of formal education contexts such as schools): Where does the knowledge come from? How, and by who was it shaped? What is its degree of effectiveness in promoting learning? The three different approaches present in the research on knowledge transformation in museums centre each on one of these questions; thus, the epistemological approach deals mainly with the question of where does the knowledge come from, the semiotic approach considers the effectiveness and mechanisms of the produced milieu in promoting learning, and the sociological approach focuses on how and by whom the knowledge is shaped in its trajectory towards the exhibition. Each of the three approaches has its own merits, and as is always the case in research, the appropriate approach depends on the specific research question. Regardless of the approach chosen, using the museographic transposition framework to answer questions of an epistemological, semiotic, or sociological nature will contribute to a deeper understanding of the didactics of the informal education field, showing, on the one hand, the behaviour of the *knowledge* in the curatorial process, in the exhibition milieu, and in relation to the public. On the other hand, it could also give valuable information about how the museographic elements participate in the *process* of didactic transposition that occurs in the exhibition production and about the social actors and institutions which constitute the museum noosphere.

References

Allard, M., Larouche, M.-C., Lefebvre, B., Meunier, A. & Vadeboncoeur, G. (1995). La visite au Musée. *Réseau, 27*(4), 14-19.

Asensio, M. & Pol, E. (1999). Nuevos escenarios para la interpretación del patrimonio: El desarrollo de programas públicos. In C. Domínguez, J. Estepa & J. M. Cuenca (Eds.), *El museo. Un espacio para el aprendizaje* (pp. 47-77). Universidad de Huelva.

Astolfi, J.-P., Darot, É., Ginsburger-Vogel, Y. & Toussaint, J. (1997). Transposition didactique. In J.-P. Astolfi, É. Darot, Y. Ginsburger-Vogel & J. Toussaint (Eds.), *Mots-clés de la didactique des sciences. Repères, définitions, bibliographies* (pp. 177-187). Bruxelles : De Boeck.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 235-268.

Beetlestone, J. G., Johnson, C. H., Quin, M., White, H. (1998). The science center movement: Contexts, practice, next challenges. *Public Understanding of Science, 7*, 5-26.

Belaën, F. (2005). L'immersion dans les musées de science : médiation ou séduction ? *Culture & Musées, 5*, 91-110.

Bernstein, B. (1996). *Pedagogy, Symbolic Control and Identity*. London: Taylor and Francis.

Bradburne, J. M. (1998). Dinosaurs and white elephants: the science center in the twenty first century. *Public Understanding of Science*, *7*, 237-253.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Readjusting didactics to a changing epistemology. *European Educational Research Journal, 6*(2), 131-134.

Davallon, J. (1988). Exposition scientifique, espace et ostension. *Expo Media, 16*(3), 5-16.

Davallon, J. (1999). *L'exposition à l'œuvre : stratégies de communication et médiation symbolique*. Paris : L'Harmattan.

Dean, D. (1994). *Museum Exhibition : Theory and Practice*. London: Routledge.

Experimentarium. *Experimentariums mål og politikker*. http://web.archive.org/web/20080220005320/ http://www.experimentarium.dk/presse_corporate/tal_fakta/maal_og_politikker/

Exploratorium. *Exploratorium: more than a museum – a learning laboratory*. http://www.exploratorium.edu/about/InstitutionalBrochure_06.pdf

Gouvêa de Sousa, G., Valente, M. E., Cazelli, S., Alves, F., Marandino, M. & Falcão, D. (2002). A study of the process of museographic transposition in two exhibitions at the MAST (Museu de Astronomia e

Ciências Afins). In C. Dufresne-Tassé (Ed.), *Evaluation: Multipurpose applied research* (pp. 108-124). Québec : Éditions MultiMondes.

Layton, D., Jenkins, E. W., Macgill, S. & Davey, A. (1993). *Inarticulate science?* Driffield, UK: Studies in Education.

Lucas, A. M. (1991). "Info-Tainment" and Informal Sources for Learning Science. *International Journal of Science Education, 13*(5), 495-504.

Marandino, M. (2001). *O conhecimento biológico nos museus de ciências: análise do processo de construção do discurso expositivo* (Doctoral dissertation). University of São Paulo, Brazil.

Mortensen, M. F. (2009). Museographic transposition: The development of a museum exhibit on animal adaptations to darkness. Manuscript submitted for publication.

Simonneaux, L. & Jacobi, D. (1997). Language constraints in producing prefiguration posters for a scientific exhibition. *Public Understanding of Science, 6*, 383-408.

Van Praët, M. & Poucet, M. (1992). Les musées, lieu de contre-éducation et de partenariat avec l'école. *Éducation et pédagogie, 16*, 21-29.

Webster's Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language (1989). New York: Gramercy Books.

Praxeology as a tool for the analysis of a science museum exhibit

Marianne Mortensen
University of Copenhagen, Denmark

Résumé. Dans cet article, je soutiens que la recherche sur la conception d'expositions scientifiques ne saurait produire des résultats réellement utiles que si l'on se réfère à des contenus et des contextes institutionnels spécifiques. En utilisant la notion de praxéologie, je propose l'analyse d'une telle exposition en reconstruisant la praxéologie visée et en la comparant à la praxéologie observée. Cette analyse montre que les visiteurs ne mobilisent pas la technologie visée et met aussi en évidence les niveaux où cette divergence se produit. Nous discutons ensuite la façon dont l'application de la notion de praxéologie peut servir comme outil d'analyse a posteriori, mais aussi a priori, dans la conception d'une exposition.

Resumen. En este trabajo argumento que, para que la investigación en el diseño de exposiciones científicas produzca resultados útiles, debe centrarse en contenidos y contextos específicos. Usando la noción de praxeología, analizo una exposición científica a partir de la reconstrucción de la praxeología prevista y contrastándola con la praxeología observada. Este análisis pone de relieve que la interpretación que tienen los visitantes difiere en varias maneras de la tecnología prevista, mostrando los niveles en los que se produce la divergencia. Se considera entonces cómo la noción de praxeología puede usarse como una herramienta para el análisis a posteriori y también a priori en el diseño de exposiciones científicas.

Abstract. In this paper, I argue that research on the design of science museum exhibits can lead to fruitful results only if we refer to specific contents and contexts. Using the notion of praxeology, I analyse a museum exhibit by elucidating the intended praxeology and by contrasting it with the observed praxeology. This analysis puts to the fore a number of discrepancies between the visitors' interpretation and the intended technology. We then discuss how the notion of praxeology can be used as a tool for a posteriori analysis as well as for a priori analysis in the design of a science museum exhibit.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 217-224)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

Mainstream research pertaining to the design of science museum exhibits contributes mainly to an accumulation of recommendations and guidelines of a very general nature. Although such findings may be instructive, the design principles that may be derived from them are articulated at a level of generality such as to make them practically irrefutable (Moscardo, 1996) and unable to account for the influence of contexts and the emergent nature of outcomes (Robinson, 1998). Yet the phenomena that emerge from the context and its interaction of numerous factors are “precisely what educational research most needs to account for in order to have application to educational practice” (Design-Based Research Collective, 2003, p. 6).

The study of which this paper is a part takes a design-based research approach to exhibit engineering. In this approach, the museum exhibit is considered an embodiment of a specific educational intention on the part of the exhibit engineers (Gouvêa de Sousa et al., 2002). This embodiment—i.e., the exhibit design—may be refined through a systematic investigation of the processes that connect the outcomes of visitors’ exhibit interactions with aspects of the exhibit’s design and thus back to the original conjecture which drives the design (Sandoval, 2004). These processes may be examined as a way to not only improve the designed intervention—the exhibit—but also as a way to pinpoint contextual features that can refine the theoretical conjectures about the underlying learning processes targeted by the design. Thus, rather than testing *that* the intervention works, the question is *how* it works (Sandoval, 2004).

The aim of the present paper is to examine visitor interactions with a single exhibit about insect adaptations to darkness, utilising Chevallard’s notion of praxeology to connect learning outcomes with design aspects. The investigation presented here thus comprises a subset of the design-based research approach described above.

2. Theory

A praxeology is a general model which links the practical dimensions (the *practice*) and the theoretical dimensions (the *theory*) of any commonly occurring human activity (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). The minimal praxeology consists of a type of *task* which is perceived by the learner and accomplished using a corresponding *technique*. The *technology* is the learner's rationale or justification for the chosen *technique*—why does it work, where does its effectiveness come from?—and finally, the *theory* refers to a more abstract set of concepts and arguments arranged into a general discourse which justifies the technology itself. Praxeologies may occur in larger systems in which several *practice* blocks are explained by one *theory* block; a collection of practice blocks that share the same *technology* and *theory* is called a *local organisation* (Barbé et al., 2005).

The praxeology model has recently been used for the analysis and design of teaching interventions in formal science education settings where one of its contributions has been the identification and remediation of disassociations between the *practice* and the *theory* of taught bodies of knowledge, which originated at the curriculum level and precluded students from gaining any deeper understanding of the bodies of knowledge in question (Barbé et al., 2005). The strength of the notion of praxeology is thus its ability to analyse the differences between the characteristics of intended and actually taught bodies of knowledge.

In the present study, I use the notion of praxeology in an analysis of a museum exhibit. I elucidate the *intended praxeology* embodied by a museum exhibit and compare this intended praxeology with the *observed praxeology* of visitors to the exhibit. The emergent patterns of difference between these praxeologies will facilitate an assessment of the exhibit as a means of supporting a specific educational objective among museum visitors. I argue that the approach yields theoretically grounded, empirically validated, and practically applicable principles for improving the alignment of design and educational outcomes.

3. Setting

The studied exhibit is part of the travelling exhibition *Xtremes* which opened in October 2007 at *Experimentarium* in Denmark and in October 2008 at the Royal Belgian Institute of Natural Sciences (RBINS) in Belgium. The general theme of *Xtremes* is animal adaptations to extreme environmental conditions on Earth and it features five clusters: “Heat”, “Cold”, “Aridity”, “Low Oxygen”, and “Darkness”, respectively. The attention here is to a single exhibit, “Cave Expedition”, within the cluster on darkness. Briefly, the exhibit represents a scaled-up reconstruction of the cave beetle’s environment, and the declared intention is for the visitor to experience how the cave beetle is adapted to its environment by interacting with this exhibit playing the role of the cave beetle. The exhibit is described in detail in Mortensen (2009).

4. Procedure

The first step was the theoretical inductive elucidation of the *intended praxeology* embodied by the museum exhibit. A praxeology is defined by its component *task* or *tasks*, and the exhibit *Cave Expedition* consists of a number of different types of *tasks* that may be accomplished using different *techniques* (e.g., interpretive panels to be read, an artificial cave to be navigated, etc.), so that the first observation to be made is that the intended praxeology of the exhibit encompasses more than one *practical* block. Further, the intended education outcome of the exhibit is to enable the visitor to find out, through their experiences, how the cave beetle is adapted to its environment of permanently dark caves. This intended outcome frames the *tasks* and *techniques* embodied by the exhibit, and may thus serve as the unifying *technology* of the exhibit. The second observation that may be made is accordingly that the intended praxeology of the exhibit is a *local* organisation. The *theory* component of such a local organisation may or may not encompass several local organisations; in the present case, the *theory* is located at the level of the entire exhibit cluster “Darkness” and will consequently not be considered further here.

The *tasks* embodied by *Cave Expedition* and their corresponding *techniques* were inductively specified. An excerpt of the intended praxeology of *Cave Expedition* is shown in Table 1.

Task	*Embodied by*	*Technique*	*Technology*
Perceive that cave beetle adaptations include: elongated legs, elongated antennae, reduced eyes, enhanced senses of smell, taste, and touch	Panel 1 text and illustration	Discern variation in beetle features in illustration; read text	Interpret own role to be an analogy of the cave beetle's, interpret own actions to be analogies of those of the cave beetle's, interpret exhibit features to represent characteristics of cave beetle habitat. Thereby experiencing vicariously and understanding that the cave beetle's habitat is characterised by being dark and enclosed; that the beetle navigates using touch, not vision; that there are other cave-dwelling animals in the cave beetle's habitat and that the cave beetle may discern these by touch
Perceive intended visitor role as cave beetle; perceive exhibit as representation of cave beetle habitat	Panel 2 text and external cave structure	Identify instructions on panel 2 as pertaining to cave beetle behaviour ("feel", "smell"), recognise external characteristics of exhibit as cave-like	
Assume role of cave beetle by assuming its adaptations	The internal cave structure and the transition from the outside	Switch sensory modalities from primarily vision to touch and smell (induced by darkness and odour in exhibit)	
Perceive that cave beetle movement is dictated by cave habitat's physical boundaries	The configuration of the passageway inside the cave structure	Use touch to assess boundaries, proceed accordingly	

Table 1. Excerpt of the intended praxeology of the exhibit *Cave Expedition*, expressed in terms of tasks, techniques, and technology

The second step was the construction of an *observed praxeology* based on visitors' interactions with and understandings of the exhibit. An investigation using a combination of methods (observation, think aloud, and open-ended interviews) with 16 respondents provided the basis on which to draw out the exhibit *tasks* perceived by the visitors and their corresponding *techniques* and *technologies*, yielding an *observed praxeology*. Briefly, the transcripts of the think-aloud and the responses to the interview questions were pooled for the analysis. In the first reading of the transcripts, the informants' utterances were categorised as either *technique* or *technology* and their concurrent behaviour and/or location noted. In the subsequent reading, the categorisation was confirmed, and emergent patterns within the two categories were noted. Specifically, the visitors' perceptions of the various *tasks* embodied by the exhibit emerged from this analysis. The data were analysed for both confirming and discrepant situations. An excerpt of the resulting observed praxeology is shown in Table 2.

<table>
<tr><th>Task</th><th>Embodied by</th><th>Technique</th><th>Technology</th></tr>
<tr><td>Perceive text and illustration to pertain to insects, specifically, beetles</td><td>Panel 1 text and illustration</td><td>Read (parts of) text; recognise the illustration as showing beetles</td><td rowspan="5">Interpret own actions to be those of human in a cave, interpret exhibit features to represent characteristics of a cave; thereby experiencing that caves are characterised by being dark and rocky, that navigation is based mainly on touch, not vision, and that caves are inhabited by certain animals.
In some cases, additionally:
Extrapolate own experiences in cave to those of animals inhabiting darkness/caves</td></tr>
<tr><td>Enter exhibit</td><td>Panel 2 text</td><td>Identify instructions on panel 2 as how to enter exhibit</td></tr>
<tr><td>Perceive exhibit as representation of cave habitat</td><td>External and internal cave structure</td><td>Recognise characteristics of exhibit as cave-like</td></tr>
<tr><td>Assume role of human exploring cave</td><td>The internal cave structure and the transition from the outside</td><td>Switch sensory modalities from primarily vision to touch</td></tr>
<tr><td>Perceive that movement is dictated by cave's physical boundaries</td><td>The configuration of the passageway inside the cave structure</td><td>Use touch to assess boundaries, proceed accordingly</td></tr>
</table>

Table 2. Excerpt of the observed praxeology of the exhibit *Cave Expedition*, expressed in terms of tasks, exhibit embodiment, techniques, and technology

5. Preliminary findings

Comparing the theoretically derived intended praxeology with the empirically derived observed praxeology revealed subtle differences at the *task* level that led to a substantial divergence at the *technology* level, namely a failure among the respondents to perceive the intent to put them in the role of a cave beetle. Briefly, instead of interpreting their interactions with the exhibit as those of a cave beetle in a cave, they interpreted them as those of a human in a cave. This divergence between intended and observed praxeologies was found to have a pervasive origin: the exhibit was perceived to embody a human perspective rather than a cave beetle perspective in almost every aspect.

6. Implications of findings

At a basic level, the notion of praxeology as a tool for the analysis of the museum exhibit provides a strong link between informal learning environment design and visitor educational outcome, a link which pinpoints how specific exhibit features lead to specific visitor outcomes and thus potentially provides exhibit engineers with powerful indications of how and why their designed teaching intervention works. In this way, the notion of praxeology functions as a context-specific *post hoc* analytical tool.

7. Perspectives

In addition to the contribution described above, the praxeology-based analysis yields a higher level type of insight into the goodness-of-fit between the original *conjecture* of the exhibit engineers and the design and enactment that follow from it. That is, the analysis says something not only about how and why the teaching intervention achieves its goal, it also says something about the relationship between the intention to teach a certain body of knowledge (here, the adaptations of the blind cave beetle), the use of a certain type of intervention (here, an immersion exhibit), and the enactment of this intervention (here, the visitor learning outcomes). There is not one single museographic form which fits and accommodates every type of knowledge-to-be-taught (Gouvêa de Sousa et al., 2002); but the application of the notion of praxeology presented here has the potential to clarify *which* museographic forms may fit *which* educational intentions and types of knowledge. From this perspective, the application of praxeology presented here may ultimately serve as an *a priori* design tool, helping to fill a current gap in science museum practice.

References

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 235-268.

Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1) 5-8.

Gouvêa de Sousa, G., Valente, M. E., Cazelli, S., Alves, F., Marandino, M. & Falcão, D. (2002). A study of the process of museographic transposition in two exhibitions at the MAST (Museu de Astronomia e Ciências Afins). In C. Dufresne-Tassé (Ed.), *Evaluation: Multi-purpose applied research* (pp. 108-124). Québec: Éditions Multi-Mondes.

Mortensen, M. F. (2009). *Museographic transposition: The development of a museum exhibit on animal adaptations to darkness*. Manuscript submitted for publication.

Moscardo, G. (1996). Mindful visitors: Heritage and tourism. *Annals of Tourism Research, 23*(2), 376-397.

Robinson, V. M. J. (1998). Methodology and the research-practice gap. *Educational Researcher, 27*(1), 17-26.

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist, 39*(4), 213-223.

Science, media and education: The impact of a conflicting relationship in the “teaching knowledge”

Luís Paulo Piassi and Maurício Pietrocola
University of São Paulo, Brazil

Résumé. Dans ce travail, nous étudions certains des problèmes posés par le conflit entre culture des médias et savoirs scolaires. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, en nous appuyant sur la notion de « culture première » proposée par Snyders et en l’articulant à la notion clé de transposition didactique. Nous établissons ainsi des principes curriculaires qui mettent l’accent sur l’intérêt d’une étude scolaire de la science considérée comme l’union de trois sphères − la sphère classique des concepts, lois et phénomènes, la sphère de la production des connaissances scientifiques (étudiées par l’heuristique, l’histoire, l’épistémologie, etc.), et la sphère de la politique de la science, de son financement et des aspects éthiques et culturels qui l’influencent.

Resumen. En este trabajo, estudiamos algunos problemas que plantea el conflicto entre cultura de los media y saberes escolares. Nos situamos en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, apoyándonos en la noción de «cultura primera» propuesta por Snyders, que articulamos con la noción clave de transposición didáctica. Llegamos así a principios curriculares que dan relieve a un estudio escolar más abierto de la ciencia, considerada cómo el conjunto de tres esferas —la esfera clásica de los conceptos, leyes y fenómenos, la esfera de la producción de los saberes científicos (estudiados por la heurística, la historia, la epistemología, etc.), y la esfera de la política científica, de la ética y cultura de la ciencia, y de su financiación.

Abstract. In this work, we study theoretical problems raised by the conflict between the media culture and school knowledge. In the framework of the Anthropological Theory of the Didactic, we draw on the notion of “first culture” advocated by Snyders, combining it with the key notion of didactic transposition. We thus arrive at renewed curricular proposals that emphasise the need for teaching science considered as the union of three spheres—the classical sphere of concepts, laws and phenomena, the sphere of production of scientific knowledge (as studied by heuristics, history, epistemology, etc.), and the sphere of science policies and financing, and of ethics and culture in their relation to science.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 225-239)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

As a human cultural activity, science is generally considered as experts' matter. However, public discussion of science—which includes scientists and nonscientists—pervades all spheres of society, not only through its research results converted into goods, services and regulations, but through the process of media multiple representations about science and its social, economic, cultural and political aspects. This process occurs from childhood through television, the children's publications and teaching materials.

When considering the establishment of school knowledge, Chevallard (1985) showed that a complex process takes place from the spheres where scientific knowledge is produced—the so-called *scholarly knowledge*—until the moment it is effectively conveyed in the classroom—the *knowledge taught*. This process, called *didactic transposition*, reinterprets the scholarly knowledge according to conceptions and interests more or less explicit from different agents that contribute to the formation of school knowledge. An objective manifestation of this process can be noted in the materials, which include not only textbooks, but other materials such as videos, books, maps and diagrams, software and web pages—in short, all those materials produced specifically for educational purposes.

It turns out that, due to sociotechnical changes occurred since the second half of the twentieth century and taken to the limit in current times, scientific knowledge is not addressed to students only through school. Nowadays, the main vehicle for access to scientific knowledge is gradually shifting from school to the media sphere. A student of the early twentieth century had access to science primarily on the school benches. Other spheres of social life such as family and religion rarely conveyed science-derived knowledge. Today, while this contrast is smaller or less efficient [1], these spheres, as well as the school, also lost—in favour of the media— the space they devoted to youth education.

1. Note, for example, that, in Brazil, the largest Catholic country in the world, the recommendations of the Church on contraception are largely ignored by its followers.

Multiple representations of science are conveyed in various media, including the printed and audio-visual mass media (cinema, television, newspapers, internet, comics, video games), the production of science communication in its various formats (books, magazines, documentaries, exhibitions), the disclosure of corporate and institutional material (advertisements, brochures, websites), all competing head-on with the teachers and the teaching materials produced for formal education.

From this observation, we raise two problems, for which we believe the anthropological theory of the didactic can contribute; the first linked to the *affective* character that media sets, the second linked to other *cognitive* and *epistemological* dimensions of knowledge conveyed in the media and their possible relationship with school knowledge:

1. Considering the interest of youth in relation to the attractiveness of TV, internet, advertising, and so on, how can the school become able to challenge the youth's cultural concerns and expectations?
2. Can we consider as *taught knowledge* the information provided by different media? What is their relationship with school knowledge? How is the process of transposition of scholarly knowledge into the knowledge the media convey to young people?

Although both problems are closely related, in this work we hope to start a systematic approach to the first one. The second, which has also been an object of research, will be treated only as a parallel discussion.

2. "First culture" and elaborate culture

The investigation of the relationship between the media and school is not new. Moreover, as Gonnet (2004) claimed, since the nineteenth century's school experiences of the introduction of the media into teaching have already been proposed. Older still is, according to the author, a concern that the media are a threat to the authentic culture: part of the debate between Plato and Socrates revolved around the damage brought by the written word for the depth of oral culture. From the outset, a conflict thus exists between the "new" media and education, based on the fear that the media can bring more harm than good with regard to the transmission of the human cultural heritage.

Several studies on the relationship between media and education, many of which are of empirical nature, are pointed by Mazzarella (2009). A detailed investigation of these aspects will not be given in this paper. What we want to address are the possible mechanisms that schools can adopt to deal with the fact that today, not just the main focus of *interest*, but also the main *source of information* for the young, are located outside its boundaries.

This was brought about by Snyders (1988), who launched a foundation for research on school knowledge with culture as a source of satisfaction and achievements for the youth. According to the author (p. 23), there is a *first culture* brought out of school, spontaneously and without effort, by daily life and the personal inclinations and interests. The cultural elements present in the social environment form a complex system, full of nuances and fragments from various sources. Television, work, media, the environments that young people attend, family relationships, all contribute to the formation of this matrix.

The elements of such first culture provide what Snyders calls “simple joys” (p. 24). The author provides examples of a person having fun in the water at a beach or in a pool, enjoying a moment of leisure, the interest of young people in motorcycles, which represent values such as freedom, life outdoors, and sensuality. These simple joys are, according to Snyders, undeniable sources of legitimate satisfaction, and it is precisely in recognition of the importance of the values they represent that the author will seek a dialectic of continuity and rupture, starting from the first culture, identifying its values, but also its limits: the person who has fun in the pool will probably want to learn to swim, to acquire with the water a more skilled, subtle and profound relationship. Similarly, the rider may want to delve into the technical scope of the mechanics and operation of the bike and in the social sphere of human relations and the codes of group ethics involved in its use. When this happens, people come to seek the guidance of those who are more experienced, who can bring them to a new level of knowledge that enables to enjoy more elaborate satisfactions. These are, according to Snyders, the “ambitious joys”.

The simple joys play the role of "truce", of pleasure and uncompromising moments, therefore, ephemeral. They cannot allow reaching the depth and permanence of the "ambitious joys", linked to what the author calls *elaborate culture* (p. 50). It is through elaborate culture that we see that individual dreams are actually an expression of collective dreams, shared not only by contemporaries, but by humankind. If we place science in this logic, scientific knowledge becomes a key factor in the social, political, cultural and economic changes.

What Snyders says is something we intuitively perceive in the classroom: there seems to be two cultural worlds completely different from each other. The first is the world of young students, with music, fashionable clothes, youth's slang and manners, forms of conquest and dating, parties and all that refers to what we associate with the joy of living. The second world is the world of literacy, of the great works and achievements of art and science of higher social and historical importance—in theory, all that school is bound to offer young people.

This opens a huge gap. Many (stereotyped) students resent the boring meaninglessness of a school that does not relate to the important things of their world. From the standpoint of (stereotyped) teacher, the values of young people are superficial and harmful to human development. There is the view that these elements of youth culture are the product of a mass culture industry, with little expectation of authentic cultural expression, subjected to the interests and the logic of capitalist production. Snyders maintains that there is a misunderstanding in the radicalisation of these points of view. The mutual problems between the two spheres of culture and non-recognition of the legitimacy of each as *valid culture* generate an impasse. Snyders maintains that the learning process starts from "first culture", since the meaning and richness that young students bring have to be the starting point for any job, and will lead the search for deeper issues that life presents. Elaborate culture is not prepared to replace first culture, but to be incorporated in a dialectical process, from the cultural point of view of young people, according to the issues they face.

3. Another perspective to the media culture

What Snyders (p. 233) seeks to avoid a school that says nothing to students, which flees from controversial topics or relativises them, leaving each one with his/her own truth, working only in the area of consensus. Worldly themes *have* to be brought to the classroom and discussed and this can only happen through the cultural elements that students bring to the school context.

Van Dijck (2003) goes a step further and sees the science presented in the media as part of the social construction of science. From this perspective the relationship between the first culture and the elaborate one acquires a different nature and, at the same time, makes it more difficult to define their spheres:

> Looking at our screens today, we can see how scientific knowledge is distributed through the many products that the film and television industries are creating. [...] Instead of narrowing the scope for a small body of specialized scientific publications, we must recognize how the whole apparatus of audiovisual entertainment of the masses is more than just a mediator and is an important area where the construction and constitution of science is negotiated. (pp. 182-183)

The formation of science in an arena of social negotiation can bring meaning to the discussions on processes and products of science in the classroom. This is because such an approach brings a perspective on scientific knowledge as a dynamic process affected not only by a scientific community alone, but by the relationships present in the society network, in the context where this knowledge is produced.

Turney (2005), discussing the question of myth in fictional works, related this to the development of science and ethical boundaries, expressing an important role played by cultural industries in the quests that scientific knowledge raises. For him, fiction stories which have a character of complexity are not always recognised and can “play an important role in the debate about the technologies in real life”. According to him, “such stories may allow lay people to express their feelings, which otherwise would be difficult to articulate but should not be ignored” (p. 98).

Turney is responding to the concern of some scientists for whom the movies and other productions portray science in a distorted way, with the risk of hurting the public image of science, giving a false impression of the meaning of scientific activity. This concern can be seen, for example in Sagan (1996, p. 139) who—as a scientist—identifies in the media the origin of several “myths” that are now part of popular imagination, such as the belief in flying saucers and in extra-terrestrial beings with huge heads and large protruding eyes, originated, he says, “in magazines of sensational fiction of the 20s and 30s”.

Sagan expressed concern with scientific errors displayed on the TV series, cartoons and science fiction movies and series and criticises TV series such as *X-Files* for their mixing of science and pseudoscience, like ufology and parapsychology. About *Star Trek*, he says the series “often ignores the most basic scientific facts” (p. 363). The famous astronomer is also concerned with the distorted image of scientists, usually represented as mad geniuses, unable to measure the consequences of their findings or even as manic evil men, very common in cartoons. He wonders about the absence of the satisfaction that science can provide (p. 361). Thence he concludes that such TV shows represent an educational disservice, inducing young people to a negative view of science, thus removing potential students who could follow a scientific career.

In the same vein, Durant (2005) is also concerned with the simplistic view of scientific knowledge that is conveyed by both television and film history, but also by news and scientific divulgation programs. He identifies in the media, for example, the vision of science as a series of personal achievements of extraordinary individuals. According to him, “the drama of personal discovery attracts writers and producers because they know that personal stories are more interesting to readers and viewers”, which has the effect “that the complex system of social production of knowledge is, intentionally or not, distorted” by these productions (p. 23).

We believe that all these concerns are valid and that the observations made by the authors in relation to the simplistic, misleading and distorted views of science in the way they are conveyed through the media in fact exist. However, the way to deal with them will be addressed, in our view, more in the direction given by Turney. Instead of investing in the shameful and innocuous policy of influencing the directions of cultural production, which has its own logic and laws, Turney (2005, p. 105) follows another line of reasoning, noting that the value of a work as a cultural icon is clear from the fact that it puts on the agenda issues of human relevance, the expression of actual human concerns. The author points out that "contemporary studies on the media let us know that readers, viewers or listeners are actively working to build interpretations of media messages", believing that "it is unlikely that they assimilate, without a critical attitude, the message conveyed in the report related to science" (p. 111).

We believe that school, enriched by the dialectic of continuity and rupture between first culture and elaborate culture, can put the issues at stake in such a way that young people see, discuss, opine and form a critical view. In this context, showing contempt for, or trying to control, fiction or media communication about science makes little sense. Rather, it is precisely in the critical observation of the boundaries of cultural products, as shown by Snyders, that we find the path to cultural satisfaction that elaborate culture can provide.

In this sense, Brousseau's theory of didactic situations (TDS) may have a particularly interesting role. As pointed by Bosch, Chevallard, and Gascón (2006), TDS, instead of the classical proposal to focus on teaching the concepts, starts from significant situations, which are presented as problems from a "human activity situated, performed in a concrete situation" (p. 2). If we believe that the media expressions are representations of cultural views of science about effective social practices, they can be configured as problems to be examined in a critical point of view, in the classroom. The question that arises here is that when we incorporate the media products as problems, we are, at the same time, introducing, in addition to conceptual understanding of the products of science, the process of construction of this knowledge and its social, cultural and political causes. In this sense, it might be interesting to reinterpret the didactic transposition process, in such a way as to extend its reach.

4. The spheres of “teaching knowledge”

A proposal based on the meaning of school knowledge should provide the scientific content in response to cultural expectations of satisfaction, i.e., as an elaborate culture that awakens a passion for knowledge and epistemological curiosity and provides a new vision of reality. This is a discussion that revolves more around *knowledge* than education *methods*. However interesting, playful, efficient they are, methods do not turn knowledge contents into more interesting matters from the standpoint of cultural interest. According to Chevallard (1989, p. 55), “the didactic intention has actually something that transcends it. It cannot be reduced to the intention of teaching the individual. It is in fact a social issue”. The cultural constitution of the knowledge defines, according to Chevallard, its own *teachability*. Thus, as Snyders (1988, p. 13) also believes, it is not by “sweetening” the knowledge with a beautiful song or a superhero movie that we achieve students’ learning, as it only changes the knowledge into an object of consumption bringing ephemeral satisfaction by mimicking the first culture.

Let us make clear here what we mean by “teaching knowledge”. We believe that one cannot understand such knowledge only as the framework of concepts, laws, relations and interpretations of phenomena arising in some area of knowledge—it is something broader. Libâneo (1990, p. 451) proposes that the *systematised knowledge* we understand as teaching knowledge incorporates elements that usually do not appear explicitly in the teaching programs by providing (a) concepts and key terms of science, (b) facts and phenomena of science and everyday activity, (c) fundamental laws that explain the properties and relationships between objects and phenomena of reality, (d) methods of study of science and history of its production, (e) problems within the social practice (the economic, political, social and cultural context of the process of teaching and learning) associated with the matter.

For these items, we find that the first three basically refer to what is commonly understood as the “teaching content” of the science school disciplines. The “study methods of science” and “history of its production”, are rarely more than a few additional words in texts or in the first chapters of textbooks and are rarely taken seriously as curriculum content. Still more rarely do the curricula of these disciplines have anything that could be associated with "problems in the context of social practice". Zanetic (1989, p. 21) incorporates the idea that the curriculum should be configured so as to (a) give your students a mastery of concepts and their mathematical and experimental tools, so that they can use them to solve theoretical problems and situations related to everyday life, (b) make clear the methodologies used by physicists themselves—here a reasonable analysis of the so-called "scientific method" is desired, and (c) show that the development of physics is an integral part of social history, a product of social life and thus dependent on a huge range of factors and interests that are changing depending on the time when certain theories and assumptions about the world were developed.

From the confluence of these two ways of looking at "teaching knowledge", and taking into account the specific content of science education, we propose a systematic categorisation of knowledge into three different levels or spheres, according to its relation to the epistemological content of science. The first one would be the conceptual-phenomenological sphere (C), which deals with *products* of science such as concepts, laws, and interpretations of phenomena, its conventions and applications. It is what is generally regarded as knowledge to teach: Newton's laws, genetics, chemical functions, geological eras, and so on.

Many authors (Matthews, 1995; Magalhães, Santos & Dias, 2002; Silveira & Peduzzi, 2006) who advocate the introduction of the science history and philosophy in teaching, do it with the argument that *processes* that lead to scientific knowledge are equally (or more) relevant than the products themselves, in terms of education. From this point of view, such knowledge should also be understood as teaching knowledge (and not just as devices for conceptual learning, as some people say). Thus, we can understand the formation of a second sphere of knowledge we call historical and methodological sphere (H).

Finally, there are those who believe (Auler, 2003; Teixeira, 2003) that school science should include social, political and cultural conditions that set the context of scientific production in terms of their influence on the direction of society and, in the reverse direction, the determinations that the social context imposes on scientific activity. This would be a third sphere of knowledge, which we call the socio-political sphere (S). In this case, what we understand as a process does not refer to the way in which scientific knowledge is produced, but as the dynamics of production of science itself as a social and cultural phenomenon. Science as such would then be the *product* and socio-political relations of science would be the *process*.

From this point of view, teaching knowledge should be thought of as stemming from a broader body of knowledge, explicitly including those different scholarly knowledge. In this sense, scholarly knowledge, the result of the work of scientists (physicists, chemists, biologists, astronomers, etc.), would be constituted into a particular sphere of knowledge, which could be called "conceptual-phenomenological", to which we would add the "historical and methodological sphere" organised by the knowledge linked to the nature of science, a field of knowledge for historians and epistemologists of science, as well as the "socio-political sphere" akin to the sociology of science, economics, geography and related areas.

The following diagram shows these three areas as concentric spheres, where the central level C represents the products of science transformed into school knowledge, the sphere H representing production processes of scientific knowledge, both in the synchronic (philosophy, methods, heuristics, etc.) and the diachronic (history, evolution of ideas) aspects, and the larger sphere S representing the socio-political aspects.

In terms of didactic situation, we believe that the critical questioning of media references leads us naturally to consider the knowledge in these three spheres. This is, in our view, because the logic of didactic transposition performed by the social media implies different people with different intentions for different audiences from that considered by the formal educational system. To illustrate this point of view, let us present a detailed example, that of a film production in Hollywood, whose analysis can be extended to other forms of media such as advertising, cartoons, magazines disclosure, video games, depending of course on the content conveyed by each of them.

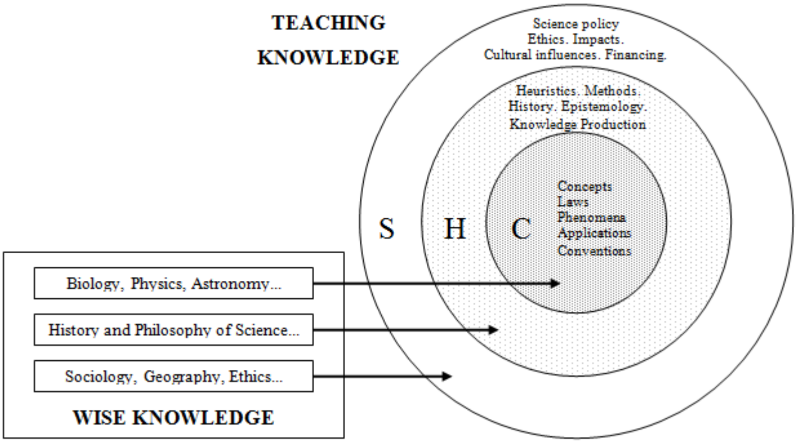


Figure 1. Spheres of systematised knowledge (teaching knowledge)

The film *Contact*, directed by Zemeckis (1997) is based on a novel of the same name by the same Sagan (1997) who had serious objections to how the media conveys science. In the story, astrophysicist Eleanor "Ellie" Arroway (played by Jodie Foster) is struggling to engage in the search for intelligent extraterrestrial life using radio telescopes in a clear reference to the SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence) project. The recurring themes of the entertainment industry are present: romance, betrayal, mystery, violence and adventure, typical of the soap operas. Conflicts surrounding the financing of research, the relationship between science and religion, the public perception of science, among others, are featured by simplified and stereotyped characters according to simplistic views that inform the vast majority of media products. In short, if the content has some scientific accuracy, its presentation is subject to the same criticisms applied to many other fictional works. The passive audience of the work, however, does not allow the viewer to distinguish a supposed scientific accuracy in *Contact* from any absurd situation presented in *X-Files* or *Star Trek* episodes, for example. As well as numerous productions, *Contact* incorporates issues relating to the three spheres of knowledge:

Phenomenological Concept	Historical Methodology	Sociopolitical Aspects
Einstein’s relativity	History of SETI	Public and private funding of science
Electromagnetic waves	The question of proof in science (Occam’s Razor)	Science-religion relationships
Astronomy	Methods of search for extraterrestrial intelligence	Impacts of scientific discovery
Astrobiology	Pure science *vs.* applied science	Disclosure of social scientific facts

Table 1. The three spheres of knowledge in *Contact*

In this sense, to address, as many suggest, *scientific concepts* using comics, cartoons, movies, etc., means restricting didactic concern only to a part of knowledge, in a *cultural product* that, by its nature, embraces much more than that. Using *Contact* only to discuss the theory of relativity and electromagnetic waves is to ignore that the contents of the film are a transposition from other fields of scholarly knowledge besides physics—epistemology, sociology, historiography of science, and so on.

5. Final considerations

The conceptual-phenomenological sphere only finds significance within a larger framework of relations that necessarily relates to the other spheres. In basic school, where we are dealing with general, non-specialised education of the individuals, there are strong reasons for this inter-relationship being considered. An absolute emphasis on the conceptual-phenomenological largely ignores the reasons that a general education requires. Rather, the importance of this sphere lies precisely in its undeniable importance as a base to make connections with the world of culture, social life, to address issues of general concern to people. There is therefore no way to give meaning to concepts out of this broader context.

If, on the one hand, this makes more complex the task of incorporating the first culture into the classroom, on the other hand, it means giving it a broader framework that proposes teaching situations from the actual socio-cultural practice that occurs outside the school walls. Chevallard (1989, p. 58) notes that "the legitimacy of any educational institution derives in part from its promise to faithfully represent the knowledge that it proclaims to teach". The question facing us in front of the media is linked precisely to this point. Kirby (2003, p. 258) calls attention to the fact that the media production is increasingly sophisticated, using scientific advisors to give a sense of reality ever more compelling. At the same time, Shaw and Dybdahl (2000, p. 22) argue that, in one way or another, young people will be educated informally by the media, according to its logics. As pointed out by Chevallard, the way knowledge is conveyed is directly linked to social practices and intentions of those who report it. Thus, it is a decision of school to ignore the media products or to bring them into the classroom and review them with students, according to other views.

References

Auler, D. (2003). Alfabetização científico-tecnológica: um novo "paradigma"? *Ensaio, 5*(1), 1-16.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1254-1263). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). On Didactic Transposition Theory: Some Introductory Notes. In H.-G. Steiner & M. Hejny (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education (Bratislava, August 3-7, 1988)* (pp. 51-62). University of Bielefeld, Germany, and University of Bratislava, Slovakia.

Durant, J. (2005). O que é alfabetização científica. In L. Massarani, J. Turney, & I. de Castro Moreira (Eds.), *Terra incógnita: A interface entre ciência e público* (pp. 13-26). Rio de Janeiro, Brazil: Vieira & Lent.

Gonnet, J. (2004). *Educação e mídias.* São Paulo, Brazil: Loyola.

Kirby, D. A. (2003). Science consultants, fictional films, and scientific practice. *Social Studies of Science*, *33*(2), 231-268.

Libâneo, J. C. (1990). *Fundamentos teóricos e práticos do trabalho docente: Estudo introdutório sobre pedagogia e didática* (Doctoral dissertation). Catholic Pontifical University of São Paulo, Brazil.

Magalhães, M. F., Santos, W. M. S. & Dias, P. M. C. (2002). *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *24*, 489.

Matthews, M. R. (1995). História, Filosofia e Ensino de Ciências: A tendência atual de reaproximação. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, *12*(3), 164-214.

Mazzarella, S. R. (2009). *Os Jovens e a mídia.* Porto Alegre: Artmed.

Sagan, C. (1996). *O mundo assombrado pelos demônios: A ciência vista como uma vela na escuro.* São Paulo, Brazil: Companhia das Letras.

Shaw, D. G. & Dybdahl, C. S. (2000). Science in the popular media. *Science Activities, 37*(2), 22-31.

Silveira, F. L. & Peduzzi, L. O. Q. (2006). Três episódios de descoberta científica: Da caricatura empirista a uma outra história. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *23*(1), 26-52.

Snyders, G. (1988). *A alegria na escola.* São Paulo, Brazil: Manole.

Teixeira, P. M. M. (2003). Educação Científica e Movimento C.T.S. no quadro das tendências pedagógicas no Brasil. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, 3*(1), 88-102.

Turney, J. (2005). Resposta popular à ciência e tecnologia: ficção e o fator *Frankenstein*. In L. Massarani, J. Turney, & I. de Castro Moreira (Eds.), *Terra incógnita: A interface entre ciência e público* (pp. 99-114). Rio de Janeiro, Brazil: Vieira & Lent.

Van Dijck, J. (2003). After the “Two cultures”: Toward a “(multi)-cultural” practice of science communication. *Science Communication*, *25*(2), 177-190.

Zanetic, J. (1989). *Física também é cultura* (Doctoral dissertation). University of São Paulo, Brazil.

Zemeckis, R. (Director) (1997). *Contact* [Motion picture]. United States: Warner Bros.

Epistemological vigilance and textbooks: On the didactic transposition of physics knowledge

Elio Carlos Ricardo and Maurício Pietrocola
University of São Paulo, Brazil

Résumé. Cet article présente une *activité pratique* conçue pour les futurs enseignants de physique dans le cadre de l'enseignement de physique qui leur est dispensé à l'Université de São Paulo. L'objectif principal de cette activité était d´analyser les processus de transposition didactique des savoirs physiques du secondaire, en prenant comme référence une sélection d'articles historiques. Les étudiants ont été incités à identifier les principaux processus que subissent les savoirs à enseigner (dépersonnalisation, désyncrétisation, décontextualisation, dogmatisation). Les résultats montrent que cette activité a permis à ces futurs enseignants d´exercer une vigilance épistémologique à l'endroit du savoir à enseigner, ce qui est un outil de base dans les situations d´innovations curriculaires.

Resumen. Este artículo presenta una *actividad práctica* diseñada con los estudiantes de un curso de física para futuros profesores de física de la Universidad de São Paulo. El objetivo principal de esta actividad era analizar los procesos de transposición didáctica de la física de secundaria, tomando artículos históricos como referencia. Los estudiantes fueron guiados para que identificaran los procesos clave que sufren los saberes a enseñar (despersonalización, desincretización, descontextualización, dogmatización). Los resultados muestran que esta actividad permitió a los profesores llevar a cabo una vigilancia epistemológica al respecto del conocimiento a enseñar, lo que constituye una herramienta básica en situaciones de innovación curricular.

Abstract. This paper presents and discusses a *Practical Activity* developed with students in the physics education course for future physics teachers at the University of São Paulo. The main objective of this activity was to analyse the didactic transposition process of knowledge in high school physics textbooks, with specific historical articles as a reference. The students were guided to identify the main processes that affect knowledge until it is put into practice in the classroom (depersonalising, desyncretising, decontextualising, dogmatising). The results show that this activity enabled prospective teachers to practice an epistemological vigilance on the knowledge to be taught, which is a basic skill in situations of curricular innovation.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 241-254)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

In situations of curricular innovations, more than in others, a set of skills are required of the teacher that not only focus on new contents, but also on new practices. To assume the responsibility of the art of teaching, the teacher will have to take risks and exercise some autonomy, because he will be seeking what is new and there is not yet an established practice that has been through a validation period in classroom situations.

While teachers are one of the most sensitive parts of a curriculum innovation, their adherence and understanding of a new proposal is essential. In addition, Pintó (2005) points out that teachers respond to innovations influenced by their knowledge and beliefs about their learning and teaching practices, and are faced with at least four "myths"—that of transmission, efficiency, accuracy and preparing students for exams. Koulaidis and Ogborn (1995) also add other obstacles, such as the possible deficiencies in specific content and inconsistent epistemological notions about science and science teaching.

These perceptions, which are built into their practices or even remain from their previous experiences as students, have profound effects on teachers' practices. According to Pintó (2005), it is common for teachers to undercut the original objectives of innovation and reduce the distance existing between the new proposal and what they are accustomed to do. The research by Ricardo and Zylbersztajn (2002, 2007 and 2008) show similar results when investigating the attempts for curricular innovations undertaken in Brazil in the 1990s in accordance with the Official Guidelines of the Ministry of Education. In the interaction between a teacher and an innovation, there may be changes and adaptations, resulting in a practice at odds with the original expectations. Pintó, Couso, and Gutiérrez (2005) state that in the interaction between teachers and innovations, this can result in a "new life".

Thus, in situations of curricular innovations, questions such as "Does what I am teaching meet the initial goals of education?" take on a pivotal role. Therefore, the theory of didactic transposition, as a tool enabling a teacher to use *epistemological vigilance*, becomes crucial. If this theoretical tool is indeed important, then it would be appropriate to give teachers the opportunity to know it and use it in pre-service education, for these teachers to be better prepared to face situations of curricular innovations. That was the objective of a *Practical Activity* developed with future physics teachers in the Physics Teaching Methodology course at the University of São Paulo, whose results will be presented and discussed herein.

2. Didactic transposition and epistemological vigilance

For Chevallard, the theory of didactic transposition is a theoretical tool that enables teachers to “stand back, cross-examine the evidence, question the simple ideas, freeing themselves from the deceptive familiarity of the subject of study. In a nutshell, it is what allows exercising epistemological vigilance” (Chevallard, 1991/1997, p. 16). It can be said that didactic transposition is an analytical tool that enables epistemological vigilance about what is taught with regards to what had been assumed as a teaching object, enlightening the differences and changes between the spheres of knowledge, more precisely, between knowledge to be taught and knowledge taught. According to Astolfi, Darot, Ginsburger-Vogel, and Toussaint (1997), it is what enables the creation of what is teachable.

For Chevallard, the route of reference of knowledge up to the moment it is put into practice in the classroom requires a great deal of transpositive work and the construction of new knowledge. This new knowledge will have an epistemological status that is different from reference knowledge, as highlighted by Astolfi and Develay (1995). Note, therefore, that didactic transposition determines only some simplifications of the knowledge taught, hiding a complex set of variables of this process, hence possibly preventing a better epistemological understanding of what is taught.

Acknowledging that a certain fraction of reference knowledge is chosen to be taught and that it will necessarily undergo some changes and adjustments, its teaching may be received as pathological by teachers, according to Chevallard (1991/1997). The didactic transposition could be understood as “violence” against the act of teaching and a first reaction could be refusing to do it. This becomes more evident when Chevallard states that “the knowledge produced by didactic transposition is therefore knowledge exiled from its origins and separated from its historical production in the reference knowledge sphere, hence legitimising itself as knowledge taught, as something that belongs to no time and belongs nowhere" (Chevallard, 1991/1997, p. 18). However, teaching is an essential requirement that has to be faced and, therefore, it is essential to understand this process in order to organise and structure the knowledge to be taught according to the teaching design desired, because "no knowledge taught is authorised by itself" (Chevallard, 1994, p. 146). In other words, the epistemological legitimacy that science enjoys does not automatically apply to knowledge to be taught and knowledge taught. Some cultural legitimacy is required of them. This hostile reception to didactic transposition in school is due to putting into question the legitimacy of the knowledge taught, thus questioning its status regarding the knowledge where it originated. Research conducted by Ricardo and Freire (2007) and by Ricardo, Custodio, and Rezende (2007) show that both teachers and students have difficulties in justifying the presence of school science in the Brazilian curricula. In most cases the justification applies to the science of reference, not its teaching.

With this in mind, it is noteworthy that teachers already work within the didactic transposition, as their performance occurs within an educational system where many decisions have already been made and choices have already been made by the *noosphere*. The noosphere is where the teaching operation is thought out according to different ideologies, comprising, according to Chevallard (1991/1997), "the operational core of the transposition process" (p. 34), i.e., external didactic transposition. Thus, an important step for the teacher to exercise his autonomy, especially in situations of curricular innovations, would be to recognise that there is such a transposition and understand that there are opportunities to organise teaching knowledge in different ways. That is, work on the didactic transposition, having as reference the initial design of education. The knowledge to be taught will take on a new shape, new textualisation, accompanied by a process of *depersonalising, desyncretising, decontextualising, publicity* and *programmability* (Chevallard, 1991/1997; Johsua & Dupin, 1993; Raisky & Caillot, 1996), to be recontextualised into a new discourse in the textbooks and teaching materials. In addition, not only epistemological aspects, but also the psychological and pedagogical features will be required of such new knowledge, in order to ensure its survival in the school environment.

The knowledge that remains in the classroom for a long time is knowledge adapted to the characteristics of the teaching system, that fulfil some requirements such as originating from *consensual* knowledge, being *operational*, and morally and "biologically" *contemporary*. Even the school contents that undergo constant attacks from the community of researchers in physics education (in kinematics, geometrical optics, scale changes, etc.), survive in the school environment because they are highly operational, as they are capable of producing activities, exercises and assessments and fit quite well into the school routine. They comprise consensual knowledge, hence ensuring the teacher good management of the school routine, although not contemporary when compared to modern science.

The theory of didactic transposition can offer some ways to better understand the production and survival of school knowledge in educational systems. It also allows to understand why school programmes undergo little change over time and why new knowledge and practices are rarely incorporated into the school subjects. In situations of curricular innovations, the question that arises is: why would teachers leave behind the knowledge and practices that have survived in the school environment and go for new practices and new knowledge, whose relevance is not yet known? What guarantees the success the teacher will have in implementing something new? That is why we stated earlier that teachers are one of the most sensitive parts in a curriculum innovation. Their beliefs and practices are built both subjectively, as well as with the experiences shared with their colleagues, which ensure their survival in the school setting, even if the results are questionable. The origins of these representations, in some cases, refer to the personal beliefs of teachers and their past experiences as students, as highlighted by Pintó (2005).

However, if on the one hand such practical knowledge ensures the teacher's survival, on the other hand, the obstacles to change become real. Thus, the teacher's education will have to receive special attention in order to be prepared to understand and implement curricular innovations.

In other words, there is a need to offer in the teacher's pre-service education the theoretical tools that will enable him to perform epistemological vigilance of what he teaches in school, hence performing his role as the main agent in implementing innovations in the classroom, with sufficient autonomy to perform in the internal didactic transposition. Autonomy is needed in order to take risks. As Davis (2003) points out, curricula and innovative methodologies involve managing a variety of problems and taking risks. This was the goal in the Practical Activities that will be described below.

3. Methodology

In situations of curricular innovation, the teacher will depend on the teaching materials and textbooks, as these new methodologies and new knowledge have not been put to the test of practice. In this case, as mentioned earlier, the epistemological vigilance assumes greater importance and the analysis of the teaching materials used by teachers becomes crucial to evaluate and validate the implementation of innovations.

In the case of the Brazilian educational system, situations of curricular innovations are not yet a tradition. The changes that occurred due to the requirements by the Laws of Education Guidelines took place over long periods of time. However, at present, there is a curriculum proposal and specific materials for teachers are in the implementation phase in the State of São Paulo. However, these documents provide only general guidelines and the teacher will still need to seek support in the textbooks. The hope is that these are not the only sources of knowledge to be taught or the only way to present knowledge taught in the classroom. In this new perspective, it is expected that teachers put into action the internal didactic transposition and carry out their autonomy.

For this, some tools to implement such innovations that are deemed relevant in schools can already be anticipated and incorporated into the pre-service educational strategies for future teachers, as suggested by Pintó (2005), as it is known that offering ready-made teaching materials is not enough for the desired changes to occur. One such tool is didactic transposition in its analytical dimension. But discussing the theoretical aspects of Chevallard's theory does not seem to be enough. There is a need to conduct future teachers to exercise critical observation and to carry further an analysis of the materials. Therefore, a Practical Activity was developed and applied to students of the Physics Teaching Methodology course.

The purpose of the activity was to analyse the course of didactic transposition in high school physics textbooks using historical articles as a reference. The work was developed in small groups of students and took place after discussing articles on the theory of didactic transposition. For the activity, the students had textbooks and historical articles of chosen subjects. These articles or extracts of original historical texts, served as empirical reference for the analysis of changes that took place in the knowledge to be taught found in these textbooks. With these materials, the students were conducted to examine some aspects of the process of teaching school knowledge using the following categories:

- time reduction;
- dogmatising, i.e., maintenance of products and exclusion of processes;
- depersonalising, i.e., loss of the discovery context, of the individual activity;
- desyncretising, i.e., loss of epistemological context to which it connects;
- decontextualising, i.e. loss of historicity;
- risks, i.e., non-viability of time, inadequate, "decharacterised" school knowledge.

The Practical Activity presented and discussed in this paper was applied to four Physics Teaching Methodology classes in 2008 and 2009. The activity was developed in small groups and eight to ten books were analysed, depending on the number of students in each class. In those classes the historical article entitled *A "Nova Teoria sobre Luz e Cores" de Isaac Newton: uma tradução comentada* (Isaac Newton's "New theory about light and colours": a commented translation), by Silva and Martins (1996), was used. According to the authors, this was the first published work by Newton describing his views about the nature of white light and colours. Acceptance of Newton's hypotheses was problematic and generated intense debate, including renowned names such as Hooke and Huygens. For the authors, it is not possible to conclude that white light is a heterogeneous mixture of coloured rays only from the experiment of the forming of a colour spectrum through a prism (Silva & Martins, 1996). Furthermore, they point out that Newton's work enables verifying the complexity of the elaboration and acceptance of a scientific proposal. However, this experiment is presented in textbooks "as evidence that white light is a mixture of coloured rays" (Silva and Martins, 1996, p. 314).

This historical text specifically presents some advantages. The students, future teachers, will not be science historians. Thus, well situated and historically defined episodes like the preceding one facilitate access to historical documents and do not require long study periods. Furthermore, it relates to knowledge found in high school physics textbooks. The discussions of didactic transposition, associated with this task and supported by the historical article as a reference, served for the students to make clear that the bodies of knowledge to be taught that appears in textbooks are "exiled from their origins and separated from their historical production" (Chevallard, 1991/1997, p. 18), as shown by the following results.

4. Result discussion

In the teaching process of reference knowledge there are some changes with respect to the original research forms. At the same time, such knowledge retains features that are specific to the context in which they will be taught. Being able to assess the possible consequences of such changes and their implications in teaching is the teacher's task. This new knowledge will have to take the form of a new text that can be disseminated in the programs and which can be appropriated by teachers and students. It is about providing such knowledge *publicity* and *programmability*, consistent with the available school time.

Regarding the reduction of time, the students observed in their analysis that:

> The textbook [A] starts the study of light in Greece with Plato, who tried to answer the following question: why do we see an object? Soon after, the book "falls" in our time. (A7)

> The textbook presents condensed concepts, with the explicit purpose of solving the exercises that are proposed in the material. (A11)
>
> The process of questioning, comparisons between the various theories that emerged before that which is accepted today, lose ground to the exercises. (A5)

Textbooks considerably reduce the dimension of time between the various preceding scientific theories. They prioritise, in this case, an operational approach of the subject in the form of exercises, giving the impression that the same research question occupied the minds of the philosophers, from Plato to Newton, as student A7 seems to suggest. With regards to the dogmatising of science, some students stated that:

> No book describes the experiments that led Newton to formulate his theory of light and colour and much less the reasoning sequence to arrive at it. As a rule, only a sketch of the prism separating the components of white light is presented. (A1)
>
> The book treats the subject in a totally dogmatic form, without presenting the process that created the theory of light dispersion. Desyncretising is also clear, from the moment that the authors present the prepared concepts, without showing what problems led to their study. (A6)

Coupled to the operational form in which teaching knowledge is presented—i.e., favouring solving problems without exploring conceptual aspects—, science takes on a dogmatic form in textbooks, according to the analysis of A1 and A6. This leads to a misunderstanding of science as a human and historical endeavour. The process of depersonalising identified by Chevallard also contributes to this:

> Newton's text is very personal, written in the first person. The teaching text says, informs, that the separation of colours is like that, as if the truth was beyond question or experiment. (A3)
>
> The experiment, history, date, character, all of that is left out so that there is a brief theoretical description about refraction and dispersion, and then, right away, it begins working on the problems and exercises. (A9)
>
> In the content approach, a clear loss of individual action, of discovery, is obvious. However, in the appendix there is a simplified explanation of how Newton arrived at his results. (A12)

To meet the school context requirements, the knowledge to be taught is presented in a sustained order often in prerequisites that omit the construction process of this knowledge and the dynamics of its actors, describing a depersonalised knowledge to be taught. The personal investments and previous contributions disappear to make way for a theoretical model that seems to be born ready for use. The students identified these characteristics in the textbooks examined, as observed by their comments. According to A12, one of the textbooks tries to rescue some historical aspects in a supplementary text. The dogmatic nature is revealed once again, especially in the analysis by A3. Again, the operational dimension of the content, in the form of practical exercises, is verified by A9.

Desyncretising was also identified in the analysed textbooks:

> The text directed to high schools, in its brief historical contextualisation, gives students the impression that the contents of the chapter developed linearly and rapidly over time, resulting in the final product for the explanation of colours. (A10)

Desyncretising indicates the necessary delimitation in the knowledge areas. It consists in separating the areas of theoretical knowledge into specific learning areas, spreading the theories into school subjects, chapters and sections, in order to meet the teaching project. It is a reorganisation of knowledge, breaking off from its chronological sequence, in order to be presented in a new structure. Concepts that are part of the body of a theory are often treated as separate and independent. A10 draws attention to the linear form taken on by the knowledge to be taught. The excess of systematisation can lead teachers to believe that the sequences of teaching contents only have that form which is presented in textbooks, when it is about a local variant of contextualised knowledge. Decontextualising was also commented thus:

> Another point refers to some problems that occurred during the experiment, as for instance the visualisation of oblong images, when it was expected they would be circular. In the textbook, the experiment appears perfect, problem-free. (A2)

> The text provides false information on the studies of Newton, saying that Newton discovered that a beam of sunlight, when passing through a glass prism, breaks up into a coloured beam. But Newton himself stated: "I procured a triangular glass prism to try therewith the celebrated phenomena of colours." (A6)

The *epistemological exile* declared by Chevallard is evident. The original problems disappear and the final products are presented as if they answered the initial question, in an apparent linearity of ideas and hypotheses. When knowledge to be taught is turned off from the problems of research and from the conceptual network that originated them, they lose much of its meaning. Or, they have meaning only in idealised situations with only a didactic purpose, as if there was a science for school and a "science" for everyday life.

These transpositive processes occur simultaneously and their separation into categories serves only to illustrate each one more clearly and to facilitate the analysis by future teachers. It is expected they are able to assess the risks and to have sufficient autonomy to make choices and work within the didactic transposition, hence exerting an epistemological vigilance. Durey and Martinand (1994, pp. 76-77) present the following question: "Is this school knowledge, of which we know that it has been decontextualised, disjointed and separated from the social practice which historically originated it, still functional today in a practice outside the school, and at what price?" The previous analysis showed that the "exile" of school knowledge can deprive it of meaning.

5. Conclusions

For Couso and Pintó (2009), when teachers participate in the planning, preparation and implementation of curricular innovations, the chances of success are higher. However, as mentioned earlier, in the implementation of innovations the conceptions, beliefs and practices are mobilised and the context of the teacher's work will also receive influence. Upon arriving at the school environment, an innovation proposal has already gained new life. Thus, there is need for an epistemological vigilance both in the preparation of teaching materials and structures and in its implementation.

How are the concepts presented? How are the activities structured? How are the experiments thought out? What words are used? What analogies are made? According to Pintó (2005), these are critical details, which may distance the practice of the initial objectives from the education project. On the other hand, teachers will inevitably adapt their teaching practices to their own work context. The question is whether these changes are conscious and what are their consequences.

The Practical Activity presented and discussed in this work was meant to help the teacher to take on a more critical stance in situations of curricular innovations and to be prepared to face the new challenges that will appear in the future. However, to rely only on their intuition, beliefs and practical knowledge does not seem sufficient (Pintó et al., 2005). A fundamental theoretical tool is the practice of epistemological vigilance. Therefore, only discussing didactic transposition did not seem enough. But its association with historical articles on specific topics as empirical reference proved to be promising, as suggested by the results presented herein. The methodological approach used enabled articulating epistemological analysis and didactic analysis, and questioning the "therapeutic" illusion of some of the aged knowledge that remain in the school curricula, in textbooks and in classrooms at the expense of adding new knowledge.

Other historical episodes can also be used in conjunction with the theoretical discussions. A scientific extract about the discovery of electrostatic induction by Michael Faraday, and the comparison with the explanations of this phenomenon found in textbooks, has also been used for the same task with the future teachers. The results are equally relevant. Both allowed applying epistemological vigilance and the historical texts reinforced the evidence and made clearer the teaching processes of the knowledge found in textbooks.

References

Astolfi, J.-P., Darot, É., Ginsburger-Vogel, Y. & Toussaint, J. (Eds.). (1997). *Mots-clés de la didactique des sciences. Repères, définitions, bibliographies*. Bruxelles : De Boeck.

Astolfi, J.-P. & Develay, M. (1995). *A didática das ciências*. Campinas, Brazil: Papirus.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l´épreuve* (pp. 135-180). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique. (Original French edition 1991.)

Couso, D. & Pintó, R. (2009). Análisis del Contenido del Discurso Cooperativo de los Profesores de Ciencias en Contextos de Innovación Didáctica. *Enseñanza de las ciencias, 7*(1), 5-18.

Davis, K. (2003). Change is hard: What science teachers are telling us about reform and teacher learning of innovative practices. *Science Education, 83*(1), 3-20.

Durey, A. & Martinand, J.-L. (1994). Un analyseur pour la transposition didactique entre pratiques de référence et activités scolaires. In G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l´épreuve* (pp. 73-104). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Johsua, S. & Dupin, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris: PUF.

Koulaidis, V. & Ogborn, J. (1995). Science teachers' philosophical assumptions: How well do we understand them? *International journal of science education*, *17*(3), 273-283.

Pintó, R. (2005). Introducing curriculum innovation in science: Identifying teachers' transformations and the design of related teacher education. *International journal of science education*, *89*(1), 1-12.

Pintó, R., Couso, D. & Gutiérrez, R. (2005). Using research on teachers' transformations of innovations to inform teacher education. The case of energy degradation. *International journal of science education*, *89*(1), 38-55.

Raisky, C. & Caillot, M. (1996). *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs*. Bruxelles: De Boeck.

Ricardo, E. & Freire, J. (2007). A Concepção dos alunos sobre a física do ensino médio: Um estudo exploratório. *Revista brasileira de ensino de física*, *29*(1), 251-266.

Ricardo, E., Custodio, J. F. & Rezende, M. F. (2007). A tecnologia como referência dos saberes escolares: Perspectivas teóricas e concepções dos professores. *Revista brasileira de ensino de física*, *29*(2), 137-149.

Ricardo, E. & Zylbersztajn, A. (2002). O Ensino das Ciências no Nível Médio: um estudo sobre as dificuldades na implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais. *Caderno brasileiro de ensino de física*, *19*(3), 351-370.

Ricardo, E. & Zylbersztajn, A. (2007). Os Parâmetros Curriculares na Formação Inicial dos Professores das Ciências da Natureza e Matemática do Ensino Médio. *Investigações em ensino de ciências, 12*(3), 339-355.

Ricardo, E. & Zylbersztajn, A. (2008). Os Parâmetros Curriculares Nacionais para as Ciências do Ensino Médio: uma visão a partir de seus elaboradores. *Investigações em ensino de ciências, 13*(3), 257-274.

Silva, C., & Martins, R. (1996). A "Nova Teoria sobre Luz e Cores" de Isaac Newton: uma tradução comentada. *Revista brasileira de ensino de física*, *18*(4), 313-125.

Conocimientos matemáticos de menores trabajadores agrícolas. Primeras reflexiones sobre la fecundidad de la TAD para su caracterización

Diana Violeta Solares Pineda
Dpto. Investigaciones Educativas, CINVESTAV, México

Abstract. This research focuses on the identification of mathematical knowledge of children who frequently travel with their families in order to work in the fields in Mexico. There is some evidence showing that, for various reasons, schools do not see to the needs of these children properly. We are interested in identifying the relationships between school knowledge and non-school knowledge. In order to achieve this objective, we will investigate which theoretical and methodological tools of the ATD could help see and understand this problem.

Résumé. La recherche porte sur l'identification des connaissances mathématiques des enfants qui changent fréquemment de lieu avec leur famille pour travailler dans les champs, au Mexique. Il est évident que l'école ne satisfait pas les besoins de ces élèves pour différentes raisons. Nous nous intéressons aux rapports qui s'établissent entre les connaissances scolaires et les connaissances non scolaires et nous examinons dans quelle mesure les outils théoriques et méthodologiques de la TAD peuvent nous aider à étudier ce problème.

Resumen. En esta investigación se trata de identificar los conocimientos matemáticos de los niños de familias que emigran para trabajar en el campo, en México. Hay evidencia de que la escuela no satisface las necesidades de estos alumnos, por distintos motivos Estamos interesados en estudiar algunas de las relaciones que se dan entre los conocimientos escolares y los no escolares. ¿En qué medida las herramientas teóricas y metodológicas de la TAD podrían ayudarnos a alcanzar este objetivo?

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 255-279)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 1. *La TAD en el continente didáctico hoy*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Presentación de la problemática

Cuando en México el trabajo infantil está prohibido, hay familias que por sus condiciones precarias de vida y en algunos casos por cuestiones culturales, utilizan a los menores en la realización de ciertos trabajos. Entre estos menores trabajadores pueden distinguirse los jornaleros agrícolas migrantes.

Estos niños y niñas viajan constantemente junto con sus familias desde sus estados de origen (denominados «estados expulsores») hacia otros estados, mayoritariamente del norte de México («estados receptores»), para trabajar en actividades agrícolas. La actividad que las familias trabajadoras realizan consiste, en general, en el corte de frutos, legumbres o granos. Las acciones específicas que llevan a cabo durante su jornada de trabajo dependen del producto agrícola que se recolecta, del momento en el que se encuentra su producción (preparación de la tierra, siembra, corte, empaque, por mencionar algunos) y de la forma en que se comercializa.

En algunos de los campos de cultivo a los que las familias llegan a trabajar, la Secretaría de Educación Pública (SEP) y el Consejo Nacional para el Fomento Educativo (CONAFE) ofrecen el servicio educativo a los menores con la finalidad de que continúen sus estudios de la escuela primaria, los cuales son constantemente suspendidos debido a su condición de migrantes y de trabajadores.

A partir de algunas exploraciones que hemos hecho con menores y adultos pertenecientes a esta población (entrevistas, observaciones en las aulas y en los campos de cultivo) tenemos algunas evidencias que nos hacen suponer lo siguiente:

- Por un lado, debido a las actividades que desempeñan y al contexto social en el que se desenvuelven, estos menores han adquirido un dominio de la numeración oral y un cálculo mental eficiente para determinadas situaciones, así como ciertas habilidades para la estimación de medidas que les permiten enfrentar las situaciones de trabajo y de otros aspectos de su vida cotidiana.

- Por otro lado, es posible que algunos de los conocimientos implicados en las situaciones que la escuela les ofrece, estén por debajo de lo que estos niños y niñas ponen en acción en ciertas actividades cotidianas.
- Por otra parte, nos hemos encontrado que dentro de la escuela varios de los niños tienen serias dificultades para escribir números y para efectuar algoritmos correspondientes a su grado escolar, por lo que es probable que la escuela no les esté resolviendo el acceso a los conocimientos matemáticos convencionales.

Ante esta situación, nos preguntamos:

- ¿Es posible identificar vínculos entre los conocimientos que los menores construyen fuera de la escuela con los que se enseñan en ella?
- ¿Cómo relacionan los menores estos dos tipos de conocimiento? ¿Se enriquecen mutuamente, se complementan, o entran en conflicto?
- ¿Podrían aprovecharse los conocimientos que los menores construyen fuera de la escuela para mejorar el aprendizaje escolar?
- ¿Es posible que el aprendizaje escolar contribuya a resolver necesidades que estos menores y sus familias enfrentan en su condición de migrantes y de trabajadores?

Intentar responder a estas preguntas nos ha llevado, por una parte, a formular cuestiones más básicas que puedan ser un punto de partida para nuestra investigación; por otra parte, nos ha demandado una constante búsqueda de herramientas teóricas y metodológicas que nos permitan abordar la problemática que nos ocupa. En los apartados siguientes presentamos algunos de los hallazgos de nuestro trabajo de investigación y hacemos un ejercicio en el que intentamos un primer acercamiento a los datos desde algunas nociones de la TAD.

2. Conocimientos matemáticos de menores trabajadores agrícolas. Primeras exploraciones

Entre los años 2003 y 2004 entrevistamos a 11 alumnos jornaleros agrícolas migrantes, la mayoría de ellos eran originarios del estado de Oaxaca (estado «expulsor») y viajaban hacia Sinaloa, Sonora o Chihuahua (estados «receptores») para trabajar en los campos de cultivo. Las entrevistas y las situaciones que en ese momento se les plantearon pretendían identificar algunos de sus conocimientos relacionados con los números y con las operaciones básicas. Para ello se les presentaron situaciones que implican *contar, comparar y formar distintas cantidades*, en el contexto del dinero. En ese mismo contexto planteamos situaciones que implican *comunicar e interpretar cantidades escritas con números*. Los materiales que se utilizaron eran «monedas» de cartoncillo de $1 y $10, y «billetes» de juguete de $20, $50, $100, $200 (los billetes tienen el mismo diseño que los billetes verdaderos, pero son más pequeños). Se les plantearon también problemas verbales aditivos y multiplicativos relacionados con algunas de las actividades que realizan en los campos de cultivo y en sus comunidades de origen.

Sobresalen dos aspectos de esa primera exploración:

– La diversidad de conocimientos matemáticos en alumnos de un mismo grado y los posibles factores que dan lugar a esa diversidad.
– La presencia de procedimientos no convencionales y de conocimientos escolares en los alumnos entrevistados.

2.1. Diversidad de conocimientos matemáticos en alumnos de un mismo grado y posibles factores que dan lugar a esa diversidad

Para ejemplificar este aspecto, comentaremos brevemente los casos de tres alumnos de primer grado de educación primaria;[1] los tres pertenecían al mismo grupo escolar y en el momento de la entrevista se encontraban en su comunidad de origen, San Miguel Tilquiapam, en el estado de Oaxaca. Todos ellos han trabajado en campos de cultivo de distintos estados del país.

Caso 1. Bernardo (edad: 6 años y 11 meses). Bernardo viaja con su familia a los campos de cultivo del estado de Sinaloa, trabaja cortando tomates. En ese momento tenía cinco meses asistiendo a la escuela de su comunidad. Anteriormente asistió a clases durante siete meses en un campo de cultivo de Sinaloa.

Durante la entrevista Bernardo mostró dominar la cardinalidad (contó colecciones de monedas de $1 más allá de veinte y logró contar $118

1. Generalmente los alumnos que cursan el primer grado de la escuela primaria tienen entre seis y siete años de edad, sin embargo, en el caso de los menores jornaleros migrantes, debido a la poca regularidad con la que asisten a la escuela, muchos de los alumnos de primer grado rebasan esa edad.

usando monedas de $10 y de $1), pudo identificar el valor de cada uno de los billetes ($20, $50, $100, $200) y formó con ellos cantidades de hasta tres cifras (cabe aclarar que el currículo oficial establece como rango máximo el número 100 para este grado escolar). Bernardo pudo leer cantidades distintas a los valores de los billetes solo si se trataba de cantidades de dos cifras. En lo que se refiere a la resolución de problemas aditivos con números pequeños no mostró dificultades relevantes.

Caso 2. Javier (edad: 11 años). Este niño viaja junto con su familia para trabajar en los campos de cultivo. Ingresó a primer grado en enero (la entrevista se hizo en agosto). Aunque Javier comenta que en algunas ocasiones iba a la escuela, su maestra considera que esta es la primera vez que asiste de manera continua.

Javier pudo formar con los billetes cantidades de tres cifras y pudo leer números de tres y de cuatro cifras. En lo que se refiere a la escritura, escribió cantidades de dos y tres cifras, aunque en algunos momentos dudaba de la escritura de algunos números de dos cifras, por ejemplo invertía la posición: 01 (diez), 04 (cuarenta). Con las cantidades de cuatro cifras tuvo más problemas: para mil doscientos primero escribió 1020, pero después él mismo corrigió y escribió 1200. El número mil quinientos lo escribió así: 100050.

Caso 3. Concepción (edad: 11 años). Esta alumna también ha trabajado en los campos de cultivo. En el momento de la entrevista estaba cursando por tercera vez el primer grado, pues aunque contaba con una boleta que la acreditaba como alumna de tercer grado (se la dieron en la escuela del campo de cultivo en el que trabajaba), cuando llegó a la escuela de su comunidad la regresaron a primero, con el argumento de que no tenía los conocimientos necesarios. Estuvo siete meses en primero y volvieron a reprobarla.

Durante la entrevista, Concepción tuvo dificultades para identificar el valor de algunos billetes. Pudo leer correctamente números de dos y de tres cifras. Escribió números de dos cifras, tuvo muchas dificultades para escribir los de tres cifras, y aunque también tuvo problemas para escribir números de cuatro cifras, se aproximó más a la escritura convencional de estos últimos; por ejemplo, escribió 100 para representar 1000 y1002 para 1200.

Comentarios. Tenemos el caso de tres alumnos que tienen en común el estar cursando el primer grado de la primaria (aunque con trayectorias escolares muy distintas), que han trabajado en los campos agrícolas y que están en pleno proceso de apropiarse del sistema de numeración escrito. Si bien sus dificultades con la escritura numérica son similares a las que suelen presentar en la escuela niños no trabajadores que están cursando también el primer grado, nos llama la atención las diferencias que se presentan entre los mismos menores trabajadores respecto a la apropiación que cada uno de ellos ha logrado de la numeración escrita, por lo que cabe preguntarse por los factores que dan lugar a tales diferencias: ¿la edad, la escolaridad, la participación en el trabajo?

Parece que en estos casos la edad no es un factor determinante, pues aun cuando Bernardo es el menor de los tres, pudo interpretar cantidades que van más allá del rango numérico establecido en el currículo para el primer grado y en algunos aspectos no está muy distante de los que Javier y Concepción pudieron hacer. ¿A qué se debe ese conocimiento? ¿A las situaciones extraescolares a las que ha estado expuesto? También podemos ver que si bien Javier y Concepción tienen la misma edad, su desempeño no es el mismo. ¿Qué factores dan lugar a esas diferencias? ¿Es posible que, por la diferencia de género, Javier y Concepción realicen actividades distintas en el trabajo que pudieran proporcionarles conocimientos diferentes? En ese sentido, ¿qué situaciones del trabajo les han permitido a Javier y a Bernardo acercarse al conocimiento de los números escritos?

Por otra parte, retomando el factor de la escolaridad, también está por averiguar las implicaciones que esta tiene en los conocimientos matemáticos que adquieren los alumnos. Aun cuando Javier ingresó al grupo de primer grado en enero y Concepción en mayo, según la maestra este es el primer contacto de Javier con la escuela; en cambio, para Concepción sería la tercera ocasión que cursa el primer grado. ¿Será que en el caso de Javier la escolaridad le ha ayudado más rápidamente —y de mejor manera— que a Concepción? ¿Será que las experiencias que Concepción ha tenido en la escuela ha sido un obstáculo antes que una ayuda?

2.2. Presencia de procedimientos no convencionales y de conocimientos escolares

Como se mencionó anteriormente, a los 11 alumnos entrevistados se les planteó también problemas verbales aditivos y multiplicativos con la finalidad de explorar sus conocimientos sobre las operaciones básicas. El contexto de estos problemas dependió de los comentarios que cada niño o niña hacía sobre las actividades que su familia lleva a cabo en su comunidad de origen o en los campos de cultivo en los que trabajan. Las operaciones matemáticas y el tamaño y tipo de números que los problemas ponían en juego dependían, por un lado, de la información que el alumno iba aportando, y por otro lado, de la habilidad que demostraba en la resolución de los problemas (la complejidad iba aumentando gradualmente en función de lo que el alumno mostraba saber).

Podemos distinguir básicamente dos tipos de procedimientos de resolución: los «no convencionales» y los «escolares». Esta denominación es momentánea puesto que, por un lado, sería necesario establecer de manera clara una distinción entre estos tipos de procedimientos, y por el otro lado, es probable que algunos de ellos sean «híbridos», esto es, que combinen aspectos de ambos grupos. No obstante, esta distinción provisional nos permite hacer un primer análisis de los conocimientos matemáticos de los alumnos.

En lo que se refiere a los procedimientos no convencionales, el más utilizado fue el cálculo mental; sin embargo, en varios casos no fue posible identificar las estrategias específicas de cálculo que los alumnos utilizaron, en otros casos sospechamos que se apoyaron en su experiencia para obtener rápidamente algunos resultados (por ejemplo, la memorización de ciertas cantidades como consecuencia de su uso frecuente). Solo en un caso se pudo tener una aproximación a un procedimiento de descomposición de cantidades en función del valor de las monedas.

Respecto a los procedimientos y recursos escolares, por el momento los caracterizamos como el empleo de números escritos y la utilización de algoritmos. Podemos decir que los utilizaron pocos alumnos y la mayor parte de las veces de una manera poco eficaz. En los casos en los que se utilizaron de manera funcional fue cuando los alumnos los incorporaron a sus propios procedimientos. Veamos algunos ejemplos con alumnos de la misma comunidad de San Miguel Tilquiapam, en el estado de Oaxaca.

Caso 4. Aquileo (nueve años de edad, 2.º grado).[2] Viaja con su familia a Sinaloa para trabajar en el corte de chiles, tomates y pepinos. Se le plantearon cinco problemas multiplicativos a partir de la información que nos dio sobre su trabajo en el campo de cultivo; resolvió correctamente todos ellos mediante cálculos mentales. Presentamos aquí dos ejemplos:

Problema A. *¿Cuánto pagan si se recolectan* 30 *cubetas de chile en un día?* (Por cada cubeta se pagan $2.50.)

Parece ser que Aquileo primero calculó cuánto sería por las monedas de 2 pesos considerando las 30 cubetas, y después calculó cuánto sería por las monedas de 50 centavos de esas mismas 30 cubetas, para finalmente sumar ambas cantidades:

E. [Entrevistadora] (...) ¿Y tienes una idea de cuánto es de 30 cubetas en total?

A. [Aquileo] (Después de casi un minuto de silencio, responde) 75.

E. ¿Y cómo supiste eso?

A. Porque conté las de un dos, y luego conté (inaudible). Luego conté de 30, 30 monedas de 50 centavos. Por eso eran 15.

E. ¿Y luego qué me dijiste que hiciste?

A. Conté las 30 monedas de 50 centavos.

E. ¡Ah! Las 30 monedas de 50 centavos. ¿Y cuánto es de eso?

A. 15 pesos.

E. ¿Y luego qué más hiciste?

A. Luego sumé en 2 en 2 (…) 30 y son... 30 eran de 1, y luego más de otro 1. Son 60.[3]

E. ¿Más?

A. Más 30 monedas de 50 centavos.

E. ¿Cuánto es en total entonces?

A. Son 75.

---

2. En general, la edad de los alumnos de segundo grado de primaria es de 7 a 8 años.
3. El conteo de las 30 monedas de 2 no fue sumando 30 veces el 2, como podría pensarse, sino sumando 2 veces el 30 apoyándose en el contexto de la siguiente manera: de un peso son 30 pesos, de otro peso son otros 30 pesos.

Problema B. *¿Cuánto se paga por siete días de trabajo, si cada día se pagan 75 pesos por 30 cubetas de chile?* [4]

Se esperaba que el alumno se apoyara en el resultado que obtuvo en el problema anterior ($75 por día) para resolver este otro (7 veces $75); sin embargo, Aquileo volvió a calcular el total de dinero que se obtendría de cada una de las monedas ($2 y 50 centavos) pero considerando 7 veces 30 cubetas. En un momento solicitó papel y lápiz para mantener un control de las cantidades con las que estaba trabajando. Escribió lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ +\ 30 \\ \hline 420 \end{array}$$

En realidad no resuelve la suma 7 veces 30, parece que su registro le ayuda a controlar el número de veces que debe considerar 30 cubetas, esto es siete veces; el 420 resulta de considerar $2 por cubeta; así, por cada 30 cubetas son $60, y siete veces $60 son $420. Después hace el cálculo para las monedas de 50 centavos de una manera similar a la anterior: por cada 30 cubetas son $45, y siete veces $45 son $105. Al final suma $420 más $105 y obtiene el total: $525.

Comentarios. Si consideramos que la escritura de los números suele aprenderse en la escuela, la escritura numérica que hizo Aquileo para resolver el problema B parece poner de manifiesto una integración de conocimientos escolares y no escolares; más precisamente, un procedimiento escolar integrado en un procedimiento no escolar, cumpliendo la función de apoyo a la memoria: le permite llevar un registro del número de días, de la cantidad de botes por día y del dinero que se obtiene según el valor de las monedas. ¿Podría tratarse de un

4. El problema que se planteó es muy complejo; es de los llamados «de proporcionalidad múltiple»: la cantidad a cobrar al final depende de dos variables: número de días, número de cubetas por día. No se advirtió esa complejidad en el momento de plantear el problema.

vínculo —establecido por el sujeto— entre conocimientos matemáticos de orígenes distintos?

Finalmente, al igual que otros casos de alumnos de grados iniciales, Aquileo demuestra saber mucho más de lo que se espera que aprenda en el grado escolar en el que está ubicado: sus habilidades para el cálculo mental en problemas de tipo multiplicativo,[5] su conocimiento de los números al menos de hasta cuatro cifras, el dominio que tiene de su escritura convencional, rebasa por mucho lo que se supone debe aprender en el segundo grado de la educación primaria. Cabe preguntar: la estrategia que Aquileo utiliza, ¿la habrá aprendido de alguien más, por ejemplo de sus padres? ¿Podría tratarse de una estrategia de cálculo que utilizan los demás trabajadores o se trata de un recurso propio de Aquileo?

Caso 5. Dorotea (11 años, 6.° grado). Ella viaja a Culiacán con su familia, pero no trabaja en los campos de cultivo; en Culiacán no va a la escuela, se dedica a ayudar a su mamá a las labores de la casa. Cuando está en su comunidad de origen (Oaxaca) sí va a la escuela y su familia se dedica a sembrar y a criar chivos y burros que luego venden. A partir de esos comentarios se le planteó el siguiente problema: «Si cada chivo se vende a $800, ¿cuánto es de 2 chivos?»

La alumna primero hizo una estimación del resultado («16.000»), tal vez mentalmente sumó 8 + 8 y al momento de considerar los ceros perdió el control de las cantidades obteniendo ese número tan grande. Después, para verificar su estimación, planteó la multiplicación 800×800; cometió algunos errores al llevar a cabo el algoritmo, errores que, no obstante, arrojaron el resultado que ella había previsto, pues obtuvo justamente 16.000. Posteriormente, con la ayuda de la entrevistadora, pudo efectuar la multiplicación de manera correcta, pero el resultado que obtuvo no la convenció. Por último, tal vez orientándose por la experiencia de su familia con la venta de animales y ayudada por una pista que le dio la entrevistadora, resolvió el problema mediante la suma 800 + 800.

5. Aunque no resulta del todo claro cómo Aquileo opera, se alcanza a ver una técnica usual de los adultos no escolarizados: la descomposición de cantidades.

Comentarios. Más allá de las dificultades que Dorotea tuvo para efectuar el algoritmo de la multiplicación (conocimiento que en sexto grado ya debería dominar), llama la atención la dificultad que tuvo para identificar la operación que resuelve el problema y que no se hubiera percatado rápidamente de que el resultado obtenido estaba muy distante de un rango numérico aceptable; la experiencia que su familia tiene en la venta de chivos podría haberle ofrecido un parámetro para valorar ese resultado, aunque también es posible que la entrevista la haya colocado en una situación escolar y que se haya sentido presionada a recurrir a un algoritmo, echando de lado, por un momento, su experiencia familiar.

Retomando los planteamientos iniciales de este segundo aspecto, tenemos entonces dos formas de utilización de lo escolar en la resolución de problemas: por un lado, un uso funcional que incorpora al conocimiento escolar como un apoyo para desarrollar procedimientos propios, como se ve claramente en el caso de Aquileo; por otro lado, está el caso de quienes recurren a los algoritmos, cuyo conocimiento es predominantemente escolar, y utilizan ese conocimiento de una manera que no es del todo funcional, ya sea porque no hay un dominio del algoritmo o porque la operación elegida no es la adecuada, como es el caso de Dorotea.

3. Retos teóricos y metodológicos para abordar el problema

A partir de los casos anteriormente descritos, volvemos a algunas de nuestras preguntas iniciales: ¿es posible identificar vínculos entre los conocimientos que los menores construyen fuera de la escuela con los que se enseñan en ella? ¿Cómo relacionan los menores estos dos tipos de conocimiento? ¿Podrían aprovecharse los conocimientos que los menores construyen fuera de la escuela para mejorar el aprendizaje escolar? ¿Es posible que el aprendizaje escolar contribuya a resolver necesidades que estos menores y sus familias enfrentan en su condición de migrantes y de trabajadores?

Intentar responder esas preguntas nos ha llevado a formular cuestiones más básicas que pueden ser un punto de partida para abordar las preguntas anteriores. Las cuestiones básicas hacia las que se han dirigido nuestras últimas exploraciones, son:

– ¿Qué conocimientos matemáticos ponen de manifiesto los niños trabajadores agrícolas en situaciones extraescolares?
– ¿Cuáles son las situaciones extraescolares que demandan la puesta en marcha de tales conocimientos? ¿Cuáles son sus características?
– ¿Qué procedimientos o estrategias de resolución ponen en juego estos niños ante situaciones escolares que implican los mismos conocimientos para su resolución?

Como señalamos al inicio, este trabajo de investigación también nos ha puesto en la necesidad de revisar si algunas de las nociones teóricas de la didáctica a las que hemos recurrido para estudiar fenómenos en los salones de clase, pueden ser utilizadas para estudiar los aprendizajes matemáticos que ocurren fuera del aula.

En el campo de la educación matemática se ha puesto de manifiesto un especial interés en torno a los vínculos entre los conocimientos matemáticos escolares y los extraescolares. Las diferentes perspectivas que conforman este campo abordan el asunto de formas distintas. Desde nuestro punto de vista, hay al menos cuatro recorridos de investigación que contribuyen al estudio de los conocimientos matemáticos no escolares y de su relación con los escolares:

1. La definición del conocimiento matemático a partir de la resolución de problemas y la implicación epistemológica que tal definición conlleva: el conocimiento matemático puede tener una diversidad de sentidos asociados a las situaciones problemáticas de las que emergen, lo cual cuestiona la unicidad que suele asignarse al conocimiento matemático y pone en primer plano el carácter relativo del mismo en función de tales situaciones (Freudenthal, 1995; Chevallard, Bosch & Gascón, 1998; Brousseau, 2000).
2. La identificación de conocimientos matemáticos en situaciones no escolares, particularmente las investigaciones que se han ocupado de adultos no alfabetizados y que muestran la complejidad de las estrategias que los sujetos ponen en marcha así como sus límites de acción (Ferreiro et al., 1987; Carraher, Carraher & Schliemann, 1995; Mariño, 1997; Soto, 2001).

3. La caracterización de la diversidad de manifestaciones del conocimiento matemático en situaciones escolares; diversidad que puede estar asociada al sentido del conocimiento matemático según la situación problemática, a la experiencia escolar de los alumnos y el grado de apropiación de conocimientos formales, o bien a las situaciones particulares del contexto social (Lerner & Sadovsky, 1994; Chevallard et al., 1998; Brousseau, 2000).
4. La caracterización de las formas en que funciona el conocimiento matemático dentro de la escuela, considerando que la enseñanza de las matemáticas implica la elaboración social —en el contexto del aula— de un conocimiento que tiene sus vínculos con la disciplina, pero que adquiere características particulares al convertirse en un objeto de enseñanza; tales rasgos los hacen distintos —tal vez inevitablemente distintos— a los conocimientos que se producen y transmiten fuera del aula. (Brousseau, 1999, 2000; Chevallard et al., 1998; Sadovsky, 2005).

No contamos con el espacio para desarrollar aquí los recorridos anteriores, lo que nos interesa es destacar algunas de las preguntas que nos hemos planteado a partir de nuestros hallazgos con estos niños y niñas trabajadores. Nuestro interés en esta exposición es el de compartir la búsqueda de herramientas, particularmente desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico, que nos permitan abordar los conocimientos matemáticos que tienen lugar en situaciones *no* escolares. Cabe precisar que estamos haciendo ejercicios similares con otras perspectivas, particularmente con la teoría de las situaciones didácticas, pues hay una necesidad teórica y metodológica de averiguar hasta dónde es posible «extender » el uso de herramientas didácticas hacia espacios no escolares y dónde ya es necesario recurrir a otras perspectivas, tal vez no didácticas, (Lave, 1991, 2001; Lave & Wenger, 2003) que nos ayuden a comprender aquello que la didáctica no pudiera mirar.

4. Matemáticas en situaciones de trabajo y de la vida diaria de los trabajadores agrícolas. Un ejercicio de aproximación desde la TAD

La TAD caracteriza las matemáticas como una actividad más del conjunto de actividades humanas que se llevan a cabo en la sociedad. Si bien plantea que no es sencillo marcar una frontera precisa entre las actividades que son matemáticas y las que no lo son, describe la actividad matemática como un «trabajo de modelización encaminado a resolver problemas» (Chevallard et al., 1998). En esos términos, la actividad matemática ocurre en distintas prácticas que rebasan el ámbito escolar y el ámbito científico. Esta amplitud y diversidad de prácticas en las que es posible «hacer matemáticas» incide en los conocimientos matemáticos que se ponen en juego o que resultan de esas prácticas.

La identificación de los conocimientos matemáticos que los menores trabajadores agrícolas aprenden en actividades extraescolares requiere, necesariamente, de la identificación y caracterización de las situaciones que dan lugar a tales conocimientos. ¿Cómo identificar tales situaciones? ¿Cuándo podemos decir que estamos frente a una *actividad matemática*? Más aún, ¿es posible que las familias trabajadores tengan *necesidades* específicas que requieren de un conocimiento matemático para ser resueltas? ¿Cómo saber si estamos ante un *problema matemático real* para las familias? Nos referimos a necesidades matemáticas que no son de origen didáctico, es decir, que no tienen que ver con aprender o enseñar matemáticas, que demandan solo la solución a un problema, o tal vez una justificación, o validación (Chevallard et al., 1998).

Con esas inquietudes detrás, realizamos una segunda exploración durante un mes y medio entre diciembre del 2008 y febrero del 2009 en un campo de cultivo de uvas y espárragos en el estado de Sonora. En ese periodo se realizaron entrevistas individuales y colectivas a menores y adultos, se plantearon situaciones problemáticas a los menores, se observó a las familias trabajando en el campo de cultivo y a los menores en sus salones de clases. Nuestras observaciones estuvieron orientadas por las siguientes preguntas:

– ¿Qué actividades se llevan a cabo en el campo de cultivo?
– ¿Quiénes y cómo participan en esas actividades? En particular, ¿cómo participan los menores?
– ¿Cómo aprendieron a realizar tales actividades? ¿Hay alguien encargado de enseñarlas? Si esto es así, ¿cómo se enseñan?

- ¿Qué actividades de las que se desarrollan en el campo implican conocimientos matemáticos? ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego y cómo funcionan en la actividad específica?
- ¿Es posible identificar una técnica en la utilización de tales conocimientos matemáticos? ¿Cómo se aprende dicha técnica? ¿Cómo se enseña?

En seguida presentaremos un par de ejemplos en los que alcanzan a vislumbrarse respuestas a algunas de estas cuestiones. Se trata de dos tipos de situaciones, en una de ellas se pone en juego la estimación de medidas y en la otra la interpretación de números escritos para el cobro y pago de dinero.

4.1. La estimación de magnitudes

Buena parte de las entrevistas colectivas que se realizaron a los alumnos estuvo centrada en la descripción de lo que ellos saben sobre el trabajo, ya sea porque han participado directamente en él o por lo que sus familiares les han contado. Las distintas actividades a las que hicieron alusión tienen que ver con el cultivo de dos productos, que son los que principalmente se trabajan en este campo de cultivo: las uvas y los espárragos. De cada uno de ellos describieron algunas de las actividades que se realizan durante la siembra, el corte y el empaque del producto.

En sus descripciones, los alumnos constantemente hacen referencia a las magnitudes: la medición, ya sea de pesos, de longitudes o de volumen, está siempre presente durante la siembra, la cosecha y el empaque de cada producto. La medición de las magnitudes en juego, o más precisamente, la *estimación* de las mismas, parece ser una cuestión sumamente relevante para los trabajadores, pues si esta no se hace de manera adecuada habrá consecuencias en el pago de su jornada laboral, como veremos un poco más adelante.

Cabe mencionar que en sus explicaciones, tanto los menores como los adultos, recurren frecuentemente a la expresión corporal para ilustrar los procedimientos de varias de las actividades del campo. El cuerpo es una referencia constante sobre todo para estimar la medida de longitudes. Un ejemplo es la utilización de la «cuarta» para la cosecha del espárrago y para la plantación de sarmientos, en el caso de la uva. «Una cuarta» es una medida no convencional que suele comprender la distancia entre el pulgar —abierto— y el extremo del dedo medio. Esa medida se utiliza para calcular la distancia que debe existir entre cada sarmiento de uva cuando son plantados en el vivero del campo de cultivo. También se utiliza esa medida en el corte del espárrago: en un sentido técnico estricto, los espárragos que se cortan deben medir 9 pulgadas, según la explicación que dan los agrónomos y supervisores del campo de cultivo, quienes suelen traer consigo un flexómetro cuyas unidades están en pulgadas; pero las indicaciones que dan a los trabajadores es que los espárragos deben medir una cuarta (los trabajadores no traen flexómetro), y esa es la referencia que en términos prácticos se utiliza. Para la empresa es importante que, en lo posible, el tamaño de los espárragos sea homogéneo, pues la mayor parte de sus productos se exportan a los Estados Unidos, por lo que el control de la calidad es estricto; por parte de las familias trabajadoras, una buena estimación de las longitudes del espárrago, además de la consideración de otros criterios (como el grosor), les asegurará que su trabajo no será rechazado, lo que se reflejará en su salario.

Otra actividad en la que la medición juega un papel importante, es en el corte y empaque de uvas; se trata de varias tareas que se llevan a cabo de manera casi simultánea: en un mismo surco, mientras un miembro de la familia corta racimos de uvas y los coloca en charolas o bandejas de plástico, otro va empacando, esto es, mete los racimos en bolsas de plástico y estas en una caja de cartón. Cada caja debe tener 10 bolsas. Una vez que tienen listas algunas cajas, las llevan a pesar a una báscula que está a cargo de otro trabajador. La caja debe pesar entre 20 y 21 libras. Para que una caja sea aceptada, además de cumplir con el peso, debe aprobar otros requisitos de calidad, entre ellos, que las uvas no estén manchadas por el sol, que estén «dulces», aspecto que puede apreciarse según su color, que la presentación del racimo sea atractiva a los ojos de un posible cliente, etc. Las familias procuran hacer el trabajo considerando todos esos criterios y a un ritmo muy rápido, pues su pago depende del número de cajas que logren recolectar a lo largo de la semana (se hace un registro diario de las cajas recolectadas por cada familia o «equipo» de trabajo). Si alguna caja de uvas no cumple con alguno de los criterios en el momento en que se pesa, habrá que corregir la falla, lo que implica una inversión mayor de tiempo y una menor producción de cajas.

La habilidad en el desempeño de ese trabajo, con todas las complejidades que conlleva, es una habilidad muy valorada entre las familias de trabajadores, los agrónomos y supervisores y todos los demás trabajadores que intervienen en esta cadena de producción.

En estas actividades solo participan niños y niñas con 12 años de edad como mínimo, no obstante, los más pequeños saben de esas actividades por lo que han escuchado de sus familiares o por lo que han visto. ¿Qué saben los menores sobre el corte y el empaque de uvas? Particularmente tuvimos interés en averiguar cómo interpretan la libra como unidad de peso, pues en México la unidad que comúnmente se utiliza es el kilogramo (un kilogramo equivale, aproximadamente, a dos libras). Lo que sigue es un fragmento de lo que dos grupos de alumnos expresaron sobre el tema:

«Una libra es cuando le pones o cuando le quitas»	*«¿Libras o kilos?»*
(Marta, Yulissa, Fernando, Hugo y Silvestre. Ninguno de ellos ha trabajado en esta actividad.) 1. E. [Entrevistadora] ¿Cuánto tienen que pesar? (las cajas de uvas). 2. F. [Fernando] Eeeh... mmmm... 3. H. [Hugo] 13 kilos... no me acuerdo... 4. F. 13 kilos, ¿no? 5. S. [Silvestre] ¿13 kilos?... Le vas a quitar libras. 6. F. Ajá. 7. E. ¿Qué dijiste de libras? 8. S. ¡Libras! 9. F. Libras cuando le quitas uvas. 10. H. Ajá, así se llama. 11. S. O si no, échale una libra. 12. F. (Se ríe.) Sí, es cierto. 13. E. Ah, ¿le ponen o le quitan libras? 14. H. Ajá. 15. F. Sí, le ponemos o en veces le quitamos.	(Diana, Lizbeth, Miguel, todos han trabajado en esta actividad.) 1. D. [Diana] A mí me gusta eso, no... no me equivocaba mucho, tiene que ser como... de... de 15… No ... de 15 kilos, no sé de cuántos... 2. M. [Miguel] No, de 22 kilos... 3. D. (…) Y si se pasa, se regresa. 4. M. Ajá. Tiene que quitarle poquito a cada bolsa. 5. E. [Entrevistadora] (…) ¿Y tú cómo sabes si te pasaste? 6. D. Es que ahí está una... una... una pesadora. 7. M. Una báscula. 8. D. Una bás...Y una señora pues, también diciéndote: está bien, está mal... (…) 9. E. Ajá. Me dijeron que cada caja es de ¿22? (…) Es que hace un rato unos niños me dijeron que 21 o 22, pero libras. (Los alumnos se quedan pensando un momento.) 10. E. ¿Será lo mismo... libras que kilos?

16. E. ¿Y qué es una libra? 17. S. Es una... 18. F. Es cuando le quitas la uva... 19. E. Cuando le quitas... 20. H. Un racimo de uva. 21. E. Ahhh... pero también se la puedes poner... si le falta... 22. F. Ajá.	11. D. No, porque pesa... libras pesa más. 12. E. Mmm... 13. D. Y kilos es otra cosa. 14. E. ¿Ustedes qué han visto?... ¿Qué creen que sean, libras o kilos? 15. M. Kilos. 16. D. Kilos (no parece muy segura). 17. E. Y la libra, ¿si han visto que las usan aquí para pesar... 18. D. En el empaque. 19. E. ¿En el empaque de qué? 20. D. En cargar el espárrago. 21. E. Ahh. Del espárrago. 22. D. Ahí siete libras. 23. E. Y las libras... ¿Dices que pesan más que los kilos? 24. D. Sí. (No parece muy segura.)

En estas descripciones puede advertirse que hay algunos detalles que los menores no tienen muy precisos (¿Libras o kilos? ¿Cuántas libras o kilos debe pesar la caja?); sin embargo, parece muy clara la asociación que hacen entre las libras —o los kilos para otros— y la acción de quitar o poner uvas al momento de pesar las cajas, esto se ve más claramente en la respuesta que dan a la pregunta de la entrevistadora, pregunta por cierto difícil de responder: «¿Y qué es una libra?»… «Es cuando le quitas la uva». Una vez más se pone de manifiesto la importancia que para las familias tiene hacer una estimación lo más aproximada posible a la medida que se les demanda, habilidad que parecen obtener a través de la experiencia, según interpretamos de lo que varios adultos nos dijeron al respecto. Ante esto nos preguntamos: ¿Qué procesos implica la adquisición y el desarrollo de esa habilidad? ¿Qué conocimientos respecto de las magnitudes se ponen en juego? ¿Habrá estrategias que hayan desarrollado los trabajadores para realizar esta actividad con eficiencia?

4.2. La interpretación de documentos con información numérica

Hemos identificado que en varios campos de cultivo circulan diversos documentos con información numérica; en el campo donde hicimos nuestras observaciones ubicamos los siguientes: recibos de pago, cheques, registros de los anotadores (son quienes registran el trabajo realizado en el campo), libretas de deudas que los trabajadores tienen con la tienda del campo.

Una de las exploraciones que hicimos consistió en averiguar cómo interpretan los adultos y los menores este tipo de documentos con el propósito, por un lado, de comprender las situaciones en las que se producen y circulan esos textos (quiénes y cómo participan en su producción y circulación, con qué finalidades), y por el otro, identificar los conocimientos matemáticos que se ponen en marcha al interactuar con esas situaciones. Presentaremos el caso de dos documentos que, por las descripciones que los menores hicieron de ellos, parecen estar muy vinculados entre sí: el cheque y la libreta de deudas.

A propósito de un talón de pago (un comprobante de pago) del campo de cultivo que se les mostró a los alumnos, estos hicieron referencia al cheque del que se desprende el talón y que reciben los trabajadores cada sábado, que es el día de pago. En sus explicaciones, los alumnos no hicieron referencia a la información específica que viene en el talón (por ejemplo, el nombre del trabajador o la cantidad que se paga), sino que se centraron en los usos del cheque y tales usos tienen que ver principalmente con el pago de las deudas que las familias adquieren, en el transcurso de cada semana con alguna de las dos tiendas del campo de cultivo. Esas deudas se registran en dos libretas: en la del cliente o deudor (imagen de la izquierda), y en la del dueño de la tienda o «tendero» (imagen de la derecha). A continuación de estas, se reproducen las explicaciones de algunos alumnos:

> Si no la arrancas, te vas a equivocar
>
> (Victoria, Adela y Silvestre)
>
> S. [Silvestre] Lo he visto nomás el talón (…) de cheque como lo vas a cambiar en la tienda... si debes (…) te van a dar dinero… y lo vas a cambiar el cheque… te van a dar dinero, pero debes llevar la libreta…
>
> A. [Adela] Allá en Caborca los pasan allá en el banco y te dan dinero.
>
> S. También en Caborca se puede cambiar.
>
> E. [Entrevistadora] Ah… Y este… y los sábados, cuando rayan (cuando los trabajadores cobran su salario), ¿qué hacen con la libreta?
>
> A. Los llevan a pagar y lo borran…
>
> S. Lo rompen.

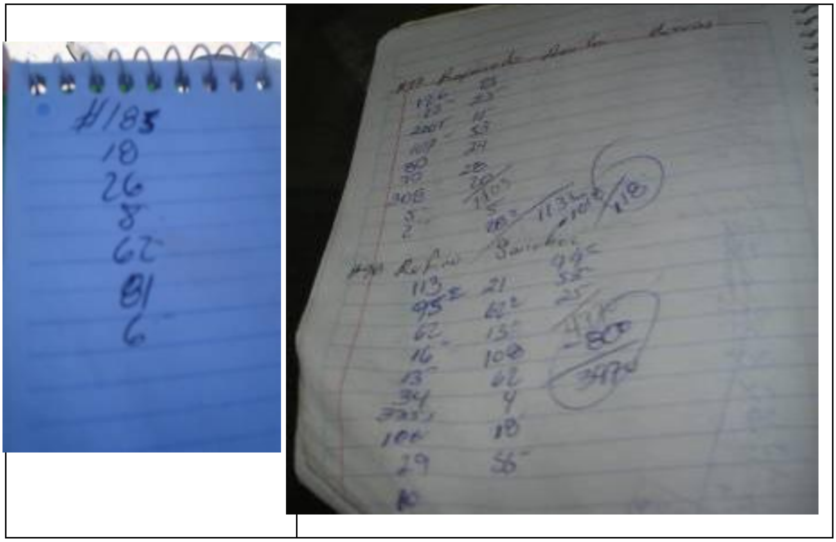


Figura 1. Libretas de tendero

> A. (…) este… esa hojita que tiene la libretita, de esas chiquitas, este, la arrancas y la rompes porque si no la arrancas te vas a equivocar… te lo van a cobrar otra vez.
>
> E. (…) ¿Y cada sábado arrancan esa hojita?
>
> A. Sí. (…)
>
> S. Y también van a… como su mamá o su papá le ponen también su número.
>
> E. A ver, cuéntame…
>
> S. Como si es ciento cincuenta y ocho te van a poner, vas a ir a comprar unas tortillas, ciento cincuenta y ocho, y le ponen como una hache (se refiere a la letra H, mientras habla simula estar escribiendo con el dedo índice los números y la letra).
>
> E. ¿Una hache de qué?
>
> S. Como del número y luego si vas a comprar… un kilo de tortillas, cuestan a diez, pero debes ponerle el número, ciento cincuenta y ocho, para que lo vean.

La «hache» a la que hace alusión Silvestre, en realidad es el símbolo de número (#) que se antepone al número y nombre del deudor en la libreta del encargado de la tienda. Por ejemplo: «#158 Raúl García»

Lo que los alumnos dicen sobre el cheque y las libretas de deudas nos da elementos para tratar de establecer cómo se producen tales documentos, quiénes participan en su producción y circulación, con qué finalidades y desde qué posición participan. Dan cuenta de quién escribe qué, en dónde lo escriben y qué se hace con eso que se escribe, así como de algunos medios de control de la escritura (*la arrancas y la rompes porque si no la arrancas te vas a equivocar… te lo van a cobrar otra vez*). Se trata del ciclo de una escritura básicamente de números, pues en las libretas tanto del deudor como del vendedor no se registran los productos, sino solo su precio o el total de lo consumido. Ahora, ¿qué aporta la exploración sobre esas escrituras para uno de los propósitos centrales de esta investigación: la identificación y caracterización de los conocimientos matemáticos que adquieren los menores en situaciones extraescolares?

En principio, nos permite identificar el conocimiento matemático en cuestión, por ejemplo: el número como cardinal (cantidad que se paga o que se debe), el número como código (#158), operaciones de adición y sustracción (para calcular lo que se debe y lo que queda del cheque); asimismo, nos permite caracterizar las situaciones y las condiciones en las que tales conocimientos se ponen en marcha, las cuales determinan en buena medida al mismo conocimiento, definen sus sentidos, acotan sus alcances, dan elementos para hacerlos más o menos comunicables.[6]

También nos permite acercarnos a las posibles necesidades matemáticas de esta población: para las familias es necesario llevar algún tipo de registro, un control del trabajo producido, del pago que ese trabajo debe generar, de las deudas que se adquieren y del pago que se hace de ellas; de la misma manera es necesario contar con recursos que permitan confrontar los registros y cálculos propios con los que elaboran los otros: el anotador, el supervisor, el pagador, el dueño de la tienda. ¿De qué recursos se valen las familias trabajadoras para llevar esos controles cuando la mayoría de los padres y madres de familia no asistieron a la escuela o tienen una escolaridad limitada? ¿Cómo se posicionan ante *los*

6. Según Guy Brousseau (2000): «La definición de los conocimientos en relación con su función en una situación ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor, alumno) desarrolla conocimientos diferentes a priori según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende» (p. 23).

otros que generalmente tienen una mayor jerarquía laboral y también escolar? ¿Cómo se van apropiando los menores y los adultos de las prácticas que se dan en torno a esos documentos? Por ejemplo: ¿qué hace un adulto que se asume como analfabeto para posicionarse frente al que le paga su trabajo mediante un cheque o frente al que le cobra en la tienda? En caso de que existan estrategias para ello, ¿se transmiten entre los adultos? ¿Se enseñan a los niños y niñas? ¿Se aprenden de la misma manera que los trabajadores dicen haber aprendido a cortar y empacar («haciendo» o «mirando»)? ¿Qué se pone en juego en ese «ver» y «hacer»? ¿Habrán generado los trabajadores técnicas para llevar a cabo esas tareas matemáticas? ¿Se enseñan esas técnicas?

Algunas de las entrevistas que se realizaron a los adultos parecen aportar elementos para ir esbozando respuestas, pero esas entrevistas aún no están suficientemente procesadas. Lo que sí podemos decir es que en varias familias los hijos mayores, pero sobre todo escolarizados, asumen el encargo familiar de hacer los cálculos matemáticos, ya sea para responder a una pregunta del tipo «¿Cuánto deben pagarme?» o «¿Cuánto debo pagar?», o para verificar el cálculo que ha hecho otro (algún miembro de la familia o el dueño de la tienda).

Las preguntas que nos hemos planteado respecto a las estrategias que pudieran tener los trabajadores para hacer frente a las necesidades matemáticas que parecen estar presentes en las familias trabajadoras (estimar medidas de manera eficaz, interactuar con números escritos), buscan una interlocución con algunos de los planteamientos de la TAD referidos a la noción de *praxeología.*

Como una forma de caracterizar los conocimientos matemáticos que emergen de prácticas concretas (praxis), la TAD propone un modelo denominado *praxeología*, el cual consiste, en términos generales, en identificar los tipos de tareas que se llevan a cabo en una práctica determinada, las técnicas que se emplean para realizar dichas tareas (técnicas y tareas conforman «la praxis»), así como las justificaciones de por qué tales técnicas resuelven de manera efectiva ésas tareas (las justificaciones integran «el logos») (Chevallard et al., 1998).

¿En qué medida el modelo praxeológico puede ayudarnos a identificar los *tipos de tareas* que implican conocimientos matemáticos y que las familias enfrentan cotidianamente en el campo de cultivo? ¿Cómo podríamos identificar las *técnicas* que las familias usan para resolver esas tareas? ¿Podríamos hablar de un *bloque práctico-técnico*? Por ejemplo, ¿cuáles son las *técnicas* que permiten realizar la *tarea* consistente en obtener una caja de uvas de 21 libras con todas las características que se demandan? ¿Cómo describir esas técnicas cuando está de por medio la experiencia y la intuición? Aun cuando las técnicas son sumamente contextualizadas, parece plausible poder identificar y describir ese bloque, pero ¿podríamos hablar de un *bloque tecnológico-teórico*? Siguiendo el ejemplo de la caja de uvas, ¿cómo describir las *explicaciones* y *justificaciones*, funciones de la tecnología, que validan un resultado cuando se recurre a instrumentos de medición (la báscula) y a la calificación de un tercero (el encargado de la báscula)? Tratando de llevar un poco más allá este ejercicio de preguntas: ¿es posible que esa praxeología sea el resultado de una construcción social de los trabajadores y sus familias? ¿Qué alcances tiene el término *institución* para poder identificar qué instituciones se conforman en el medio familiar y laboral de estos niños? ¿De qué manera es posible caracterizar la *organización matemática* de tales instituciones?

Las investigaciones más representativas que se han hecho desde la perspectiva de la TAD se han enfocado al estudio de las organizaciones matemáticas y didácticas de las instituciones escolares; la identificación y análisis de los bloques teórico-práctico y tecnológico-teórico tienen como referente conocimientos matemáticos claramente ubicados en el *saber-sabio*. ¿Cómo abordar entonces prácticas que viven en instituciones no escolares y cuyas justificaciones no son evidentes desde la mirada del saber matemático? En este momento estamos estudiando la extensión de la noción de *tecnología* introducida por Corine Castela (2008), quien amplía esa noción para poder analizar, precisamente, las tareas y técnicas que son invisibles al saber matemático. Aún no podemos dar cuenta de nuestras exploraciones en ese sentido, pero tal propuesta teórica parece ser una vía que puede ayudarnos a abordar varias de las preguntas que nos hemos planteado.

Finalmente, cabe aclarar que aun cuando en este momento estamos interesados en la identificación de conocimientos matemáticos extraescolares y en la caracterización de las situaciones que dan lugar a esos conocimientos, nuestro interés está puesto también en la escuela, pues consideramos que la escolaridad es en sí misma una necesidad de las familias trabajadoras, ya sea porque ven ella una forma de legitimación social (por la valoración social que genera el tener un certificado escolar) o porque ponen en la escuela la posibilidad de un futuro mejor para sus hijos. Sin dejar de lado la importancia social que tiene la certificación de la escolaridad, en el origen de esta investigación ha estado nuestra preocupación sobre los posibles vínculos que pudieran existir —y sobre la posibilidad de optimizarlos— entre las matemáticas escolares y las no escolares: ¿Podrían aprovecharse los conocimientos que los menores construyen fuera de la escuela para mejorar el aprendizaje escolar? ¿Es posible que el aprendizaje escolar contribuya a resolver necesidades que estos menores y sus familias enfrentan en su condición de migrantes y de trabajadores?

Poniéndolo en términos de la teoría antropológica de lo didáctico: ¿es posible identificar en las situaciones extraescolares *cuestiones cruciales* que puedan ser abordadas en la escuela? De ser así, ¿cómo construir desde la escuela esas cuestiones cruciales? ¿Qué praxeologías, qué organizaciones didácticas podrían generarse para abordar tales cuestiones? Y finalmente, ¿cómo lograr que mantengan su vitalidad, su «carácter crucial» al entrar en la escuela y subsumirse a sus reglas?

Referencias

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), pp. 5-8.

Brousseau, G. (1999). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra (Comp.), *Didáctica de l*as matemáticas. Aportes y reflexiones (pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós Educador.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (1995). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: Biblioteca para la Actualización del Magisterio, SEP.

Ferreiro, E., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M., Block, D., Dávila, M. (1987). *Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados.* México: DIE-CINVESTAV.

Freudenthal, H. (1995). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: CINVESTAV-IPN.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Lave, J. (2001). La práctica del aprendizaje. En S. Chaiklin & J. Lave (Comps.), *Estudiar las prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto* (pp. 15-45). Buenos Aires: Amorrortu editores.

Lave, J. & Wenger, E. (2003). *Aprendizaje situado. Participación periférica legítima*. [Traducción de Raúl Ortega Ramírez.] México: Facultad de Estudios Superiores Iztacala, UNAM.

Lerner, D. & Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. Parra (Comp.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 95-184). Buenos Aires: Paidós.

Mariño, S. G. (1997). Los saberes previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación* (pp. 77-100). Santiago de Chile: UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001159/115928so.pdf

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Soto, I. (2001). Aportaciones a la discusión sobre la enseñanza de las matemáticas a partir de la didáctica y la etnomatemática. En A. E. Lizarzaburu & G. Zapata (Comps.), *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina: experiencias y desafíos* (pp. 215-233). Madrid: Morata.

Eje 2
Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas

Axe 2
Enseigner les mathématiques : la profession et ses problèmes

Axis 2
Teaching mathematics: the profession and its problems

La validación en la formación de maestros: José María Eyaralar

Dolores Carrillo y Encarna Sánchez
Área de Didáctica de las Matemáticas, Univ. de Murcia, España

Abstract. During the first third of the 20th century, the international movement on New Schools was widely spread in Spain. This produced an interesting educational reform movement, with new learning practices and ideas. We will use ATD tools to analyze the issues posed by a teacher at a Normal School, José María Eyaralar, with respect to the validation of mathematics. In particular, we shall contrast the proposals in several of his works, by linking them to the institutional changes that took place throughout his teaching career.

Résumé. Au cours du premier tiers du XX^{e} siècle, le mouvement international sur les *Écoles nouvelles* s'est largement répandu en Espagne. Cela a engendré un mouvement de rénovation pédagogique présentant de l'intérêt, avec des approches et des pratiques éducatives nouvelles. Dans cet article nous allons utiliser les outils de la TAD pour analyser les questions proposées par un professeur d'École normale, José María Eyaralar, au sujet de la validation en mathématiques. En particulier, nous allons comparer les propositions qu'il a faites dans plusieurs de ses ouvrages et les relier aux changements institutionnels survenus au cours de sa carrière.

Resumen. Durante el primer tercio del siglo XX la difusión en España del movimiento internacional sobre las Escuelas Nuevas produjo un interesante proceso de renovación pedagógica, con nuevos planteamientos y prácticas educativas. En este trabajo vamos a usar las herramientas de la TAD; concretamente, vamos a analizar las cuestiones que propone un profesor de Escuelas Normales, José María Eyaralar, en relación con la validación en matemáticas. En particular, contrastaremos sus propuestas en varias de sus obras y las relacionaremos con los cambios institucionales que ocurrieron durante su vida profesional.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 283-298)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. José María Eyaralar

José María Eyaralar[1] fue alumno de la Escuela Superior del Magisterio entre 1915 y 1918, en la que ingresó siendo licenciado en ciencias químicas y de la que salió como el número uno de su promoción. Desde ese momento, su interés se centró en la enseñanza de las matemáticas, asignatura que impartió en varias escuelas normales, entre ellas la de Barcelona y la de Baleares.

A través de sus estudios en la Escuela Superior del Magisterio, Eyaralar conoció el movimiento de la Escuela Nueva. María del Mar del Pozo (2005) ha señalado la importancia de este centro en la difusión al magisterio de educación primaria de las experiencias relacionadas con la Escuela Nueva, y en la transmisión de nuevos modelos docentes a través de sus alumnos, futuros inspectores y profesores de escuela normal.

En 1918 comenzó su actividad como profesor de matemáticas en escuelas normales y en 1922 publicó su primer libro, el *Nuevo tratado de aritmética*, dirigido a sus alumnos futuros maestros. En 1923 viajó a Francia, becado por la Junta de ampliación de estudios (JAE) para visitar los centros docentes de todos los niveles[2] en los que se estudiaban matemáticas. La memoria que elaboró sobre este viaje fue publicada por la JAE en 1924, con el título *La enseñanza de la matemática en las escuelas francesas*[3]. Son años en los que se publicaron un gran número de obras, originales o traducidas, sobre las escuelas nuevas y en los que se llevaron a cabo experiencias en las aulas, basadas en este movimiento.

Hasta 1936 continuó su actividad docente en la Escuela Normal de Baleares. La nueva orientación que el Plan de 1931 dio a los estudios de magisterio —que introdujo la metodología de las materias— fue el marco institucional en el que José María Eyaralar publicó dos nuevas obras, dirigidas a los estudiantes de las escuelas normales, que recogen sus

---

1. La figura de José María Eyaralar ha sido estudiada por Francesca Comas Rubí en su tesis doctoral (Comas Rubí, 2000).

2. Visitó en París las escuelas maternales, escuelas primarias elementales, la Escuela Primaria Superior J. B. Say, la Escuela Normal de París y la Escuela Normal Superior de Saint-Cloud.

3. La influencia que la estancia en Francia pudo tener en la obra de Eyaralar ha sido estudiada en (Carrillo & Sánchez, 2007).

reflexiones y experiencias profesionales: una *Aritmética intuitiva* y una *Metodología de la matemática*. Son estas las obras que vamos a usar en este trabajo.

2. Planteamiento del trabajo

Se trata, por tanto, de analizar unas obras que han sido usadas en la formación matemática de maestros. El análisis de manuales escolares es considerado como una componente imprescindible en muchas investigaciones relacionadas con la didáctica de las matemáticas y realizadas desde diferentes perspectivas. En particular, diversos autores (Assude, 1996; Carrillo, 2004; Chaachoua & Comiti, 2010) han señalado la utilidad del marco conceptual y las herramientas de la TAD con esta finalidad.

En este trabajo las obras que vamos a utilizar son: el *Nuevo tratado de aritmética* (NTA) de 1922; la *Aritmética intuitiva* (AI) de 1932 y la *Metodología de la matemática* (MM), publicada en 1933, de características diferentes a los dos manuales anteriores y que nos servirá de contraste en nuestro análisis.

La primera (NTA) es una obra escrita en los comienzos de su vida profesional, en la que, aunque no sea habitual en la época para manuales de este nivel, incorpora una bibliografía de veintidós libros, de los cuales catorce no son de autores españoles.

La AI constituye una reelaboración de su obra de 1922, recogiendo su experiencia como profesor en esos años y las nuevas ideas que se estaban incorporando a la enseñanza de la matemática.

La MM, como señala en su Prólogo, es una obra escrita con apremio en un tiempo de «intensa renovación», y que «recoge el fruto de largos años de estudio y experiencia, transcurridos desde la publicación de nuestro Nuevo Tratado de Aritmética» (p. v) y el de trabajar durante un curso en la nueva asignatura de Metodología

Planteamos la comparación de estas obras de un mismo autor en distintas épocas, porque los cambios observados pueden ser debidos a la evolución del pensamiento de su autor en el periodo intermedio y en ello influye su práctica profesional. Pero también hay que tener en cuenta el cambio que se produjo en la formación de maestros con la proclamación de la II República en España y la llegada a puestos de responsabilidad en el ámbito educativo de personas del entorno de la Institución Libre de Enseñanza; estas personas, mediante la legislación y la gestión, trataron de institucionalizar los presupuestos de la Escuela Nueva y las experiencias relacionadas que se habían llevado a cabo en España en los decenios anteriores.

El aspecto elegido para efectuar esta comparación es la validación de las propiedades aritméticas. Un interesante y útil análisis de la validación en distintos contextos, realizada a partir de manuales, puede encontrarse en Cabassut (2010); este autor identifica e ilustra los siguientes tipos de tareas relacionadas con la validación:

> […] découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les status, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), charger de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier). (pp. 752-753)

En nuestro trabajo hemos seleccionado cuestiones que se tratan en ambas aritméticas, y complementaremos el análisis comparativo usando la *Metodología de las matemáticas*.

3. Análisis comparado de las Aritméticas

Del análisis que estamos realizando de las obras aritméticas de Eyaralar, vamos a comentar en este trabajo dos ejemplos que nos parecen suficientemente representativos:

3.1. Ejemplo 1: Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma

En el *Nuevo tratado de aritmética* (pp. 67-68), esta cuestión se trata de la siguiente forma:

64. MULTIPLICACIÓN DE UNA SUMA INDICADA POR UN NÚMERO.—Ejemplo: *Calcular los ingresos de una familia obrera, en seis días, sabiendo que el jornal diario es el siguiente: El padre, 8 pesetas; hijo mayor, 5 pesetas; hijo menor, 3 ptas; hija, 4 ptas.* Puede decirse. Cada día ganan $8+5+3+4=20$, y en los seis días $(8+5+3+4)\times 6 = 20\times 6 = 120$ pesetas, o bien: el padre en 6 días, 8×6, el hijo mayor 5×6, el hijo menor 3×6, la hija 4×6 y en total $8\cdot 6+5\cdot 6+3\cdot 6+4\cdot 6=48+30+18+24=120$, tendremos, pues, $(8+5+3+4)\,6=8\cdot 6+5\cdot 6+3\cdot 6+4\cdot 6$, es decir, que *para multiplicar una suma indicada por un número, basta multiplicar cada sumando por dicho número y sumar los productos parciales.*

Puede demostrarse fundándose en la definición de multiplicación y en las propiedades de la suma. Así, en general

$$(a+b+c)n=(a+b+c)+(a+b+c)+ \\ +(a+b+c)+\dots\text{(n veces)}=a+a+a+\dots\text{(n)}+ \\ +b+b+\dots\text{(n)}+c+c+c+\dots\text{(n)}=a\cdot n+ \\ +b\cdot n+c\cdot n\,(*).$$

Y resumiendo

$$\boxed{(a+b+c)\,n=a\cdot n+b\cdot n+c\cdot n}$$

Observaciones.—1.ª Teniendo en cuenta [**62**] se verificará $n(a+b+c)=n\cdot a+n\cdot b+n\cdot c$, que puede enunciarse en regla práctica.

2.ª Considerando la igualdad anterior en sentido contrario, tendremos $(a\cdot n+b\cdot n+c\cdot n)=(a+b+c)n$, es decir, que *cuando en todos los sumandos de una suma aparezca un factor común, puede suprimirse, efectuar la suma y multiplicar el resultado por dicho factor.* Esta operación se llama *sacar factor común.* Ejemplo: En el caso [**64**] sería $8\cdot 6+5\cdot 6+3\cdot 6+4\cdot 6=(8+5+3+4)\,6=20\times 6=120.$

Figura 1. Propiedad distributiva (NTA)

En la *Aritmética intuitiva* (pp. 65-66) se encuentra lo siguiente:

50. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. PROBLEMA.—*Efectuar* $(5+3) \times 4$ *sin obtener el valor del paréntesis.*

Si representamos gráficamente el producto que buscamos, obtendremos (fig. 12) el rectángulo

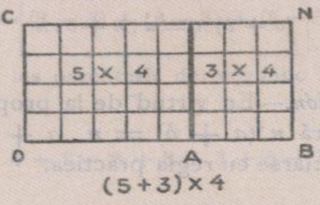


Fig. 12

OBNC, y si por el extremo del segmento de valor 5 trazamos una perpendicular, tendremos el producto descompuesto como indica la figura, y podremos escribir $(5+3) \times 4 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4$, o sea $20 + 12 = 32$; esto es, que *para multiplicar una suma por un número basta multiplicar cada sumando por el número y sumar los productos parciales.*

Demostración analítica. Por la definición de multiplicación

$$(5+3) \times 4 = (5+3) + (5+3) + (5+3) + (5+3)$$

y suprimiendo los paréntesis (25), y agrupando los sumandos iguales resulta

$$(5+3) \times 4 = (5+5+5+5) + (3+3+3+3)$$

y volviendo a tener en cuenta la definición de multiplicación

$$(5+3) \times 4 = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 4$$

En general,

$$\boxed{(a+b)\, n = a \cdot n + b \cdot n}$$

Observación.—En virtud de la propiedad conmutativa será $n\,(a+b) = n \cdot a + n \cdot b$, que puede enunciarse en regla práctica.

Figura 2. Propiedad distributiva (AI)

Comparamos ambos textos. La cuestión que plantean los dos es *formular y validar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma,* así como presentar algunas consecuencias y aplicaciones de la propiedad. Esta cuestión se concreta en secuencias de tareas diferentes en ambas obras.

En el NTA la primera tarea que se plantea es formular (conjeturar) la propiedad distributiva en términos de regla de cálculo equivalente. La técnica empleada es la resolución de un problema «real», contextualizado. El problema se resuelve de dos maneras, razonando a partir de las magnitudes y las operaciones con magnitudes implicadas. La equivalencia de las dos técnicas de resolución empleadas constituye un ejemplo de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, a partir del cual se formula la regla correspondiente.

La siguiente tarea propuesta la constituye la generalización de la propiedad, que se expresa ahora de forma literal (*cambio de registro*) y la *demostración* de la misma; se trata de una justificación de tipo matemático. Por último se plantean varias tareas de *aplicación*.

En AI el desarrollo es diferente. La primera tarea planteada es la misma; la técnica empleada es el cálculo de una expresión aritmética «sin obtener el valor del paréntesis», resuelto mediante una técnica gráfica que requiere de un cambio de registro. Además, la representación gráfica no solo cumple la función de ayudar a justificar la propiedad, sino que permite descubrirla y de hecho no hay paso intermedio entre la comprobación gráfica y la formulación general de la propiedad. La justificación de la técnica, se basa en argumentos visuales y pragmáticos.

A continuación aparece una nueva tarea, la «demostración analítica» de la propiedad enunciada; la técnica de demostración es de estructura similar a la que figura en el NTA, pero se trata de una comprobación efectuada con números concretos. La técnica se justifica, pues, por argumentos inductivos, no se valida de forma general sino que se opera sobre un único ejemplo, aunque, como en el NTA, el cálculo se realice a partir de la definición y de las propiedades previamente estudiadas. Este ejemplo único, que se presenta como modélico, recoge las características de la técnica de la demostración, basada en la definición de multiplicación y en las propiedades de la suma.

En AI se sirve de la representación gráfica para construir un modelo, una representación geométrica, de una propiedad aritmética. Podemos decir que si en NTA la demostración cumple la función de «convencer», el objetivo de la justificación gráfica, intuitiva es «comprender».

Por otra parte, también hay que señalar que en el primer libro se recogen unas aplicaciones de la propiedad distributiva [4] referidas a la simplificación de la multiplicación por 9 y por 11; estas consideraciones están situadas a pie de página, mientras que en el segundo libro, que también aplica la propiedad estudiada a la multiplicación por 9 y por 11, aparecen incluidas en el texto. Esta preocupación por las aplicaciones bien podría indicar la importancia que se concede a mostrar a los alumnos la «razón de ser» de la propiedad matemática estudiada, aunque también es verdad que el interés puede ser proporcionarles una interesante colección de casos en los que tiene sentido aplicarla para «comprobar» que efectivamente se cumple. Probablemente ambas cosas.

3.2. Ejemplo 2: División de un producto por un número

En el siguiente ejemplo se trata también de *formular y validar* una propiedad aritmética: la división de un producto por un número y *aplicarla* para obtener nuevas propiedades. Veamos la forma de tratar esta cuestión en ambas obras.

En el NTA (pp. 94-96), lo hace de la siguiente forma:

4. Tras demostrar que $n(a - b) = na - nb$.

85. EJEMPLO.—*Un carpintero tiene una tabla de las dimensiones indicadas en el esquema* (cuya área será 81×27), *que quiere dividir en 9 partes iguales:* (el área de una parte será $\frac{81 \times 27}{9}$). Esto puede hacerlo como indica la figura *a* o como indica la figura *b*. En el primer caso, el área de cada parte es $\frac{27}{9} \times 81$, y en el segundo caso es $27 \times \frac{81}{9}$; por tanto, $\frac{27 \times 81}{9} = \frac{27}{9} \times 81 = 27 \times \frac{81}{9}$; lo cual nos dice que *para dividir un producto por un número basta dividir un solo factor*. Pudiera demostrarse que $\frac{ab}{n} = \frac{a}{n}\,b$, porque [**70**-2.ª], $\left(\frac{a}{n} \cdot b\right) n = ab$.

Consecuencia. — Si $\frac{a}{n}$ es un cociente exacto c, $\frac{ab}{n} = cb$ también lo será; luego, *si un número divide a otro* a, *divide a sus múltiplos* ab.

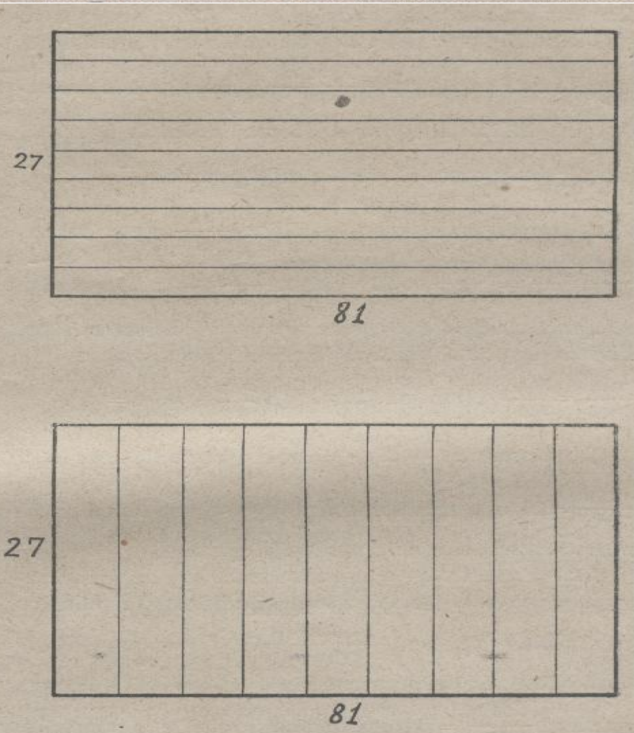
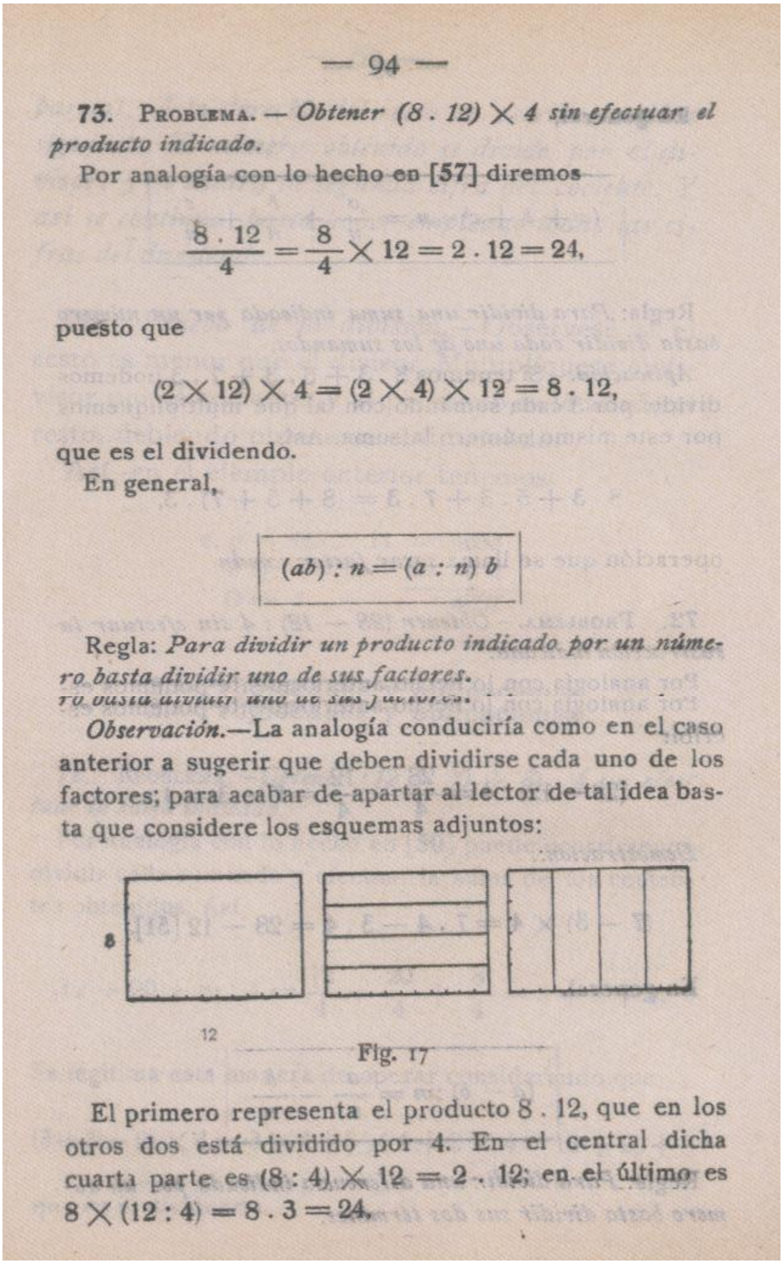


Figura 3. División de un producto por un número (NTA)

Este es el tratamiento que propone en AI (p. 94): [5]



— 94 —

73. Problema. — *Obtener (8 . 12) × 4 sin efectuar el producto indicado.*

Por analogía con lo hecho en [57] diremos

$$\frac{8 \cdot 12}{4} = \frac{8}{4} \times 12 = 2 \cdot 12 = 24,$$

puesto que

$$(2 \times 12) \times 4 = (2 \times 4) \times 12 = 8 \cdot 12,$$

que es el dividendo.

En general,

$$\boxed{(ab) : n = (a : n)\, b}$$

Regla: *Para dividir un producto indicado por un número basta dividir uno de sus factores.*

Observación.—La analogía conduciría como en el caso anterior a sugerir que deben dividirse cada uno de los factores; para acabar de apartar al lector de tal idea basta que considere los esquemas adjuntos:

Fig. 17

El primero representa el producto 8 . 12, que en los otros dos está dividido por 4. En el central dicha cuarta parte es (8 : 4) × 12 = 2 . 12; en el último es 8 × (12 : 4) = 8 . 3 = 24.

Figura 4. División de un producto por un número (AI)

5. Hay una errata en el texto original: en el enunciado del problema, se lee «(8 · 12) × 4» en lugar de «(8 · 12) : 4».

Al comparar ambos textos se observa que nuevamente, ante una misma cuestión plantea tareas diferentes en cada manual.

En el NTA vuelve a utilizar como técnica la resolución de un problema contextualizado, que resuelve mediante cálculos usando representaciones gráficas como justificación, antes de la formulación general y la demostración matemática. Nuevamente, la representación gráfica proporciona un modelo para el cálculo y proporciona una imagen mental de la propiedad.

En AI la técnica consiste en la resolución de un ejercicio numérico (no contextualizado), aplicando propiedades, previamente estudiadas, de la multiplicación y la división. Son propiedades que pueden ser usadas para demostrar la propiedad con generalidad, pero de nuevo se usa una justificación inductiva a partir de un solo ejemplo para enunciar la regla general. Otro tipo de justificación que utiliza explícitamente es la analogía (en este caso con la regla, ya vista, para multiplicar un producto por otro número); y en ese contexto utiliza una representación gráfica, similar a la del NTA, para señalar los límites del razonamiento analógico y como imagen mental de la propiedad.

Recapitulemos sobre el empleo en cada libro de la representación gráfica. En ambas obras cumple la doble función de servir, por una parte, como técnica para resolver la situación (carácter instrumental) y por otra, como medio de comprender o «verificar» la propiedad (carácter de representación)[6]. Pero mientras que en el Ejemplo 1 la representación gráfica aparecía en la AI antes del enunciado general del teorema y estaba en el lugar de la demostración, sustituyéndola, ahora aparece con una función explícita de evitar el uso abusivo de la analogía.

En la MM, Eyaralar trata explícitamente sobre la validación de los conocimientos matemáticos. En particular, destaca la importancia de la analogía, ligada a la función de «descubrimiento» de propiedades; califica la analogía como uno de los «métodos generales puramente lógicos» (p. 29), que emplea la matemática, además de sus métodos especiales: «aunque rigurosamente no es un método lógico, pues sus resultados necesitan demostración, es utilísimo como guía del pensa-

6. Esta doble función la hemos estudiado en Carrillo & Sánchez (2008).

miento en el descubrimiento de propiedades, y la Matemática acude a él con frecuencia» (p. 29).

Pero a la vez advierte de los riesgos de un uso abusivo:

> [...] y como en espíritus poco formados lógicamente tiene más fuerza la analogía que el razonamiento, conviene en estos casos mostrar intuitivamente y por medio de ejemplos numéricos repetidos cuál es la verdadera regla, y el error cometido aplicando la simple analogía. (p. 29)

y remite a la AI, precisamente a este mismo ejemplo.

4. Las técnicas de demostración en aritmética

La importancia que concede Eyaralar a la demostración en la formación de maestros, se refleja en el uso que hace de la misma en sus dos aritméticas (en las que se usa la demostración como objeto paramatemático) y también, de forma más explícita, en el contenido de su Metodología de las Matemáticas, en la que dedica varios apartados a esta cuestión. Contrastaremos, pues, los usos que hemos encontrado en las aritméticas con sus propuestas en la MM.

Se encuentran diversas referencias a la importancia que concede a una enseñanza razonada de las matemáticas. Así, cuando además de los fines utilitario y educativo, comunes a todas las disciplinas, habla de los «fines especiales» de la enseñanza de la matemática, incluye «3.° La formación de ciertos *hábitos mentales* entre los cuales citaremos la precisión y claridad, que puede referirse *a los conceptos, al razonamiento y a la expresión*» (p. 3).

Constata, sin embargo, la enseñanza rutinaria y la falta de razonamiento en las escuelas:

> La dificultad de los niños para el razonamiento abstracto, su docilidad mental y su facilidad para los mecanismos, tienden a que la enseñanza se haga en las Escuelas puramente rutinaria, sin intervención de la razón, sin demostración de ninguna clase. Esto, desde el punto de vista educativo, es una aberración, contra la que hay que ponerse en guardia [...] (p. 40)

El interés por los procedimientos que desarrollan el razonamiento de los niños, lo lleva a interrogarse por las condiciones de ese proceso; y señala que la dificultad, en muchas ocasiones, proviene de la falta de disponibilidad para los alumnos de conocimientos y de técnicas matemáticas:

> Hay reglas y propiedades que no pueden ser demostradas racionalmente en la Escuela. Unas veces por su propia dificultad [...], y otras porque exijan conocimientos previos […] en tales casos basta la comprobación intuitiva, pero advirtiendo siempre al alumno del escaso valor de tal procedimiento. (pp. 191-192)

Su defensa de un estudio razonado de las matemáticas, tiene en cuenta las posibilidades de los alumnos, pues:

> Este rigor lógico solo puede alcanzarse en una etapa elevada de los estudios, sustituyéndose en un principio por las demostraciones intuitivas y aun las simples comprobaciones, pero alcanzando en cada momento todo el rigor lógico de que es susceptible la inteligencia del alumno, cuidando mucho de no sobrepasarlo. (p. 33)

Y señala la siguiente graduación: «El niño pequeño se conforma con una simple *comprobación* (...). Más tarde viene la demostración *intuitiva* (...). Pero cabe también una graduación aún más fina dentro de cada grupo para aquellas propiedades difíciles de percibir» (pp. 180-181).

En el caso de la aritmética, defiende los procedimientos de validación que hemos visto en sus obras, pues «[…] el método que consiste en obtener por sí mismo las reglas y las propiedades hace que se razonen, no con el razonamiento explícito, difícil al niño y desagradable, sino con un razonamiento práctico e implícito que es diferente» (p. 191).

Entre los métodos especiales de demostración intuitiva en aritmética, cita el uso de la representación gráfica de los números, sea como conjunto de unidades o como relación entre magnitudes, especialmente adecuados en secundaria y sobre todo en primaria. Y aún destaca como preferible para algunas propiedades la representación de números mediante objetos para operar con ellos: «Varias de estas operaciones pueden realizarse con dibujos, pero es preferible llevarlas a cabo como indicamos por la actividad que lleva consigo el método, la complicación de sensaciones, etc.» (pp. 81-82).

También considera importante que los futuros maestros sean conscientes de los riesgos o los límites de cada tipo de demostración. Así, a propósito de las demostraciones intuitivas, dice: «Muy útiles en los primeros años de la enseñanza, deben proscribirse en cuanto la mente del niño alcanza la madurez lógica suficiente» (p. 50).

5. Consideraciones finales

Eyaralar concede gran importancia a la cuestión de la justificación de los conocimientos matemáticos y en sus obras presenta unas matemáticas lógicamente organizadas. Pero hemos constatado que su forma de validar el conocimiento matemático varía en las obras consultadas ¿Por qué se da esa diferencia? ¿Cuáles han sido los condicionantes de ese cambio?

En este trabajo se han podido apreciar algunas de esas diferencias. Tanto en las demostraciones como incluso cuando se trata de comprobaciones mediante un ejemplo, en AI recurre con mucha más frecuencia que en el NTA a las representaciones o demostraciones gráficas o argumentos visuales. Esta característica podemos relacionarla con la mayor importancia que, en esos momentos, se confiere a una enseñanza denominada intuitiva. Pero la diferencia no se limita al número. En la AI no solo hay mayor presencia de representaciones gráficas en la justificación de propiedades y teoremas, sino que tienen otra función. En NTA están acompañando a las demostraciones matemáticas, con una función de explicación, frecuentemente para dar sentido a estas; mientras que en la AI ocupan el lugar de la demostración, con la pretensión de hacerla más intuitiva. En este segundo libro es mucho más frecuente que represente gráficamente las propiedades y las justificaciones y no solo las exprese simbólicamente; se pueden presentar, no solo con la función de explicar, sino también de descubrir y, de esa manera, justificar.

Eyaralar utiliza y justifica técnicas inductivas —comprobar ejemplos— aunque lo hace de forma diferente en ambas obras. En el NTA suele introducir las cuestiones a través de problemas contextualizados y, desde ahí, generaliza formulando la propiedad en cuestión y la comprueba de forma analítica, aunque se ayude de algún dibujo. En la AI parte, en muchas ocasiones, de ejercicios descontextualizados, con datos más sencillos, usando la representación gráfica como explicación y justificación, sin llegar a formular la propiedad con toda generalidad. En la MM, de esta misma época, Eyaralar habla de la invención y la relaciona con estas técnicas inductivas; también utiliza lo que llama la «memoria visual» y pone ejemplos de las propias Aritméticas, en el que el dibujo ayuda a retener la imagen de la demostración.

Aunque en la AI aumenta el uso de técnicas no matemáticas, Eyaralar es consciente de los riesgos y límites dichas técnicas y tecnologías. Los comentarios que incluye en su Metodología de las Matemáticas marcan la frontera entre un tipo de razonamiento y otro y da diversas razones para su utilización: adecuación a las características e intereses de los estudiantes o bien no disponibilidad de otros conocimientos o tipos de argumentos.

Referencias

Assude, T. (1996). De l'écologie et de l´économie d'un système didactique: une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(1), 47-72.

Cabassut, R. (2010). Dans les manuels scolaires la rencontre entre la validation mathématique et les validations extra-mathématiques: un exemple de double dialectique des médias et des milieux. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaisance et d'action* (pp. 751-770). Montpellier, Francia: IUFM.

Carrillo, D. (2004). La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas. Pestalozzi y la enseñanza mutua. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(1), 11-44.

Carrillo, D. & Sánchez, E. (2008). Enseñanza intuitiva y representaciones gráficas en Eyaralar. En V. Juan (Ed.) *Museos pedagógicos. La memoria recuperada* (pp. 175-183). Huesca: Museo Pedagógico de Aragón.

Carrillo, D. & Sánchez, E. (2007). ¿Se puede innovar en la enseñanza de las matemáticas? La JAE y la aportación de José María Eyaralar. XIV, *Coloquio de la Sociedad Española de Historia de la Educación* (SEDHE). Guadalupe, Cáceres.

Chaachoua, H. & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaisance et d'action* (pp. 771-789). Montpellier, Francia: IUFM.

Comas Rubí, F. (2000). *Les relacions de la JAE amb Balears, els viatges pedagògics i la renovació educativa* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de les Illes Balears.

Del Pozo, M. del M. (2005). La renovación pedagógica en España (1900-1939): Etapas, características y movimientos. En E. Candeias (Coord.), *Actas de V Encontro Ibérico de Història da Educação. Renovação Pedagógica. Renovación Pedagógica* (pp. 115-159). Coimbra-Castelo Branco, Portugal: Alma Azul.

Eyaralar, J. M. (1922). *Nuevo tratado de aritmética*. Madrid: Reus.

Eyaralar, J. M. (1924). *La enseñanza de las matemáticas en las escuelas francesas*. Anales de la JAE, tomo XIX. http://cedros.residencia.csic.es/imagenes/Portal/ArchivoJAE/analesjae/1924-19-01.pdf

Eyaralar, J. M. (1932). *Aritmética intuitiva*. Madrid: Reus.

Eyaralar, J. M. (1933). *Metodología de la matemática*. Madrid: Reus.

Un passé qui ne passe pas
Le cas des « devoirs à la maison »

Gisèle Cirade
UMR P3 ADEF et GRIDIFE, Univ. Toulouse 2 (IUFM), France

Abstract. There are numerous difficulties that the future teachers of mathematics encounter when, within the framework of their training, they find themselves at the in front of the classes for which they are responsible. For some of these difficulties, the analysis brings to light the *historic constraints* on the profession. Based on a clinical study of training for several years at the IUFM of Aix-Marseille, we here discuss a very enlightening question in this respect, that of homework to be done at home. The extent of the collected corpus and the diversity of the questions formulated by the student-teachers show that this is a *problem of the profession* and it enables to bring to light an entire *system of conditions and constraints* that hinder or promote the development of their praxeological equipment.

Resumen. Numerosas son las dificultades que encuentran los profesores cursillistas de matemáticas cuando, en el marco de su formación, se encuentran a la cabecera de las clases cuya responsabilidad tienen. Para algunas de estas dificultades, el análisis pone en evidencia las *limitaciones históricas* que pesan sobre la profesión. Basándonos en un estudio clínico de la formación dispensada en el curso de varios años en el IUFM de Aix-Marsella, abordamos aquí una cuestión muy reveladora a este respecto: la de los deberes en la casa. La amplitud del corpus recogido y la diversidad de las preguntas formuladas por los profesores cursillistas muestran que se trata de un *problema de la profesión* y permiten sacar a la luz todo un *sistema de condiciones y limitaciones* que pesa sobre (o favorece) la elaboración de su equipo praxeológico.

Résumé. Nombreuses sont les difficultés que rencontrent les professeurs stagiaires de mathématiques lorsque, dans le cadre de leur formation, ils se retrouvent au chevet des classes dont ils ont la responsabilité. Pour certaines de ces difficultés, l'analyse met en évidence les *contraintes historiques* qui pèsent sur la profession. En nous appuyant sur une étude clinique de la formation dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille, nous abordons ici une question très révélatrice à cet égard, celle des devoirs à la maison. L'ampleur du corpus recueilli et la diversité des questions formulées par les professeurs stagiaires montrent qu'il s'agit là d'un *problème de la profession* et permettent de mettre au jour tout un *système de conditions et de contraintes* qui pèse sur, ou qui favorise, l'élaboration de leur équipement praxéologique.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 299-320)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Nombreuses sont les difficultés que rencontrent les professeurs stagiaires de mathématiques lorsque, dans le cadre de leur formation, ils se retrouvent au chevet des classes dont ils ont la responsabilité. Pour certaines de ces difficultés, l'analyse fait apparaître le poids du passé et met en évidence les *contraintes historiques* qui pèsent sur la profession. La question des devoirs à la maison (DM) est très révélatrice à cet égard, en ce sens qu'elle soulève de nombreuses interrogations qui renvoient au temps où le travail scolaire était structuré par l'opposition entre la classe et l'étude et où le « devoir » était pratiquement tout. Si les paradigmes didactiques ont évolué depuis le XIX^e siècle, le « devoir » est demeuré longtemps l'un des piliers de l'enseignement secondaire des mathématiques et le devoir à la maison constitue encore aujourd'hui une structure à la fois capitale et supposée capable d'assumer toutes les fonctions didactiques essentielles.

C'est ce rapport professoral au DM et ses conséquences didactiques que notre communication s'efforcera de préciser. En nous appuyant sur une étude clinique de la formation dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille (Cirade, 2006), nous avons pu, dans un premier temps, dégager de nombreuses interrogations portant sur la fréquence et la longueur des DM à donner et attestant d'une grande déconcertation de la part des professeurs stagiaires. Déjà, sur ce point, les réticences manifestées par ces débutants témoignent de la résistance des anciens paradigmes. Mais ce que dévoilent aussi les questions posées par les élèves professeurs, c'est la grande polyvalence didactique attribuée à ce dispositif qui servirait en quelque sorte de « réservoir de temps didactique ». Les DM sont vus comme permettant d'externaliser certaines fonctions, ce qui, à la fois, entraîne et légitime le désengagement didactique du professeur.

Afin de mieux situer certains obstacles que les élèves professeurs sont amenés à affronter au cours de leur formation à l'IUFM d'Aix-Marseille[1], nous présenterons ici rapidement un certain nombre d'analyses « macrodidactiques » dont ils sont destinataires. Nous le ferons en suivant l'une des « notices » qui complètent les notes du

1. Pour une présentation de la formation, voir Chevallard & Cirade (2006).

séminaire de didactique des mathématiques pour les élèves professeurs de deuxième année. Intitulée *L'espace de l'étude*, et rédigée par Yves Chevallard (2006), elle rassemble et organise un grand nombre de données, notamment historiques, sur la question de l'organisation de l'étude scolaire.

1. Les paradigmes organisateurs de l'étude

Le premier paradigme organisateur considéré est celui des lycées du XIX[e] siècle, où le travail scolaire est structuré par l'opposition entre *la classe* et *l'étude*, et où le temps passé en étude, au sein de l'établissement, l'emporte très largement sur le temps passé en classe. La classe, en outre, n'est nullement le lieu de ce qu'on nomme aujourd'hui, dans le jargon professoral, le « cours » : il s'agit alors d'un point de rendez-vous entre deux périodes passées en étude, où l'on corrige les devoirs faits par les élèves, dont ils ont remis copie au professeur, qui les a visés, annotés, avant d'en proposer une correction en classe et de fournir aux élèves leur ration de nouveaux devoirs à faire. Le travail du professeur ressemble ici à l'activité du « régent », figure déjà presque obsolète mais dont les fonctions didactiques ne sont pas pour autant périmées aujourd'hui. Ce paradigme classe/étude, traditionnel, va se trouver en quelque sorte dynamité par la promotion d'un autre paradigme venu des institutions du haut enseignement : le *cours*, c'est-à-dire le « cours magistral ». Mais le cours magistral, viable comme fait culturel, ne saurait se suffire à lui-même en tant qu'organisateur des apprentissages. À côté de cette structure, dont l'ombre tutélaire enveloppe encore la culture scolaire contemporaine, d'autres dispositifs didactiques vont émerger, et tout d'abord ce qu'on nommera alors, en français, la *conférence*, dans laquelle celui qui n'est plus un professeur donnant son cours, c'est-à-dire exposant magistralement la théorie et la technologie d'une question, mais un « maître de conférences », va présenter la technique en la mettant en œuvre devant les étudiants. Ceux-ci demeurent encore, selon l'ancien paradigme, de purs spectateurs : ils ne deviennent de véritables acteurs que dans les travaux qu'ils réalisent en dehors des cours et des « conférences », en étude pour certains de ces travaux, en travaux pratiques pour d'autres, sous l'autorité d'un enseignant « subalterne ».

Cette structure complexe, qui accroît l'importance de ce qui est *montré* à l'élève – de ce qui lui est enseigné [2] – par rapport à ce qu'il avait et continue d'avoir à *faire* lui-même, aura une lente évolution. Dans l'enseignement secondaire, la nouvelle organisation de l'étude, qui, on l'a dit, vient du haut enseignement universitaire ou professionnel, se figera dans une pratique tôt quoique vainement combattue par le ministère : le « cours dicté ». Dans le même temps, une idée se fait jour, qu'on désigne d'abord par l'expression de « méthode active » : l'idée de réaliser *en classe* certaines des activités auxquelles l'élève était jusque-là censé se livrer *en dehors* de la classe, « en étude ou à la maison » selon une expression encore employée aujourd'hui dans les textes officiels gouvernant l'enseignement des mathématiques. La notice se réfère sur ce point aux instructions générales du 1^er^ octobre 1946, qui poussent en avant un changement *de l'organisation de l'étude* impliquant en vérité un changement *dans le métier de professeur* lui-même. Il y avait, on l'a vu, l'ancienne figure professorale de celui qui donne à l'élève des travaux à faire, à qui l'élève fournit une copie de son travail, copie que le professeur va alors examiner et annoter attentivement : les travaux donnés à faire aux élèves sont alors le lieu par excellence de l'apprentissage. Il y a ensuite la figure emblématique, éternisée, du professeur *faisant son cours* – un cours dont on ne prend conscience que peu à peu qu'il ne saurait exister seul, et qui se voit donc complété par des travaux donnés à faire. C'est alors que, dans les instructions de 1946, surgit une nouvelle figure du professeur, qui va devoir assumer que ces travaux traditionnels soient, en partie, *réalisés en classe*. Tel est le pari des instructions de 1946, qu'elles énoncent dans les termes suivants :

> C'est, pour employer un terme traditionnel, le « cours », ou la « leçon du maître » qui apporte et communique aux élèves les notions nouvelles qu'ils doivent acquérir. Il ne peut s'agir quelle que soit la classe, d'un enseignement *ex cathedra*, où le professeur a seul la parole ; un tel « monologue » est trop souvent sans portée. La pratique de la « méthode active » s'impose [...] : elle exige, pour donner son plein rendement,

2. Dans son dictionnaire, Émile Littré (1801-1881) enregistre ce sens du verbe « montrer », sens encore vivace de son temps : « Enseigner. *Montrer* les langues, la grammaire, les mathématiques. *Montrer* à écrire. »

> beaucoup d'application et peut-être une certaine virtuosité que l'expérience conférera peu à peu.

Quels changements cela entraîne-t-il très concrètement dans la vie de la classe ? La réponse est sans ambiguïté – la part allouée au « cours » doit diminuer pour que croisse le temps donné aux « exercices » :

> ... il convient de réserver une fraction notable de chaque heure de classe au contrôle et à la mise en œuvre directe des notions acquises (récitations de leçons, recherche d'exercices, correction des devoirs), donc de limiter la durée du « cours » proprement dit, c'est-à-dire la présentation de notions nouvelles. Il ne peut être fixé, à cet égard, de règle précise ; l'essentiel est que le temps consacré aux « exercices » ne soit pas excessivement réduit.

On touche du doigt, ici, le mélange paradigmatique dont ce texte équilibré se fait l'avocat. Tout d'abord, il y a l'ancien paradigme du travail fait *hors de la classe*, avec la « récitation de leçons » et la « correction des devoirs ». Ensuite, il y a le *cours*, témoin du paradigme de la gloire des professeurs : le cours « proprement dit », car l'emploi métonymique du mot avait fini par désigner le *tout* de l'activité professorale en classe. Enfin, il y a les « exercices », le mot étant dûment guillemeté, car son emploi dans ce cadre fait encore problème, on va le voir. Le texte que nous suivons fait donc droit au besoin légitime d'explicitation concernant ce dispositif neuf, à propos duquel il apporte les précisions suivantes :

> ... une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de « problèmes », depuis le simple exercice d'application proposé pour illustrer un théorème, pour rendre vivante une formule, jusqu'au « devoir », exigeant un effort plus personnel, rédigé hors de la classe et donnant lieu ensuite à un compte rendu précis et détaillé.

Le « compte rendu précis et détaillé » est là un reste de l'ancien paradigme, où le devoir était tout, ou presque. « L'étude et la recherche » de la solution de problèmes constitue l'élément neuf, à ce point d'ailleurs qu'il suscite un néologisme ambigu, celui d'« exercices *improvisés* », c'est-à-dire improvisés *pour les élèves* – lesquels, contrairement à une tradition bien établie, ne les auront pas étudiés *préalablement*, hors de la classe. À ce propos, le texte cité précise :

> Les exercices « improvisés » (pour les élèves) doivent faire l'objet d'une préparation de la part du maître ; ils ne seront profitables qu'à cette condition ; leur choix doit permettre de saisir, sous leurs différents aspects, les initiatives à prendre pour mettre en train, pour conduire un raisonnement.

La conduite du travail en classe appelle ainsi une modification des compétences nécessaires au professeur, à qui l'on demande désormais, en quelque sorte, de gérer ensemble, *hic et nunc*, le savoir à enseigner, les élèves, et leur rapport naissant ou déjà figé au contenu mathématique travaillé. Les rédacteurs des instructions écrivent à ce propos :

> … une question étant à résoudre, on acceptera, dans les tâtonnements de la recherche, toute idée raisonnable ; on comparera les démarches possibles ; on montrera comment l'on fixe son choix ; on fera comprendre la nécessité d'une mise au point ; on guidera peu à peu vers une solution harmonieuse et satisfaisante, dont on fera apprécier la valeur.

Le professeur de mathématiques, qui pouvait être jusqu'alors un enseignant au sens restreint du terme, doit désormais devenir un *directeur d'étude* et un « aide à l'étude » dans l'espace même de la classe. Il n'est pas, d'ailleurs, jusqu'au « cours proprement dit » qui ne doive permettre « la participation constante des élèves », lesquels sont censés désormais participer « à l'élaboration du "cours", c'est-à-dire à l'exposé et à l'application des questions nouvelles ». La chose, si inouïe soit-elle, ne devrait pas offrir de difficultés insurmontables « si le professeur sait partir de l'expérience accessible à l'enfant, enchaîner les faits dans une progression naturelle, élargir peu à peu le champ des acquisitions, construire logiquement un édifice solide et harmonieux ».

Le texte de 1946 est tendu, en équilibre instable, entre un passé dont il rejette certains éléments et un avenir où devrait s'imposer une nouvelle façon d'enseigner. Ainsi y vitupère-t-on encore la « pédagogie de régent » au profit de l'exposé magistral : « il va de soi », lit-on, que « les élèves ne doivent, sous aucun prétexte, garder leur livre ouvert sous les yeux pendant que le professeur expose une question ». La gloire des professeurs n'est pas morte et la parole magistrale n'admet pas de rival ; mais, dans le même temps, cette parole se trouve délogée de sa position d'extériorité emblématique : le cours dicté « est à proscrire » et il convient de décourager « la prise de notes “à la volée” par les élèves cherchant à enregistrer la totalité d'un exposé ». Il n'est pourtant pas interdit au professeur de procéder à « la dictée d'un résumé ou d'un texte bref destiné à modifier ou à compléter, sur quelque point, la rédaction d'un livre ». Le « livre », on le voit, est toujours là, comme dans l'ancienne pédagogie de régent ; mais le professeur le complète, voire le corrige : sa parole prime, son verdict s'impose. Et pourtant – telle est la vraie nouveauté – cette parole magistrale doit *composer avec les élèves*. Tel est le nouveau régime didactique, que, presque subrepticement, les instructions affirment en ces termes : « Une telle dictée, qui doit toujours être courte, constituera d'ailleurs un exercice actif et profitable si elle est présentée comme une mise au point, faite en commun, de la question traitée. »

D'autres novations sont poussées en avant, tel le travail en « petites équipes d'élèves, dont chacune reçoit la charge d'exposer une question déterminée, en présentant en même temps quelques exercices d'application imaginés ou choisis par elle. » Le travail en équipe trouve sa place lors des *séances de travail dirigé*, au cours desquelles le professeur a la possibilité « d'étudier les réactions et les comportements de chacun devant une tâche proposée » et, en conséquence, de « donner, individuellement, les conseils appropriés ».

Le travail du professeur change ainsi profondément. À la simplicité de l'ancienne organisation – celle du cours complété par *le* devoir –, la nouvelle organisation didactique semble vouloir substituer un système complexe et exigeant, qui mêle indissociablement l'action du professeur à l'activité supposée des élèves.

2. Les DM : fréquence et longueur

Sur la voie ouverte par les instructions de 1946, d'autres avancées touchant à l'organisation didactique verront le jour – au moins dans les textes. Mais nous nous arrêterons ici sur les obstacles que dressent devant les professeurs stagiaires aujourd'hui, 60 ans après les instructions de

1946, les vestiges des paradigmes didactiques hétérogènes que nous venons de rappeler. On a dit ainsi que, dans l'ancien paradigme didactique, le devoir était quasiment tout ; on a souligné aussi qu'il demeurera longtemps l'un des deux ou trois piliers de l'enseignement secondaire des mathématiques. De cette tradition de longue durée, presque immémoriale pour les générations les plus anciennes de professeurs, il demeure aujourd'hui encore un habitus, qui fait du devoir à la maison une structure à la fois capitale et en quelque sorte « totipotente[3] », supposée capable d'assumer toutes les fonctions didactiques essentielles. Le premier caractère « vestigial », à cet égard, est cette idée prégnante que le professeur devrait proposer à ses élèves, au rythme par exemple d'un par quinzaine, un « gros devoir ». Or, depuis les années quatre-vingts et jusqu'à aujourd'hui, les textes officiels incitent les professeurs à abandonner cette structure didactique à l'ancienne, au profit de « devoirs à la maison » à la fois *courts* et *fréquents*. Il s'agit là d'une tentative de rééquilibrage entre l'ancien paradigme didactique (qui voulait des « gros devoirs ») et le nouveau, qui fait de la classe le lieu premier de l'activité personnelle de l'élève. C'est ainsi que, dans le programme de seconde en vigueur au milieu des années 1980, on lit :

> *La résolution d'exercices et de problèmes* doit jouer un rôle central dans le *travail personnel des élèves*. À cet effet, on combinera une participation active des élèves aux travaux effectués en classe avec des travaux effectués à la maison (préparation d'exercices, rédaction *fréquente* de devoirs) et *quelques* devoirs de contrôle.

Notons la référence à la « préparation d'exercices », typique de l'ancien paradigme, ainsi que la référence au *petit* nombre de « devoirs de contrôle ». Pour la même classe, mais au milieu des années 1990 cette fois, les mêmes préconisations sont reprises et affinées. On n'y parle plus de *devoirs* – vocabulaire traditionnel qui, toutefois, ne disparaîtra pas – mais, plus largement, de « travaux de rédaction », dont il est répété qu'ils doivent être courts, fréquents et diversifiés :

3. En biologie, on appelle cellule totipotente une cellule souche capable d'engendrer un organisme tout entier : une telle cellule a la capacité de donner naissance à tous les types de cellules de l'organisme.

> Les travaux individuels de *rédaction* (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les *capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite* ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être *fréquents*, mais leur *longueur* doit rester raisonnable.

Sous le titre *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée*, l'ensemble de ces prescriptions fera l'objet d'une synthèse, datée du 27 mars 1997, due au groupe des mathématiques de l'Inspection générale de l'éducation nationale (IGEN, 1997). Les rédacteurs distinguent, parmi les « travaux écrits en dehors de la classe », les deux catégories que sont les « exercices d'entraînement », qui « doivent, en règle générale, accompagner toutes les séances de mathématiques », d'une part, et les « travaux individuels de rédaction », comportant « notamment les "devoirs à la maison" », d'autre part. À propos de ces travaux, les auteurs précisent que leur fréquence est chose essentielle – la tendance est à un travail de rédaction chaque semaine –, et que, par voie de conséquence, il faut réduire leur *longueur* ainsi que leur difficulté par rapport à une norme ancienne qui n'est jamais désignée qu'en creux. Bref, écrivent-ils, « il vaut mieux faire "souvent et court" que "rarement et long" ».

Face à ces indications que la formation donnée à l'IUFM leur fait connaître de manière insistante, les professeurs stagiaires apparaissent souvent déconcertés. Les questions fusent. Lors de la première séance du séminaire[4], un stagiaire de la promotion 2000-2001 demande : « Faut-il donner des DM à rédiger toutes les semaines ? » Lors de la quatrième séance, il reprend sa question : « Faut-il donner un DM (à rédiger) toutes les semaines ? » À l'occasion des questions de la séance 2, un autre stagiaire s'était montré dubitatif : « Est-ce qu'un devoir à la maison par semaine n'est pas trop ? » Lors de la séance 4 de l'année suivante (2001-2002), un autre stagiaire feint de n'avoir pas clairement compris la consigne et demande : « Doit-on faire des DM courts et très fréquents ou

4. Ce que nous nommerons « séminaire » dans ce texte est le « séminaire de didactique des mathématiques » qui est proposé aux élèves professeurs dans le cadre de leur deuxième année de formation à l'IUFM.

alors longs et plus rares ? » La même année, lors de la séance 5, un stagiaire défend âprement sa manière de faire, dont la description montre qu'il n'a pas su combiner augmentation de la fréquence et diminution de la longueur du travail demandé aux élèves :

> Fréquence des DM sachant que je donne aussi d'une séance sur l'autre des exercices ? Pour l'instant, je donne un DM tous les 15 jours, avec une semaine pour le faire. Certains élèves n'ont pas fait le DM en entier, et ils ne m'ont pas même posé de question sur les « trous ». Est-ce parce qu'ils n'ont pas eu assez de temps ? Est-ce parce qu'ils ont cherché, mais pas trouvé ?

Parfois, la consigne est poussée en quelque sorte à l'absurde, ce qui est sans doute une autre forme, peu consciente, de résistance. Alors que le texte de l'Inspection générale parle d'un « travail hebdomadaire de rédaction en temps libre » en précisant que cette règle s'applique « hors les semaines où figure un devoir de contrôle », un stagiaire de la promotion 2002-2003 formule l'interrogation suivante : « Je donne aux élèves des DM notés toutes les semaines. Mais dois-je aussi en donner les semaines où il y a un contrôle en classe ? » Lors de la séance suivante, une autre stagiaire revient à la charge : « Peut-on donner un DM la même semaine qu'une interrogation ? » Lors de la journée de rentrée de la promotion 2003-2004, une stagiaire interroge l'équipe de formation, en s'embrouillant un peu : « Qu'entendez-vous par donner des interrogations moins souvent et plus longues [*sic*] et des DM plus souvent et moins longs ? Et comment mettre en place un tel dispositif ? » Lors de la quatrième séance du séminaire, un autre stagiaire recherche la validation d'un système sans doute plus conforme aux prescriptions officielles : « Un "petit" DM tous les quinze jours est-il un bon rythme de travail pour les élèves ? » La même année, lors de la séance 17, c'est-à-dire tardivement, un autre stagiaire exprime son malaise devant les effets objectifs du conflit des paradigmes que, sans doute, il n'appréhende pas clairement : « Est-il gênant de changer la fréquence des DM ? », interroge-t-il.

C'est que, insistons là-dessus, la plupart des stagiaires arrivent en deuxième année d'IUFM avec, sur le point examiné ici, des réflexes d'ancien régime, ou plutôt avec le regret de devoir renoncer aux « gros devoirs » qui en étaient l'emblème. Et lorsque la consigne « nouvelle » est entendue, selon un schéma classique elle porte le professeur stagiaire à évoquer des modifications de *l'ensemble* du système des travaux demandés aux élèves. Lors de la séance 5 de l'année 2001-2002, un élève professeur interroge ainsi : « Peut-on ne fonctionner au niveau des travaux à faire chez soi en ne donnant qu'un devoir à la maison par semaine (assez court) et en ne donnant rien d'autre puisque tous les exercices sont faits en classe entière ? » L'acceptation de la nouvelle norme semble ainsi impliquer une compensation par diminution du travail à faire d'une séance sur l'autre. Dans une autre orientation de pensée, un stagiaire de l'année 2002-2003, prenant acte de la nouvelle consigne, voudrait en inférer une autre modification, mais de sens inverse cette fois : « Les devoirs à la maison doivent être courts et fréquents. Peut-on alors leur donner à faire en moins d'une semaine ? »

Le « modèle » à implanter dans les classes est ainsi perçu comme structurellement instable. Certains s'en disent déconcertés, telle cette stagiaire de l'année 2003-2004 qui, lors de la séance 8, dit sa confusion dans les termes suivants : « De quelle longueur doivent être les DM ? J'ai eu plusieurs versions différentes ; donc j'aimerais savoir ce que je dois faire. » Car, on l'a noté, on entend d'abord l'injonction portant sur la *fréquence* des DM, et ce n'est que de façon plus hésitante qu'on enregistre le réquisit concernant leur *longueur*. La résistance du paradigme ancien, ébranlée sur le premier point, ne lâche pas sur le second. En outre, les réticences rencontrées ne s'atténuent pas nettement au fil des années. Visiblement, le passé ne passe pas.

3. DM et désengagement didactique

La tentation d'*externaliser* le travail par le moyen des DM n'est peut-être jamais aussi forte qu'à l'approche des vacances scolaires, où le bilan de l'avancée de l'étude apparaît, en règle générale, déficitaire : on voudrait en avoir fait plus, et on projette alors de rattraper le temps perdu en conjuguant DM et vacances, comme en témoignent les deux questions suivantes :

– Peut-on donner, pendant les vacances, un DM qui va permettre d'avancer dans le chapitre ?

– Début janvier, mes élèves ont un contrôle commun à toutes les classes de 4^{e} portant sur ce qui a été fait depuis la rentrée. Puis-je leur donner un DM récapitulatif à faire pendant les vacances ?

Ce n'est qu'en 2005-2006 que les notes du séminaire font, sur ce point, apparaître une très courte réponse, en réaction à une question posée à la veille des vacances de Toussaint : « Faut-il donner à faire un travail important aux élèves pendant les vacances scolaires ? » La r*éponse express* fournie par le responsable de la formation est la suivante :

> La réponse est essentiellement négative : il ne faut pas donner aux élèves un « travail de vacances » qui prétende *faire avancer le temps didactique*, même si l'on peut – et si l'on doit, en règle générale – proposer un travail de bilan, d'inventaire de ce qui a été fait, de ce que l'on sait faire, etc.

La concision de la réponse ne permet guère d'apercevoir les raisons de cette prise de position. Sa motivation se résume en une expression, celle de *désengagement didactique*, dont on trouve une explicitation à propos de la fonction « attrape-tout » assignée aux DM par certains professeurs stagiaires, à l'occasion de la question suivante : « Peut-on donner comme DM un des thèmes du programme de 2de ? » La réponse proposée commence par expliciter le terme de *thème* employé dans la question, dont l'auteur désigne ainsi ce que le programme de seconde d'alors appelle des *thèmes d'étude* et que le responsable du séminaire propose d'appeler des thèmes d'études *libres* (TEL), pour distinguer ces items optionnels des contenus obligatoirement étudiés, les thèmes d'études *imposés* (TEI). Après un développement sur le dispositif des TEL et leurs contenus, la réponse formulée en vient aux principes qui fondent le rejet du scénario envisagé dans la question :

> Le choix de « donner en DM » l'un des TEL est en vérité *déraisonnable*, à l'instar de *tout* choix conduisant à un *désengagement didactique* du professeur – ici en "dégageant en DM" ce dont il lui incombe de diriger l'étude avec vigilance – en classe et hors classe ! En vérité, l'*organisation didactique* relative aux TEL est dans son principe *la même* que l'organisation de l'étude de *n'importe quel autre thème* figurant au programme de la classe : l'étude d'un TEL doit procéder selon les

> « normes », déjà travaillées dans le Séminaire, concrétisées par le triptyque Activités / Synthèses / Exercices.

À ce développement s'ajoute la remarque suivante, qui participe de la même inspiration :

> Les travaux *hors classe*, toujours utiles et parfois nécessaires, ne doivent toutefois pas prendre une place excessive. Dans tous les cas, ils doivent assumer des *fonctions didactiques précises* : travaux préparatoires à une phase de travail en classe, mises en forme de travaux faits en classe (dont les synthèses), etc.

Une autre question surgira quelques semaines plus tard : « Peut-on proposer la démonstration d'un théorème en DM (à la condition évidemment de guider suffisamment les élèves) ? » Notons ici que la tentation d'externaliser ce qui est censé se faire en classe ne concerne pas que les DM : « Plusieurs collègues, pour tenir les délais, demandent à leurs élèves d'apprendre le cours sur le bouquin, pendant les vacances… Ceci bien sûr pour les révisions du collège (définition et somme de vecteurs). Qu'en pensez-vous ? »

4. La polyvalence didactique des DM

Mais revenons aux DM. Le questionnement entêté des élèves professeurs dépasse de loin la seule question des vacances scolaires. À travers leurs interrogations, on peut voir se déployer une conception protéiforme des DM, dont la polyvalence didactique paraît indéfiniment extensible, en conformité avec l'ancien rôle dévolu aux « devoirs », qui en faisait un lieu essentiel aux apprentissages scolaires. C'est ainsi que, toujours à propos des TEL en classe de seconde, on voit apparaître des questions dont certaines sont assorties de considérations typiques de la vision des DM comme « réservoir de temps didactique » : « Peut-on donner un thème d'étude en devoir à la maison (exemple : irrationalité de $\sqrt{2}$) ? »

Toutefois, d'autres fonctions « compensatoires » sont attribuées aux DM. En 2004-2005, lors de la dernière séance du séminaire, et nonobstant le travail fait au cours de l'année, un professeur stagiaire s'entête : « Peut-on traiter certaines parties du cours sous forme de DM ? » La raison d'une telle externalisation est parfois précisée ; dans la question ci-après, posée par le *même* stagiaire alors que l'année est déjà bien avancée, c'est le retard pris dans l'avancée de l'étude qui est explicitement invoqué :

> J'ai pris du retard par rapport à ma progression. Je suis conscient que les devoirs à la maison doivent être courts et ont pour but la vérification de l'acquisition par les élèves des notions de cours. Vu le contexte, est-ce que je peux utiliser un DM pour compléter un cours (démonstration d'une propriété par exemple) ?

D'autres fois, toujours dans le souci de gagner du temps, on pense pouvoir comprimer en un DM toute une partie du programme. Le « renvoi en DM » de ce qui devrait se faire en classe apparaît souvent, à cet égard, comme l'aveu d'une minoration – voire d'une péjoration – du contenu mathématique concerné et/ou de l'activité d'étude à conduire sur ce contenu. Ainsi en va-t-il typiquement avec la question suivante, due au même auteur que les deux précédentes : « Peut-on traiter le chapitre *Statistique* sous forme d'exercices et de DM ? » Il est rare que l'on envisage de traiter ainsi tout un domaine d'études inscrit au programme de la classe. Plus souvent, ce sont des parties jugées un peu secondaires de thèmes ou de secteurs d'études déterminés dont on souhaiterait reléguer l'étude en DM. La question suivante témoigne à cet égard qu'il s'agit là d'une pratique qui, sans faire norme dans la profession, y apparaît prégnante [5] :

> Vaut-il mieux donner des devoirs à la maison visant à faire travailler les techniques qui seront évaluées lors du contrôle (c'est-à-dire un DM qui serait une répétition générale du futur contrôle), ou alors des DM où on demanderait des choses nouvelles que l'on n'aborderait pas en classe ? Les professeurs de mon lycée (dont mon maître de stage) préfèrent donner des DM du deuxième type alors que j'avais pour habitude de donner des DM du premier type.

La question suivante, qui évoque une organisation de l'étude sans doute largement imaginaire, tente d'intégrer un tel usage des DM à un cadre plus large : « Peut-on faire un chapitre (par exemple "Droites remar-

5. L'auteur de la question avait déjà fait une année de stage l'année précédente : d'où la référence à son « habitude ».

quables du triangle”) uniquement en DM, en avançant petit à petit (en en parlant régulièrement en classe), mais sinon en les laissant mettre en place leur cours ? » Le désengagement didactique est ici évident. Il est moins net, bien entendu, quand le contenu mathématique du DM et le travail demandé à son propos sont censés s’inscrire dans le cadre de *révisions*. Un élève professeur soulève ainsi la question suivante : « Peut-on utiliser une partie d’un DM pour faire réviser des notions des classes antérieures ? » Il s’agit là d’un cas extrême. Généralement, les révisions envisagées concernent le travail de l’année, notamment lors des césures qu’instituent les vacances scolaires, comme il en va dans cette question : « Quelle quantité de travail doit-on donner pendant les vacances ? Et faut-il revenir, dans ces devoirs, sur les connaissances de début d’année pour les réactiver, les consolider, les élargir ? »

Cette remontée dans le temps didactique apparaît comme une autre tentation des professeurs stagiaires : sans doute s’agit-il là aussi d’un vestige, en forme d’« inconscient d’école » (Bourdieu, 2000), d’un temps où le programme d’une classe comportait officiellement des révisions du programme de la classe précédente. Cette remontée est souvent douloureuse et, à cet égard, les DM semblent avoir une image ambivalente. Dans certains cas, en effet, c’est un DM qui va révéler la volatilité des connaissances et des compétences, ainsi qu’il ressort de cette question :

> À la fin du mois, ma classe de 4e a un devoir commun portant sur les chapitres relatifs au numérique traités depuis le début de l’année. Dans cette optique, je leur avais donné un DM de révisions pendant les vacances de Noël. J’ai constaté que les calculs sur les fractions ont été majoritairement ratés. Alors que je suis loin d’être en avance, dois-je prendre le temps, avant le devoir commun, de revenir sur ce chapitre avec eux ?

Dans d’autres cas, à l’inverse, le DM apparaît comme l’antidote au poison de l’oubli. Ainsi en va-t-il, par exemple, dans la question reproduite ci-après :

> J’ai corrigé pendant les vacances le dernier DS de ma classe. Pour ce DS, il y avait plusieurs chapitres à réviser. Les élèves ont plutôt bien réussi les exercices correspondants au chapitre que l’on était en train de traiter, mais ils ont très mal réussi les exercices correspondants aux chapitres les plus

> anciens. Il s’agissait pourtant de notions dont on a à nouveau besoin maintenant. J’ai donc décidé de leur donner un DM très court portant sur ce chapitre ancien pour les obliger à le réviser. Est-ce une bonne méthode ?

D’une façon plus générale, le DM reçoit une fonction d’*économiseur* du temps passé en classe, notamment pour ce qui apparaît au professeur débutant comme des répétitions ou des reprises sans grand intérêt – peut-il penser. La tentation de faire de semblables économies est forte, notamment en classe de seconde, à propos de la géométrie plane. En 2002-2003, dès la séance 3, une stagiaire soulève la question : « Le chapitre des configurations planes n’est composé que de résultats vus au collège. Peut-on donner des DM sur le sujet, sans faire de cours en classe, puis faire un bilan des difficultés pendant une heure ? » Les « configurations du plan » constituent, en seconde, la terre d’élection des révisions qu’on se plait à envisager de renvoyer en DM. La même professeure stagiaire formulera un peu plus tard, au cours de deux séances successives, une interrogation insistante dont on reproduit ici la première formulation :

> Pour introduire l’étude des configurations du plan, je compte donner un DM à faire pendant les vacances faisant appel aux techniques apprises au collège, puis faire une synthèse sur ces techniques et théorèmes à la rentrée. Ce dispositif est-il approprié ?

Une autre élève professeure posera plus tardivement le même problème, mais dans une forme générale, qui a le mérite de ne pas apparaître comme occasionnaliste et explicite pour cela une fonction didactique permanente – parmi d’autres – assignée aux DM : « Peut-on s’aider d’un DM pour réactiver le savoir ancien afin d’attaquer un thème nouveau ? » Cela dit, les fonctions didactiques que l’on assigne au DM sont en vérité beaucoup plus ouvertes encore que les inventaires précédents ne le suggèrent. C’est ainsi qu’un DM peut être vu comme un moyen de préparer l’étude à venir, et d’aller de l’avant plutôt que de revenir en arrière, comme l’atteste cette question : « Est-il intéressant de donner un “DM – Activités” afin d’amorcer de nouvelles notions plus tard dans l’année ? »

Mais une autre fonction est également proposée de façon significative, en laquelle on ne peut manquer de voir une trace de l'ancien paradigme scolaire : un DM constitue un travail dans lequel on va *plus loin*, plus *profond*, ou qui, du moins, se prête à cette possibilité. La vision du DM comme lieu d'une étude plus approfondie apparaît prégnante, même lorsqu'elle est formulée de façon interrogative : « Est-ce qu'un devoir à la maison peut être plus difficile que les exercices faits en classe et demander éventuellement plus de raisonnement ? » Mais l'appel au DM pour approfondir le travail de la classe se heurte vite au réel, et la déception est parfois source de sagesse :

> Quelle structure serait la meilleure pour un travail de recherche des élèves ? En effet, dans un devoir à la maison, ils semblent démotivés par un problème qu'ils parviennent mal à résoudre, surtout si la note qui suit est faible.

Au demeurant, les élèves ne sont pas seuls à rechigner – en quelques cas, les parents font de la résistance, comme le signale un professeur stagiaire :

> Dans les DM, j'essaie de donner trois quarts d'exercices d'application du cours et un quart (souvent 1 ou 2 exercices) de problèmes qui, plus complexes, font appel à des notions vues dans les classes précédentes. Pendant la rencontre parents-professeurs, certains se sont plaints que je donnais des exercices dont tous les éléments n'étaient pas dans le cours. Je leur ai répondu que ces exercices faisaient appel à des notions antérieures, mais ces parents ne semblaient pas convaincus. Est-il légitime de donner en DM des exercices « d'approfondissement » ?

Même en face du sobre démenti apporté par l'attitude de certains élèves et de certains parents, la prégnance du « gros devoir », où le professeur comme les élèves seraient censés donner toute leur mesure, est indéniable. Les questions, telle la suivante, le rappellent avec entêtement : « Peut-on évaluer des tâches qui ne sont pas des compétences exigibles, par exemple dans le but de mettre en valeur le travail fait en DM ? » La soif d'excellence qui résonne dans le questionnement des professeurs stagiaires s'autorise de la présence dans la classe d'élèves visant à poursuivre des études scientifiques. La question suivante fournit à cet égard un exemple presque cocasse : alors que la rentrée 2000 voit, en seconde, l'éviction du programme de la notion d'écart type, l'auteur de la question voudrait réintroduire l'écart type par le biais d'un DM :

> En seconde, en statistiques, l'écart type n'est plus au programme. Peut-on quand même en parler ? Plus précisément, j'ai choisi, à chaque DM, de rajouter quelques questions (hors barème) pour ceux qui envisagent une 1re S. Puis-je alors parler d'écart type à la fin d'un DM de statistiques ?

L'utilisation méliorative des DM est envisagée notamment lorsqu'une classe ne comporte que quelques « bons élèves », ce qui contraint le professeur à un enseignement dont le niveau reste modeste. En ce cas, les DM sont vus comme une manière de compléter vers le haut l'enseignement proposé :

> J'ai une classe de 34 élèves plus portée sur les matières littéraires (*i.e.* ils comptent aller en 1re L). Seules 4 ou 5 personnes souhaitent aller en 1re S et ont un bon niveau. Puis-je donner à ces élèves des DM différents ?

Les DM sont vus comme un *ailleurs* de la classe, qui donnerait licence au professeur d'opérer comme il ne se le permet guère dans le cadre exigu des séances en classe. Plusieurs professeurs stagiaires, ainsi, envisagent les DM comme un moyen de compenser les déficits constatés chez certains élèves, voire de différencier leur action didactique : « Un DM peut-il servir au soutien d'un groupe d'élèves ? Dans ce cas, comment faire lors de la correction en classe ? » Certains professeurs débutants peuvent se laisser entraîner dans ce qu'ils croient être une brèche ouverte dans la routine de la classe. La question qui suit témoigne de ces aventures didactiques dont ni les enjeux, ni l'issue n'apparaissent réellement maîtrisés : « Est-ce judicieux de donner à faire en DM un exposé sur la vie et l'œuvre d'un mathématicien (Thalès, Pythagore, etc.) ? »

Ce n'est pas, bien entendu, que la formation prodiguée reste muette sur la question. Mais c'est bien difficilement que ses préconisations semblent entendues par des jeunes professeurs, vieux déjà de tout un inconscient scolaire non analysé. L'intégration des DM dans une organisation mathématique d'ensemble ne va pas de soi. Les devoirs à la maison conservent d'un passé prestigieux, certes ancien, mais souterrainement influent, l'image d'un dispositif à fort pouvoir d'attraction didactique, capable de tout permettre – surtout ce que les séances en classe, dans leur relatif dénuement, semblent échouer à apporter. La question reproduite ci-après, où une conception emphatique et d'un autre temps est opposée à la vision simple et modeste du temps actuel, exprime ainsi à cet égard une tension essentielle dans la profession qu'embrassent les professeurs stagiaires :

> Sur un chapitre donné, est-il préférable de donner un DM (et de le corriger) avant un DS, de manière à préparer en quelque sorte le DS, ou bien de le donner après le DS, de manière cette fois à approfondir les notions vues dans le chapitre et à réinvestir et/ou améliorer les connaissances ?

5. Le devoir et sa correction

La rémanence dans l'inconscient scolaire du rôle assigné aux devoirs dans l'ancien paradigme ne se heurte pas qu'aux injonctions officielles qui donnent au DM un tout autre rôle dans l'organisation de l'étude. Ainsi qu'on l'a vu, dans la pédagogie d'autrefois, le devoir faisait couple avec la séance en classe qui, elle, était dévolue en très grande partie à la *correction* du devoir, en quoi consistait l'essentiel de l'activité du professeur en présence des élèves. Or cet aspect de l'ancienne organisation didactique semble aujourd'hui naufragé : tout se passe en effet comme si ni les élèves ni les professeurs, en cela à l'unisson, ne supportaient plus ce temps donné à une affaire jugée par nombre d'entre eux terminée une fois la copie remise au professeur et rendue par celui-ci notée et annotée. Rien sans doute n'est plus éloigné d'une organisation de l'étude où le travail accompli hors la classe avait pour objet de nourrir le travail en classe, qui venait en quelque sorte confirmer, renforcer, stabiliser les efforts entrepris en étude par les élèves. La réticence des professeurs stagiaires devant l'exigence supposée de procéder à une correction en bonne et due forme des travaux donnés à faire s'exprime donc en une longue plainte, qui égrène des « solutions » alternatives, motivées par des expériences frustrantes, comme l'indique aussi la question suivante :

> Comment organiser la correction d'un contrôle ou d'un devoir à la maison ? J'ai fait l'expérience d'une correction au tableau où j'ai

> expliqué, corrigé, les erreurs les plus fréquentes que j'avais relevées, mais j'ai eu l'impression que peu d'entre eux écoutaient ou voyaient l'intérêt de cette correction.

Plusieurs stratégies se font jour, dont la plus commune est sans doute de distribuer aux élèves un corrigé photocopié, en minorant en conséquence le temps passé en classe à la correction proprement dite. De la très longue liste de questions qui montre la force de la tentation qui s'impose à cet égard au professeur débutant, nous n'en reproduisons ici qu'une seule : « Pour les corrections de DS ou de DM, est-ce qu'il vaut mieux corriger tous ensemble en classe ou distribuer un corrigé et “inviter” les élèves ayant des difficultés en AI [6] pour détailler la correction ? »

D'autres techniques sont également mises en œuvre, qui toutes visent à externaliser d'une certaine manière le travail de correction proprement dit. La correction, moment cardinal de l'étude dans le paradigme ancien, tend ici à être élidée, déplacée vers les périphéries de la classe : « Est-ce une bonne idée de faire la correction d'un DS ou d'un DM pendant les modules plutôt qu'en classe entière ? » La réalité n'est guère niable : spontanément, c'est-à-dire dans les contrats didactiques contemporains tels qu'ils se nouent dans les classes ordinaires, le temps de la correction et son contenu lui-même semblent devenus superfétatoires, en sorte que les élèves sont réputés s'y ennuyer tandis que le professeur craint d'y perdre son temps – ce qu'attestent de nombreuses questions, telle la suivante : « J'ai tenté plusieurs sortes de correction pour un DS : en DM (après avoir donné les exercices correspondants faits en classe) ; en commun au tableau ; en n'expliquant que les points qui ont posé problème ; etc. Je n'ai toujours pas trouvé la formule qui me convienne parfaitement, ainsi qu'aux élèves. Quelles peuvent être les solutions différentes ? »

Bref, le temps presse, et les corrections, en lesquelles on ne voit plus le lieu d'un apprentissage essentiel, semblent dès lors intempestives : l'ennui décelé chez les élèves est le symptôme d'une absence de projet didactique partagé. On va donc chercher à réduire le temps de correction ;

6. L'*aide individualisée* (AI) est un dispositif mis en place en classe de seconde à la rentrée 1999. Elle est censée être réservée aux élèves les plus en difficulté.

on demandera parfois l'autorisation de le faire, que l'on s'accordera peut-être plus souvent encore, contre les préconisations officielles elles-mêmes, d'abord dans des cas limites – par exemple sous le prétexte que le DM à corriger « a été réalisé par la quasi-totalité des élèves » –, ensuite de façon beaucoup plus générale – afin, comme l'écrit une professeure stagiaire, de « vérifier sans perdre trop de temps ».

6. Conclusion

Le dispositif mis en place depuis plus de dix ans dans le cadre de la formation initiale des professeurs de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille – qui consiste à demander aux professeurs en formation en deuxième année d'IUFM, qui ont une pratique (à temps partiel) du métier, de *témoigner* par écrit, semaine après semaine, des difficultés rencontrées dans l'exercice du métier et dans la formation au métier – permet de mettre au jour tout un système de conditions et de contraintes qui pèse sur, ou qui favorise, l'élaboration de leurs praxéologies professionnelles.

Dans certains cas, les difficultés mentionnées concernent, plus ou moins explicitement, les praxéologies mathématiques à enseigner. À cet égard, le cas de la caractérisation angulaire du parallélisme et de la notion d'*angles alternes-internes*, dont l'enseignement figure au programme de la classe de 5^{e} (élèves de 12-13 ans), est éclairant ; l'analyse permet de mettre en évidence l'inadéquation de l'*infrastructure mathématique* dont la profession dispose actuellement et les *contraintes historiques* qui pèsent sur son développement (Cirade, 2008). Dans d'autres cas, comme celui que nous avons étudié ici, c'est l'*infrastructure didactique* qui est en jeu. Là encore, l'analyse permet de mettre en évidence le *poids du passé* et de préciser le rapport professoral au DM et ses conséquences didactiques. Il resterait maintenant à étudier les évolutions possibles de ce rapport et de ses effets.

Références

Bourdieu, P. (2000). L'inconscient d'école. *Actes de la recherche en sciences sociales, 135,* 3-5.

Chevallard, Y. (2006). *L'espace de l'étude*.

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fc/encyclopedie/volume2/2006-2007/le_temps_de_letude_2006.pdf

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. Dans C.-M. Chiocca & I. Laurençot (Éds), *De l'intégration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants* (Disponible sur cédérom). Toulouse, France : ENFA & IUFM Midi-Pyrénées.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, France.
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Cirade, G. (2008). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x*, *76*, 5-26.

IGEN (1997). *Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée.*
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2002-2003/travaux_ecrits_igen.pdf

Análisis de la tecnología didáctica de profesores que gestionan procesos de enseñanza aprendizaje matemáticos que incorporan TIC en el aula

Lorena Espinoza, Joaquim Barbé y Grecia Gálvez
Centro Felix Klein, Universidad de Santiago de Chile, Chile

Abstract. This paper is part of a research project that aims to find out how and to what extent the integration of digital technology in mathematics classes at primary school affects the teachers' and students' practice. The research specifically concerns "digital didactic units" in the first two years of primary school (children aged between 6 and 10) and analyses the questions posed by future mathematics teachers about developing and managing said units.

Résumé. Ce travail s'inscrit dans un projet de recherche qui se propose de voir comment et en quelle mesure l'intégration des technologies numériques en classe de mathématiques dans l'enseignement primaire influe sur la pratique des professeurs et sur celle des élèves. La recherche porte plus spécifiquement autour des « unités didactiques numériques » du premier cycle du primaire (6-10 ans) et étudie les questions posées par des professeurs en formation sur la conception et la gestion de ces unités.

Resumen. El presente trabajo se inscribe dentro de un proyecto de investigación que se propone indagar cómo y en qué medida la incorporación de tecnología digital en clases de matemáticas de Educación Básica impacta en la práctica de los profesores y en la de los estudiantes. La investigación se desarrolla específicamente en torno a las «unidades didácticas digitales» del primer ciclo básico (6-10 años) y analiza las preguntas formuladas por profesores en formación sobre la concepción y gestión de estas unidades.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 321-347)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

El presente trabajo se inscribe dentro de un proyecto de investigación que se propone indagar cómo y en qué medida la incorporación de tecnología digital en clases de matemáticas de Educación Básica impacta en la práctica de los profesores y en la de los estudiantes, particularmente en el logro de aprendizajes. La investigación se desarrolla específicamente en torno a las «unidades didácticas digitales» del primer ciclo básico (6-10 años) que fueron elaboradas en el contexto de la Estrategia LEM [1] (Espinoza & Barbé, 2008). Cada unidad didáctica digital, en adelante UDD, plantea una propuesta de enseñanza concreta para el estudio de un tema matemático específico del currículum de enseñanza básica que integra el uso de TIC.

Una de las hipótesis fundamentales de la investigación es que la contribución de la tecnología digital solo podrá ser apreciable si se garantizan ciertas condiciones básicas para que esta pueda ser usada de forma fluida por los docentes y alumnos. Para ello habrá que identificar y generar condiciones de apropiación de la propuesta didáctica contenida en las UDD por parte de los docentes y, también, condiciones para su implementación adecuada en la sala de clases.

El trabajo que aquí presentamos se centra, más específicamente, en el *estudio de la práctica docente* que, siguiendo la modelización que la teoría antropológica de lo didáctico (en adelante, TAD) propone al respecto (Chevallard, 2006), se interesa por comprender tanto su componente «práctica» como su componente «tecnológica-teórica». En este sentido, el cuestionamiento del profesorado a propósito del estudio *b-learning* de una propuesta de enseñanza sobre un tema matemático concreto, y de su puesta en marcha en la sala de clases, constituye una excelente oportunidad para el estudio clínico de la «tecnología didáctica» (en el sentido de la TAD) de los docentes. En general, los dispositivos

1. La Estrategia en lecto-escritura y matemática, LEM, es una iniciativa impulsada por el Ministerio de educación de Chile cuyo propósito es fortalecer las estrategias de enseñanza de los profesores de educación general básica, proporcionándoles principios didácticos y herramientas para concebir y gestionar procesos de estudio matemáticos eficaces. Fue desarrollada por el Centro Felix Klein, en un trabajo conjunto con el equipo de matemática de la Unidad de básica del Ministerio de educación

clásicos para este tipo de indagación como son encuestas, entrevistas, etc., suelen detectar en los docentes unos argumentos y discursos institucionales que, en la práctica, tienen escasa, e incluso en muchos casos ninguna relación con lo que esos profesores realmente hacen en sus clases (Palou, 2005).

La reflexión y el cuestionamiento sistemático de los docentes sobre unas cuestiones concretas de la enseñanza de las matemáticas planteadas por un tutor a través de una plataforma virtual, nos ha permitido profundizar en la comprensión de la tecnología didáctica de estos profesores ya que, interactuando con dicho tutor y con sus colegas al interior de una comunidad de aprendizaje virtual, estos iban dejando huellas sobre elementos constitutivos de su manera de entender y gestionar los procesos didácticos. La plataforma virtual, a través de distintos dispositivos (foros de discusión, cuestionarios, diarios, bitácoras, etc.) se constituyó en un medio flexible, interesante para los docentes y suficientemente amigable, que promovía la explicitación de sus argumentos y explicaciones.

Las dificultades para investigar la tecnología didáctica de los docentes son conocidas y ampliamente compartidas (Brousseau, 1997). La docencia constituye una práctica espontánea, simplemente vivida por sus actores y poco reflexionada en ámbitos específicos del conocimiento, que ofrece muchas dificultades para ser explicitada y comprendida en profundidad (Espinoza, Bosch & Gascón, 2003). Presentamos aquí una experiencia de investigación que nos ha permitido penetrar de forma significativa en este bloque tecnológico-teórico de las organizaciones didácticas, contribuyendo así en la comprensión de las prácticas docentes.

2. Presentación de la ingeniería: las unidades didácticas digitales

Las unidades didácticas digitales (UDD) para educación matemática son un recurso tecnológico diseñado para complementar la implementación de las unidades didácticas LEM. Se trata de un instrumento de trabajo para el profesor que contiene una serie de aplicaciones multimedia interactivas para apoyar al docente y a los estudiantes en los distintos *momentos de las clases*. Fueron encargadas por el ministerio de educación chileno para ser utilizadas en escuelas que dispusieran de un computador por sala, *data show* y sonido. Son gratuitas y están disponibles en el catálogo de ENLACES (http://www.catalogored.cl), siendo uno de los recursos más visitados del catálogo.

Estas aplicaciones proporcionan al docente y a los estudiantes un conjunto de situaciones en las cuales se proponen tareas matemáticas contextualizadas, un conjunto de variables didácticas que se pueden manipular para apoyar la apropiación de los aprendizajes y situaciones en las cuales los alumnos y alumnas podrán articular y fundamentar conocimientos matemáticos. Asimismo, contienen sugerencias metodológicas y didácticas para los docentes y recursos para que los estudiantes profundicen las actividades trabajadas en la sala de computación o en otro lugar. Cada UDD propone organizar el trabajo docente durante aproximadamente tres semanas. Esta forma específica de integración curricular de las TIC incorpora, tanto en su diseño como en su desarrollo, la tecnología fundada en los principios didácticos impulsados por el Centro Felix Klein, los que a su vez provienen de las principales teorías desarrolladas en el marco del enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas.

Una unidad didáctica digital está compuesta por dos ambientes de trabajo: «Estudio de la unidad» y «Ejecución de la clase». El ambiente «Estudio de la unidad» es un espacio exclusivo para el docente que contiene: una sección para profundizar en el tema matemático y didáctico que trata la unidad; planes de clases organizados en tres momentos (inicio, desarrollo y cierre); descripciones de las estrategias metodológicas e información relativa a las actividades de aprendizaje que la UDD plantea con recursos educativos informáticos (REI); sección para la evaluación y reflexión del docente; así como documentos imprimibles.

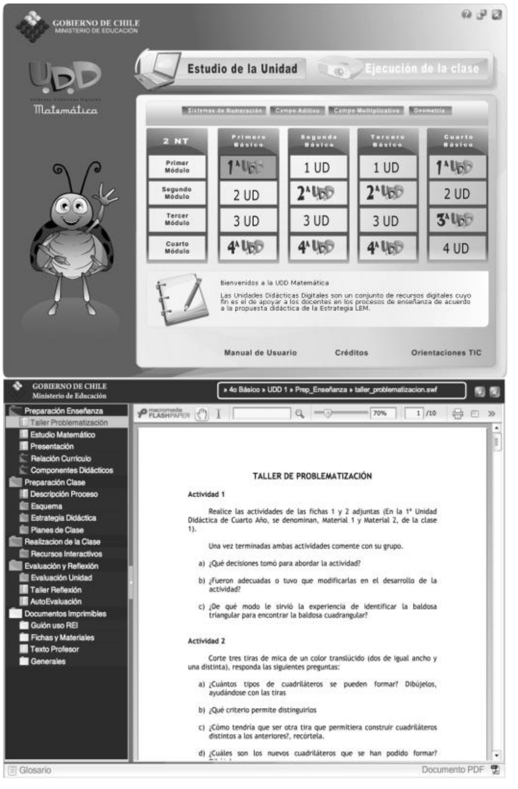


Figura 1. Elemento «Estudio de la unidad» de una unidad didáctica digital

Cada una de las secciones de este ambiente guarda relación con los dominios del *Marco para la Buena Enseñanza* (Ministerio de Educación de Chile, 2003), documento oficial que caracteriza la práctica docente con el propósito de levantar estándares de calidad.

El otro ambiente es el de la «Ejecución de la clase» que contiene y organiza los recursos interactivos desarrollados para utilizar durante las clases. Este espacio contiene y administra las clases digitales desarrolladas que componen la unidad, que por lo general son 6.

Para cada nivel de la enseñanza básica existen dos unidades didácticas con recursos digitales, es decir se cuenta con 16 UDD en total. A su vez, cada unidad didáctica digital está compuesta por 6 clases, dos de las cuales cuentan con «recursos educativos interactivos» (REI), para los tres momentos de la clase.

Figura 2. Elemento «Ejecución de la clase» de una unidad didáctica digital

Los temas tratados en las UDD de Primer ciclo básico (1.º a 4.º básico) son los siguientes:

1º Básico: Contar y comparar con números hasta 20
Problemas aditivos con números hasta 100

2º Básico: Problemas aditivos y estudio de técnica para restar
Problemas aditivos con números hasta 1.000

3º Básico: Anticipando el resultado de un reparto equitativo: de la multiplicación a la división
Estudiando problemas multiplicativos y técnicas para multiplicar

4º Básico: Los cuadriláteros
Estudiando problemas multiplicativos y técnicas para dividir

3. Proceso de capacitación docente: fases y cuestionamientos emergentes

El cambio de las prácticas docentes, en particular en la enseñanza de las matemáticas, es un proceso altamente complejo. Se postula que la práctica profesional del profesor en el aula solo se podrá cambiar de una manera significativa y estable en el tiempo si, correlativamente, se modifica el modelo epistemológico que, como dice Brousseau (1987), está en la base de los modelos docentes habituales. En tal sentido es fundamental que los profesores comprendan qué es necesario modificar y por qué, y se involucren intelectual y emocionalmente en dicha empresa.

3.1. El programa de capacitación

En el marco de nuestro proyecto de investigación, construimos un programa de capacitación docente en torno al uso de las UDD en el aula para profesores de primer ciclo básico (1.º a 4.º). Se invitó a participar a escuelas de la región Metropolitana y de la VI región del país, que vienen participando en la Estrategia LEM desde hace años, y cuyos profesores han demostrado alto interés por implementar la estrategia en sus clases, así como buenos grados de apropiación de la propuesta didáctica contenida en ellas y destacado desempeño en su implementación en el aula.

Los docentes se comprometían a participar de un proceso de formación en didáctica de las matemáticas que les permitiera adquirir y profundizar conocimientos matemáticos, didácticos y tecnológicos, y con ello contribuir a la mejora de sus prácticas de la enseñanza en este subsector de currículo. Dicho programa de formación continua se estructuró por medio de cuatro cursos, uno para cada nivel de enseñanza, cada uno de los cuales se organizó en torno a la UDD correspondiente al nivel. Tal como fue descrito anteriormente, cada UDD aborda temáticas que forman parte del currículo vigente, por lo que los profesores debían enseñarlas en el año en curso. Los cuatro cursos dictados en el contexto del proyecto fueron los siguientes:

Profesores 1º Básico: Estudiando los números y la cuantificación

Profesores 2º Básico: Estudiando problemas aditivos

Profesores 3º Básico: Estudiando problemas multiplicativos

Profesores 4º Básico: La enseñanza de los cuadriláteros

Los cursos se efectuaron en modalidad *b-learning*, articulando sesiones presenciales con virtuales. En las sesiones presenciales se trabaja en modalidad de taller, llevando a cabo una estrategia metodológica coherente con la propuesta didáctica del modelo pedagógico que está en la base de las UDD. Dicha estrategia consiste en iniciar el proceso de estudio con una actividad de problematización, cuestión nada habitual en la cultura escolar de Básica, con el propósito de que los docentes experimenten la necesidad real de explorar un problema en principio desconocido para ellos y cuya solución requerirá de una estrategia no trivial para resolverlo. Posteriormente, se proponen actividades similares para que los docentes profundicen en el tipo de problemas que está en estudio, para identificar el conocimiento puesto en juego así como las condiciones bajo las cuáles este resulta válido y pertinente. Finalmente, se sistematiza e institucionaliza el conocimiento utilizado, contrastando las diferentes formas utilizadas para resolver los problemas, evaluando la eficacia de cada una de ellas y comprendiendo sus similitudes y diferencias.

Por lo general, para lograr la «devolución» del problema a los profesores de este ciclo de enseñanza, dado que por lo general se trata de temáticas matemáticas conocidas por ellos, se trabaja con aspectos de los temas que se enseñan en estos niveles que aparecen como transparentes para los estudiantes, como obvios o naturales, y que en general no se problematizan y por lo general no se enseñan. Tal es el caso de la actividad de *enumeración* en 1.º básico[2] o la propiedad de la *no rigidez* de los cuadriláteros en 4.º básico. En este proceso, el conductor del taller juega un rol de mediador, permitiendo con ello que los participantes sean protagonistas del proceso. En cada curso se utilizan recursos como videos de clases y de niños aprendiendo matemática, se analizan actividades de textos escolares y resultados de evaluaciones de manera que profesores y profesoras puedan reflexionar y analizar procesos de enseñanza y aprendizaje, y con ello contrastar sus prácticas habituales mediante

2. La actividad de *enumeración,* según los estudios realizados en el marco de Teoría de Situaciones (Brousseau, 1997) resulta imprescindible para comprender y realizar la actividad de contar y, con ello, lograr una construcción argumentada de los números naturales.

criterios didácticos provenientes del marco teórico que sustenta tanto el modelo de enseñanza como el trabajo investigativo, y que resultan coherentes con los lineamientos del currículo nacional [3].

En las sesiones de estudio virtuales se utiliza la misma metodología, abriendo espacios para la constitución efectiva de comunidades de estudio virtuales de profesores, en las que se promueva la discusión colectiva sobre las actividades que realizan en el curso, el intercambio de experiencias sobre sus prácticas, así como discusiones sobre temáticas que resulten complejas para los docentes de estos niveles.

Asimismo, cada curso contempla que los profesores implementen el proceso de enseñanza propuesto por la UDD correspondiente, analicen los resultados de aprendizajes obtenidos por los niños una vez implementado cada proceso y evalúen, mediante una instancia de retroalimentación, su propio desempeño en dicha implementación y el de sus estudiantes. Finalmente, los profesores del curso tienen que diseñar un miniproceso de estudio de un tema matemático que sea afín al abordado en las UDD. Para ello, cuentan en la plataforma virtual, con material de apoyo y orientaciones didácticas para el diseño y elección fundamentada de las actividades que usarán y/o adaptarán. Además, disponen del recurso tecnológico denominado «Generador de actividades interactivas» (GAI), que conocen durante las sesiones de estudio y que les permite construir sus propias actividades interactivas.

De este modo, cada curso se organiza en cuatro etapas, que para su desarrollo requieren, además del trabajo colectivo e individual de los docentes, de una dinámica particular de trabajo dentro las propias escuelas. Dichas etapas son: *preparación de la enseñanza*; *realización de clases*; *evaluación de la experiencia y de los aprendizajes*; y *extensión de la propuesta didáctica*.

3. Planes y Programas del Primer Ciclo Básico. Mineduc, 2004.

Figura 3. Fases del programa de capacitación para profesores

3.2. Fases del proceso de formación y cuestionamiento emergente: cuestiones de «receptor» y cuestiones de «creador»

Las tres primeras fases del programa de capacitación involucran a los docentes en cuestiones que hemos denominado como de «receptor», puesto que los profesores se deben apropiar de una organización didáctica elaborada y propuesta por otros. Recordemos aquí estas tres primeras fases: estudio del tema matemático y didáctico en que se inscribe la UDD; implementación de la UDD con apoyo y retroalimentación en aula; reflexión y análisis de la experiencia vivida y retroalimentación.

En el desarrollo de estas tres fases, las preguntas e interacciones entre los docentes, y entre los docentes y el tutor a través de la plataforma, estuvieron principalmente orientadas a comprender la propuesta de enseñanza contenida en las UDD y, especialmente, a precisar mejor cómo se debían gestionar en clases las distintas actividades planteadas por el recurso, tanto aquellas de naturaleza interactiva como de otro tipo. A continuación presentamos algunas de las preguntas y cuestiones más recurrentes entre los profesores que participaron en el proyecto, y que muestran el carácter de receptor antes descrito:

> ¿Cómo hago funcionar esta actividad interactiva? ¿Cuánto tiempo debo dedicarle en la clase? ¿Cuántas veces es adecuado repetirla? ¿Los estudiantes deben hacer todas las actividades? ¿Cuáles se podrían dejar de tarea? ¿Hago o no el cierre completo de la clase o solo gestiono la institu-

> cionalización de las ideas que se han puesto en juego en la clase? ¿Puedo ver el cierre de esta clase en la próxima? ¿Qué tarea matemática está detrás de esta actividad? ¿Por qué razón este problema es más complejo que este otro? ¿Por qué utilizar o promover el procedimiento más eficiente, si lo importante es que lleguen al resultado correcto? Etc.

Como vemos, son preguntas que pretendían aclarar y precisar mejor lo que debían realizar en sus clases, esto es la *praxis* de la OD que les ofrecíamos con la UDD. Menos frecuentemente aparecieron preguntas de carácter tecnológico que pretendían profundizar y comprender el sentido de la propuesta, en cuáles eran las expectativas de aprendizaje que se tenían al proponer tales actividades:

> ¿Las tareas matemáticas son como los objetivos? ¿Cuál es el aporte y por qué se definen las condiciones didácticas? ¿Cómo gestionar el error de los estudiantes sin decirles en qué se han equivocado ni plantearles el correcto procedimiento (en muchos casos el error es ignorado y no siempre tienen claridad de la consigna de cada actividad)? ¿Podré implementar esta nueva visión del campo de problemas aditivo y multiplicativo que estoy aprendiendo en este curso? «Yo creo que mis estudiantes no podrán resolver estos problemas.» Al estudiar los distintos tipos de problemas aditivos, los docentes toman consciencia de las diferentes situaciones que pueden ser modelizadas con la adición, y surge muy luego su cuestionamiento de cuál son los tipos de problemas más utilizados por ellos y preguntan cuál es el modelo que debieran enseñar a sus estudiantes, etc.

El cuestionamiento de los docentes a propósito de estas preguntas de receptor nos permitió encontrar algunos elementos de su tecnología didáctica.

La última fase del proyecto implica a los docentes en cuestiones de «creador»: los docentes debían construir colectivamente una propuesta de enseñanza que incorporara el uso de TIC. Para ello contaban con el «generador de actividades interactivas» (GAI), actividades parametrizadas y herramientas interactivas. En esta fase del proceso, el tipo de preguntas cambia drásticamente; aparecen lo que hemos llamado «preguntas de verdad»:

> ¿Qué relación hay entre las distintas actividades de una clase? ¿Y entre las clases? ¿Cómo progresan los niveles de complejidad? ¿Por qué contar junto al comparar? ¿Por qué esa secuencia? ¿Podría ser otra? ¿Qué papel juega el contar en la construcción de los números? ¿Cómo son las situaciones de aprendizaje que permiten que los estudiantes se contacten con su razón de ser? ¿Qué aspectos de la actividad matemática que realizarán mis estudiantes permiten distinguir y proponer una adecuada progresión de tareas y condiciones de realización? ¿Qué actividad concreta permitiría estudiar este tipo de tareas? ¿En qué orden, basándome en qué criterio? ¿Cómo reconocer las relaciones, similitudes y diferencias, entre distintas técnicas de manera de poder establecer cuál es más eficiente y por qué? ¿Qué condiciones permitirían que tal técnica fracase y tal otra emerja?

Se trataba de preguntas que pretendían comprender, además de la *praxis*, la *tecnología* que estaba detrás de las actividades propuestas. El cuestionamiento de los docentes a propósito de estas preguntas «de creador» nos permitió precisar y comprender mejor los elementos de la tecnología didáctica que nos pareció identificar en torno a las preguntas de receptor.

4. Análisis de la tecnología didáctica de los docentes

La metodología que utilizamos para realizar el análisis de la tecnología didáctica de los docentes, se sustenta principalmente en la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999). Esta teoría se enmarca, en un contexto más amplio, dentro de la corriente antropológica cognitiva (Sensevy, 1999). Dada la naturaleza de nuestra investigación, se requiere de una comprensión amplia y profunda de cada situación considerada. Esto nos conduce a realizar un estudio de corte cualitativo, basado en el estudio clínico de los sistemas didácticos (Leutenegger, 2000).

La metodología del proyecto consideró reorganizar las planificaciones de las UDD y adecuar algunas de sus actividades para ajustar los tiempos de implementación a la realidad de aula. Después de implementar los cuatro programas de capacitación a 40 profesores de primer ciclo, se seleccionaron entre estos a los 12 profesores que constituirían la muestra de la investigación. Se escogieron tres profesores por cada curso de 1.º a

4.º básico para poder medir el efecto neto de la incorporación de las TIC a las unidades didácticas LEM. Los criterios para tal selección fueron un destacado desempeño docente, buenos grados de apropiación de la propuesta didáctica y un destacado desempeño en el curso de capacitación ofrecido por el proyecto de investigación, lo cual implicaba además un buen uso de la plataforma virtual. Estos profesores provienen de cinco escuelas distintas; tres de la región Metropolitana y dos de la VI región.

Durante el proceso de selección de los profesores que constituirían la muestra de nuestra investigación, obtuvimos un primer hallazgo interesante. Sin forzar la búsqueda de los profesores de la muestra por escuela, se obtuvo que estos 12 profesores, escogidos por méritos personales, se agrupaban en las mismas escuelas. Esto puso de manifiesto el peso que pueden jugar las condiciones institucionales sobre el desempeño docente.

Para cada profesor de la muestra, se recogió información por medio de distintos dispositivos e instrumentos, en los distintos momentos de la investigación: antes de comenzar la experiencia; durante la realización de la experiencia; después de finalizada la experiencia. Los instrumentos fueron: entrevista antes de comenzar su participación en el proyecto; prueba que medía grados de apropiación de conocimientos matemáticos y didácticos relativos a la enseñanza de las matemáticas en el 1.º ciclo básico; pautas de observación del proceso de implementación de las UDD desde el punto de vista del profesor y de los alumnos; encuestas; entrevista clínica a docentes de la muestra después de la implementación; evaluación a profesores; evaluación a alumnos. Se trataba de conocer muy bien el entorno del profesor, su escuela, sus compañeros, la relación con los padres, etc. De esta forma, pudimos disponer de información rica y diversa que nos permitió avanzar en la comprensión y en la explicitación de la tecnología didáctica de los docentes.

Las observaciones realizadas fueron respaldadas por grabaciones en video de las clases. Estas se realizaron privilegiando datos que parecían corresponder, por una parte, a las cuatro categorías que componen una organización matemática y que permiten describir el conocimiento en construcción y, por otra, a las categorías establecidas por la teoría de los momentos didácticos para dar cuenta del proceso, poniendo énfasis en la utilización de TIC por parte de alumnos y profesor. Se recogieron además como información complementaria algunos cuadernos de alumnos, los apuntes del profesor, así como las respuestas de los alumnos en el laboratorio y en la prueba de la unidad.

La codificación de este material se realizó a partir de unas categorías generales preestablecidas, provenientes de la teoría antropológica. El análisis del material, una vez codificado, se realizó usando técnicas etnográficas y procedimientos estadísticos convencionales. Los resultados de los alumnos en los laboratorios y en las pruebas de la UDD se analizaron tomando en cuenta características propias (notas de entrada, género, edad), y características de sus profesores (nivel de capacitación, uso/no uso de UDD, etc.) usando modelos jerárquicos que toman en cuenta la estructura anidada de los datos. Cada instrumento fue validado determinando su confiabilidad para medir los constructos deseados. A partir del análisis de los instrumentos, se construyeron índices para cuantificar el grado de apropiación en las dimensiones consideradas por el proyecto, tanto de alumnos como profesores, y el cambio en sus actitudes. Estos índices permitirán decidir cuándo se ha logrado una adecuada apropiación[4], y cuándo ha habido un cambio sustantivo de actitud.

5. Algunos resultados de los análisis y discusión

Mostraremos aquí algunos resultados obtenidos a partir de nuestros análisis. Para ello, nos centramos en la unidad didáctica digital de 1.º Básico: *Contar y comparar con números hasta* 20. Analizamos el caso de algunas profesoras en torno a ciertas actividades de comparación, en que la tarea matemática de contar se complica.

5.1. Centrando los análisis entorno a la UDD 1 de Primero Básico

Los tipos de áreas matemáticas principales de esta unidad son:

T_1: Producir una colección con la misma cantidad de objetos que otra dada

4. Cautelando que los criterios sean consistentes con estándares tanto nacionales como internacionales. En particular, se considerarán los estándares de desempeño entregados por el ministerio de educación chileno.

T_2: Cuantificar colecciones y escribir su cardinal

T_3: Comparar colecciones y números

T_4: Ordenar colecciones y números

Es importante recordar aquí que las UDD articulan actividades con TIC y sin TIC. Así, por ejemplo, una actividad que es central en esta unidad consiste en ir a buscar en un solo viaje, a la mesa de la profesora, los gorros de cumpleaños que sean necesarios para que cada niño invitado al cumpleaños (y que aparecen en la ficha) tenga su gorro. No debe sobrar ni faltar ningún gorro; se deben traer justo los necesarios. La tarea que está detrás de esta actividad es la de producir una colección equipotente a otra dada pero no simultáneamente accesible, lo que obliga al niño a contar puesto que no puede recorrer a la simple superposición de objetos. De este modo, los niños experimentan la necesidad real del conteo. No solo aprenderán a contar bajo distintas condiciones (colecciones presentadas en hilera, en forma circular, desordenadas, mezcladas con otras colecciones), sino que además aprenderán cuándo es necesario contar.

La actividad que se realiza sin TIC se presenta a los niños por medio de la siguiente ficha:

Figura 4. Actividad de conteo: los gorros de cumpleaños

La correspondiente actividad con TIC es la siguiente:

Figura 5. Actividad de conteo utilizando las TIC

Los niños deben ir a buscar, el mismo modo, en un solo viaje tantos manteles como sea necesario para que cada mesa tenga su mantel.

La unidad progresa hacia la comparación de colecciones, primero disponibles simultáneamente y luego no disponibles simultáneamente de tal modo que tengan que contar. También deben comparar colecciones que están mezcladas y desordenadas como las siguientes:

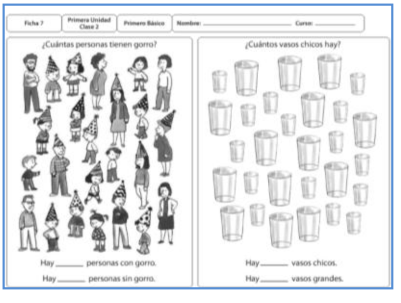


Figura 6. Ficha 7

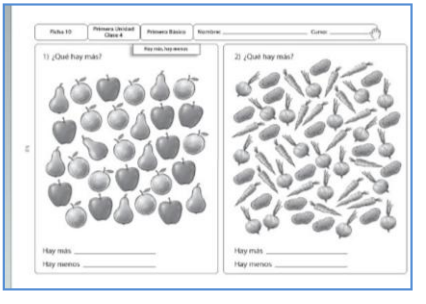


Figura 7. Ficha 10

5.2. Análisis de la tecnología didáctica de docentes en relación a esta UDD específica

Centraremos aquí el análisis y discusión en el caso de una profesora de primero básico, que muestra muy nítidamente que las «preguntas de creador» hacen emerger, al menos de manera más explícita, la tecnología didáctica del profesor.

En las tres primeras clases, los alumnos habían resuelto problemas de contar y de comparación sencillos. En la cuarta clase empezaban a contar colecciones desordenadas para luego compararlas (más de dos colecciones). En la capacitación, la profesora no mostró confusiones en torno a las actividades de contar y comparar. En la implementación, y durante las primeras tres clases sobre el contar, todo parecía marchar bien. A partir de la cuarta clase, empezaron a aparecer signos de que la profesora tenía dificultades para gestionar el desarrollo de algunas actividades de comparación, y que no comprendía su sentido, en particular la actividad correspondiente a la ficha 10.

La profesora concentraba la atención de los estudiantes sobre cuestiones formales de la actividad y no sobre la problemática que suponía responder a la tarea. Asimismo, los niños mostraban bastante confusión en clases, y no sabían qué tenían que responder, tal como muestra la siguiente imagen:

Figura 8. Imagen de niño realizando una actividad de comparación en clase

La tarea se complicó en esta ficha: el ámbito numérico es mayor que en las fichas anteriores, y los objetos están más juntos y más desordenados. La profesora preguntó a sus estudiantes «qué nos complica» y algunos alumnos respondieron «que hay tres frutas», pero ella no se hizo cargo de esas respuestas, dejando a los niños la responsabilidad de explicar lo que sucedía. Esta clase, y más en particular esta actividad, no culminó bien. Después de terminar con la implementación del proyecto, la profesora repitió esta ficha con sus alumnos, pero nuevamente sin éxito. La profesora dejaba en manos de los estudiantes resolver los problemas de esta ficha, pero no por una decisión de otorgar un rol al alumno distinto al tradicional (propone, argumenta, contrasta, etc.), sino a nuestro parecer, por no disponer de medios y recursos para gestionar un estudio que avanza hacia respuestas más adecuadas.

Al llegar a la cuarta fase del proyecto, cuando debían construir una unidad didáctica que fuera una extensión de la ya estudiada e implementada en clases, la profesora manifestó claramente no comprender las actividades de la clase 3, sobre todo la de las «zanahorias y papas». En la entrevista clínica realizada después de concluido el proceso de implementación en el aula, la profesora manifestó lo siguiente:

> «Para mí el proceso se divide en dos partes: antes y después de la clase 4. Fue horrible: no sabía qué hacer en esa clase, los niños estaban confundidos; contaban todas las colecciones usando la misma marca, trataban de encerrarlos en círculos pero no servía… Al final, después de todo, no me quería quedar con la sensación de que me la ganó una ficha. Volví a repetir esa ficha y a los niños se les ocurrió pintar las zanahorias, papas y cebollas, y eso ayudó, pero tampoco respondieron bien la ficha. El problema era marcar las tres colecciones con distintos tipos de marcas: cruces, rayitas y círculos…»

Posteriormente, apareció claramente su dificultad (la cursiva es nuestra):

> «Se trata de un problema muy difícil para los estudiantes porque hace *una* pregunta, pide *dos* respuestas y hay *tres* colecciones. *Hay una colección que no sirve* porque hay que responder sobre dos, y eso confundió a los alumnos. […] Si a mí me costaba, ¿cómo iba a orientar a los niños? ¿Por qué este revoltijo? ¿Por qué esas complicaciones?»

La profesora no formula preguntas que los niños no sepan responder, lo cual es coherente con su estrategia de enseñanza: preguntas a coro, respuestas conocidas. Se observa, además, que la profesora no profundiza sobre la tarea matemática y sus grados de complejidad. No se hace preguntas del tipo: ¿Para qué habrá 3 colecciones? ¿Por qué esta ficha es más difícil que la anterior? *Su tecnología didáctica explícita está a nivel descriptivo de la acción del niño, no de lo que está detrás de esa acción y lo que la hace más o menos difícil.* Este episodio nos revela qué entiende la profesora por un problema matemático, en particular de comparación, y sobre cómo se puede resolver. En particular, aparece el principio implícito de que la cantidad de datos se debe corresponder con cantidad de respuestas solicitadas. Aparecen así, detrás de sus afirmaciones y emociones, elementos de su *tecnología didáctica*:

> «Aunque uno no lo quiera, uno es la protagonista.»
>
> «Yo tenía temor a perder el control del curso, que se viera como desorden; hacerle preguntas a los niños es muy riesgoso porque se te desordenan. Además, nunca antes había necesitado hacer preguntas.»
>
> «Dejar espacios a los niños, no lo sé hacer; menos hacer buenas preguntas… Me parecía que Enrique hacía magia, justo sabía qué preguntar a los niños para que ellos buscaran la respuesta correcta. Yo no sé hacer preguntas, por Dios que me cuesta.»
>
> «Después de la clase 4 me parecía que lo iba a poder hacer todo. Ya tenía cierto lenguaje… Se me hizo más fácil después de esa clase. Mi seguridad es muy importante; una vez la tienes, puedes hacer cambios o adaptaciones.»
>
> «Yo siempre supe que debía estar en función de los niños y no de mí; pero no lo hacía. Ahora veo que se puede. Me preocupaba de que hicieran las cosas, pero no de cómo las hacían. Pero mi problema es que no sé hacer preguntas para saber cómo y por qué las hacen así.»
>
> «No debe ser lo mejor para ti como profesor, sino lo que es mejor para el alumno. *A lo mejor yo hacía mi función*, pero no estaba pensando en los niños.»
>
> «Participando sobre discusiones, opinar es fácil; pero cuando se trata de tu pega, de tu trabajo, entonces uno es más isla.»
>
> «Cuando los niños tienen que sacar los datos de un enunciado verbal les cuesta más. Pero, ¿qué preguntas hacer para saber si los niños saben? Me gustaría saber reconocer, al menos, entre buenas y malas preguntas.»
>
> «Antes lo hacía super mal como profesora y lo sabía, pero lo hacía por rutina.»

Esta experiencia pone de manifiesto la falta de herramientas que tienen los profesores para hacer análisis más complejos y profundos. Esta profesora solo se queda a nivel de las dificultades técnicas de los niños, no de su comprensión. No reconoce las distintas condiciones de realización de la tarea (lo que es coherente con que no sepa hacer «buenas preguntas»). Cuando es interrogada por dichas condiciones, en vez de distinguir tipos de problemas o tareas, ella responde con las técnicas que usarían los niños. Este proceder es muy generalizado entre los profesores de la muestra.

5.3. Análisis global de la tecnología didáctica de los docentes

A partir del análisis de la tecnología didáctica de los doce profesores observados que participaron en la investigación, y utilizando los *niveles de codeterminación didáctica*[5] (Chevallard, 2002), hemos levantado siete temas emergentes que describimos a continuación.

5.3.1. Falta de herramientas y metodologías docentes para estimular la reflexión y la argumentación de los estudiantes

La falta de herramientas de los docentes para estimular la reflexión y la argumentación, se observa, por una parte, en la gestión didáctica que realizan mientras implementan las UDD en el aula, donde muestran dificultades tanto para hacer preguntas que permitan que emerja el conocimiento matemático, como para generar instancias de sistematización de este. En las entrevistas esto se manifiesta cuando los docentes señalan cosas del tipo: «me preocupaba saber qué preguntas tengo que hacer para saber que han aprendido los chicos… me gustaría contar con un manual con preguntas».

Por lo general esta escasez de herramientas es disimulada por medio de un recurso bastante habitual entre los profesores de la muestra, que consiste en deslizar la dificultad hacia los alumnos. Por lo general, centran el problema en que los estudiantes no tienen la capacidad de argumentar o explicar un procedimiento (los docentes tienen bajas expectativas respecto de las capacidades de sus estudiantes). Así por ejemplo una profesora señala: «Cuando me decían que hay que darle el espacio a los niños yo me pregunte si estarán los niños capacitados para hacerlo, quizás esa no es la palabra, pero podrán ellos decir como lo hicieron… ¿cómo puedo manejar yo eso, por ejemplo si todos quieren opinar?» Cabe señalar que del análisis de los videos de clases, se observa preocupación por parte de los docentes por escuchar de los niños explicaciones que contengan una terminología lo más cercana posibles a las unidades didácticas. Esta restricción se ubica en los niveles más altos de la jerarquía, puesto que se relaciona con la forma en que los profesores

5. Los niveles de codeterminación didáctica son: Civilización ↔ Sociedad ↔ Escuela ↔ Pedagogía ↔ Disciplina ↔ Dominio ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

heredan la manera en que la escuela interpreta lo que es la enseñanza, y con ello el aprendizaje, en general, y en particular el aprendizaje de las matemáticas.

5.3.2. Cambio de paradigma en relación a la gestión de la enseñanza de las matemáticas, como producto de su participación en el proyecto

En general se observa un cambio en la forma de concebir y plantear las actividades a los estudiantes. Antes de participar en el proyecto, según lo que expresaron en las entrevistas, la mayoría de los profesores desarrollaban sus clases basándose en el libro de texto proporcionado por el Ministerio de Educación, y planteaban actividades a los estudiantes que previamente habían sido resueltas por ellos frente al curso, de tal modo que los alumnos no tuviesen dificultades en resolverlas. Con el proyecto, los docentes estaban llamados a cambiar aspectos de su gestión habitual en el aula, y generar los espacios para que los estudiantes buscasen sus propios procedimientos para resolver las tareas planteadas. Esto produjo un quiebre en sus concepciones, tal como ellos mismos lo señalaron, y con ello emergieron nuevos elementos de su tecnología didáctica. En efecto, asociado a este quiebre apareció un cierto temor frente al «riesgo de pérdida del control» al generar dichos espacios y brindar protagonismo a los niños en el desarrollo de la clase. La mayoría realizó enfáticamente afirmaciones del tipo: «no quería darle espacio a los estudiantes; me daba miedo que se pudiera perder el control».

Esta restricción se ubica en el nivel pedagógico ya que se relaciona con la forma en que la escuela interpreta lo que es, o debe ser, la enseñanza y el aprendizaje de cualquier disciplina, en este caso basado categóricamente en el control absoluto del profesor de todo lo que suceda en el aula.

5.3.3. Cambios de paradigma en relación a la planificación de la enseñanza de las matemáticas, como producto de su participación en el proyecto

Uno de los aspectos a destacar es la importancia que ahora le brindan la mayoría de los profesores a los *momentos* de la clase, que antes del proyecto no consideraban. Por ejemplo, una profesora señala:

> «Con el proyecto los niños saben que hay tres tiempos en la clase, y yo también. Se toman su tiempo, saben que en el momento de cierre viene la fundamentación. El inicio es cuando uno presenta el objetivo, que vamos a ver hoy día, se retoma un poco la clase anterior. El momento de desarrollo es la tarea en sí, es cuando está elaborando, trabajando y uno se da los espacios para saber cómo lo está haciendo, y después recogemos de qué forma se hizo, cuál es la más factible… qué vamos a hacer, qué estamos haciendo y lo que hicimos.»

Por lo general reconocen ahora que para que el conocimiento matemático emerja en manos de los estudiantes, se deben realizar buenas preguntas. Y para ello se debe tener una visión amplia y profunda del contenido matemático en estudio, lo que antes no era tan claro para los docentes. Por lo general ellos dicen que antes consideraban que con el conocimiento básico que aparece en el currículo era suficiente para hacer buenas clases. Además, antes del proyecto, los temas matemáticos importantes, por ejemplo de 1.º básico, se acotaban a la secuencia numérica y el contar en la planificación. Después de su participación en el proyecto, sus planificaciones consideraban otros aspectos, complementarios a los anteriores. Una profesora de este nivel de enseñanza señala: «Es importante que los niños aprendan a enumerar, contar, avanzar, retroceder, comparar, adición, sustracción; antes veía muy poco de todo esto…»

Esta restricción pertenece a los niveles más bajos de la jerarquía, puesto que tiene que ver con el grado de alcance y completitud con que las distintas organizaciones matemáticas que comprenden el currículo oficial de la disciplina matemática, están consideradas en la escuela, y sobre la articulación que debería existir entre ellas. Por lo general los docentes tienen una visión restringida, rígida y acotada de las OM de currículo, heredada de la forma en que la disciplina es entendida en la escuela.

5.3.4. Falta de conocimientos didácticos para gestionar la realización en clases de ciertas actividades de aprendizaje

La falta de distinciones didácticas para determinar las condiciones de realización de una tarea *sobre el estudio de la relación de orden en los naturales en 1.º básico trajo dificultades a los docentes para gestionar estas actividades con sus estudiantes***.** Una de las profesoras señala que al revisar las actividades que debía plantear se preguntó: «¿Por qué este revoltijo? ¿Por qué estos grados de dificultad?... las colecciones desordenadas… A mí me cuesta entenderlo, seguro que a ellos también.» Una vez realizada esta actividad, donde claramente los estudiantes mostraron dificultades para responder a la pregunta planteada en la ficha, ella se cuestionó la gestión realizada, señalando: «A lo mejor les costó porque a mí se me hizo difícil… quizás por la forma como la presenté.» Una vez terminada la implementación de la UDD, la profesora vuelve a presentar la ficha a los estudiantes, tratando de buscar otra estrategia, y señala: «Volvimos a hacer esta ficha porque yo no había quedado conforme, a ellos no le quedó claro y a mí no me quedó claro si lo habían entendido.»

Esta restricción se relaciona con que, para los docentes, es suficiente conocer aspectos matemáticos del contenido que deben enseñar, para que puedan enseñarlo adecuadamente a sus estudiantes. No reconocen que deben manejar, a su vez, una organización didáctica del contenido, que requiere criterios para ser planteada y gestionada en el aula. Esta restricción parte desde los niveles más altos de la jerarquía pero tiene repercusiones en los niveles más elementales de la jerarquía.

5.3.5. Visión de la enseñanza de la matemática no centrada en los alumnos

En relación a la visión sobre la enseñanza de las matemáticas, los docentes muestran una concepción centrada en el *profesor* como protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje. Así, por ejemplo, una profesora de 1.º básico, durante la implementación de las clases, se mostró muy sorprendida al observar que los estudiantes utilizaban distintos procedimientos para desarrollar las actividades que ella les presentaba. Señaló que antes de participar en el proyecto solo se preocupaba de que los alumnos tuvieran bien los resultados, pero en general era ella misma quien resolvía las actividades en la pizarra. Manifestó que: «me costó darles espacio a los niños en la sala de clases… me sorprendí mucho cuando vi que los estudiantes utilizaban procedimientos distintos.»

5.3.6. Visión estandarizada y acotada de la resolución de problemas en la clase de matemáticas

La visión de los docentes sobre el estudio de problemas es rígida y acotada; por lo general un problema es un «ejercicio» disfrazado de problema, puesto que por lo general se debe conocer a priori cómo resolverlo. La modelización no es un proceso que los estudiantes deban aprender a realizar, puesto que por lo general se conoce a priori el modelo y solo se trata de «aplicarlo» a una situación problemática específica. Una profesora manifiesta: «yo les digo que tiene que fijarse en los datos, los datos son los números… los datos tienen que organizarlos, por ejemplo, si es una resta, el número mayor primero.»

Los docentes no ponen de manifiesto un interés para que los estudiantes busquen estrategias que les permitan relacionar los datos con la pregunta, por ejemplo el uso de esquemas, tampoco manifiestan la posibilidad que, por ejemplo, sean ellos mismos quienes formulen los problemas. Esta restricción pertenece a los niveles más bajos de la jerarquía, puesto que tiene que ver con el tema matemático y con la cuestión en estudio.

5.3.7. Importancia del aporte del trabajo colaborativo (entre pares)

El trabajo colaborativo adquirió fortaleza para los docentes en dos aspectos: la reflexión pedagógica conjunta y la planificación. Respecto al primero podemos señalar que con el proyecto los profesores de la escuela comenzaron a reflexionar sobre la implementación de las clases en aula, ya que con el proyecto tuvieron la posibilidad de estudiar en profundidad la unidad que iban a aplicar y por tanto tenían un mayor conocimiento para discutir lo que ocurría en la sala de clases. Los docentes señalan que hay tres factores que propiciaron este intercambio de experiencias: la *observación con retroalimentación*, la *grabación en video de las clases*, y la *incerteza* de cómo reaccionarían los estudiantes. Comienzan a interesarse sobre el tipo de preguntas que van a plantear a los estudiantes, sobre cómo darán las instrucciones para una actividad, etc. En relación al segundo aspecto, la *planificación de la enseñanza* comienza a tener otro sentido para los docentes, y se organizan con el resto de profesoras del nivel para planificar en conjunto cada subsector.

Los profesores partieron en el proyecto con una visión individualista de la tarea de enseñanza. Cada profesor debía planificar el proceso de enseñanza esencialmente solo, con algún tipo de interacción con otros docentes. Esta restricción, de orden superior en la jerarquía, ignora que el profesor está muy lejos de poder actuar en soledad.

6. A modo de conclusiones preliminares

El recorrido de investigación seguido hasta el momento nos ha ido permitiendo obtener algunas comprensiones. La primera tiene relación con la importancia de conocer en profundidad el sistema que es sujeto de la investigación: los profesores, su cultura o más bien sus culturas, sus condiciones y restricciones, su relación con la escuela, con los padres, etc. La entrevista inicial realizada a los profesores dista enormemente en términos de comunicación de ideas y especificidad de la entrevista final. Esto pone de manifiesto, a su vez, la importancia de tener distintas fuentes de información para poder cruzar, contrastar y validarlas; las observaciones de clases y las producciones de alumnos no son suficientes.

Los dispositivos que indagan la tecnología didáctica de los docentes a partir de cuestiones ocurridas en clases, en relación a un proyecto conocido y analizado por los investigadores, nos han resultado fecundos. En este sentido, la plataforma virtual exigió en muchos casos explicitaciones de los docentes sobre cuestiones no reflexionadas por ellos, dejando huella.

En esta trayectoria también nos hemos visto enfrentados a una gran *tentación*: identificar elementos de la tecnología didáctica a partir de un razonamiento lógico del investigador que interpreta lo que el profesor dice sobre lo que hace, mirando desde el investigador y no desde el profesor. Hay que entender *su* tecnología, no la que nosotros creemos que es.

Finalmente nos gustaría señalar, a modo de reflexión final, que durante varios años hemos estado a cargo de ofrecer a profesores formas de enseñar las matemáticas, organizaciones didácticas y organizaciones matemáticas, inspiradas en los principios de la teoría de situaciones didácticas y de la teoría antropológica de lo didáctico. En esta significativa experiencia hemos encontrado que cuando los profesores no incorporan a sus praxis la tecnología y teoría didáctica que acompañan las praxis que les proponemos, las cosas no funcionan bien. El profesor no puede hacer gestos técnicos sin tecnología. La Estrategia LEM nos ha mostrado después de seis años de implementación que los profesores, cuando no se apropiaron de las tecnologías de las organizaciones didácticas ofrecidas, han degenerado dichas organizaciones, construyendo una tecnología alejada, en muchos casos, de la original. Debemos proponer a los profesores tecnologías que ellos puedan aceptar y más tarde integrar. Eso supone comprender muy bien la que ellos tienen, no la que nosotros creemos que tienen.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado gracias al aporte económico otorgado por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT nº 1085207.

Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & Régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, Francia : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4^th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Espinoza, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de praxeologías didácticas docentes espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79-136.

Espinoza, L. & Barbé, J. (2008). El problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica chilena: la estrategia de asesoría a la escuela en la implementación curricular LEM-Matemática. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 767-777). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique : une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(1), 34-56.

Ministerio de Educación de Chile (2003). *Marco para la Buena Enseñanza*. Santiago de Chile: Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas.

Ministerio de Educación de Chile (2004). *Planes y Programas del Primer Ciclo Básico*. Chile.

Palou, J. (2005). La conversa o el canvi en l'intercanvi. *Perspectiva Escolar*, *254*(294), 9-12.

Sensevy, G. (1999). *Eléments pour une anthropologie de l'action didactique*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Aix-en-Provence, Francia: Université de Provence.

Students' praxeologies of routine and non-routine limit finding tasks: Normal vs. mathematical behaviour

Nadia Hardy
Concordia University, Canada

Résumé. Cet article présente des résultats empiriques relatifs au changement de position des étudiants devant des tâches de calcul de limites. Les étudiants se comportent en effet comme des sujets respectueux des normes de l'institution lorsque la tâche est jugée par eux normale, mais ils se transforment en « sujets cognitifs », responsables de leurs discours théoriques, dès lors que la tâche leur apparaît non routinière. Leur activité est analysée en utilisant la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique, ainsi que des notions relatives au fonctionnement des institutions et développées en sciences politiques.

Resumen. Este trabajo presenta evidencia empírica de cómo el posicionamiento de los estudiantes frente a tareas del tipo «calcular el límite» cambia de estudiantes que se comportan como sujetos de la institución —ateniéndose a las normas— a estudiantes que se comportan como sujetos cognitivos responsables por sus discursos teóricos, cuando las tareas cambian de rutinarias a no rutinarias. La actividad de los estudiantes es analizada utilizando la noción de praxeología de la teoría antropológica de lo didáctico, que se complementa con un marco teórico para el análisis institucional desarrollado en ciencias políticas.

Abstract. This study presents empirical evidence about the positions of students faced with limit finding tasks in calculus: when they regard the task as a normal one, they behave like norm-abiding subjects of the calculus institution; they shift to behaving like "cognitive subjects", responsible for their theoretical discourse, when the task is deemed non-routine. Students' activity is analysed using the notion of praxeology provided by the anthropological theory of the didactic, together with notions on the functioning of institutions framed by political science.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 349-366)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

The purpose of this paper is twofold. On the one hand, the research aims at showing that while students' technological and theoretical discourses (in the sense of the components of the theoretical block of a praxeology) that support *routine*-practical blocks seem to be strongly influenced by *institutional norms,* the corresponding discourses supporting *non-routine*-practical blocks do reflect mathematical thinking. On the other hand, the analysis aims at showing that combining the Anthropological Theory of the Didactic (ATD; Chevallard, 1999, 2002) with a framework for institutional analysis meaningfully contributes to the understanding of students' behaviour in an institutional setting.

This paper presents partial results of a research project aimed at investigating the influence of institutional practices on students' and instructors' perceptions of the *knowledge to be learnt* about limits of functions in a large, multi-section calculus course in a North American college. Other partial results of this research have been presented in Hardy (2009a, 2009b).

Nowadays in North America there are large post-secondary educational institutions in which enrolment in a calculus course can surpass 250 students and even double this number. On a given semester, there can be 10 or more sections of one calculus course taught by at least 5 different instructors. The structure of these institutions has called my attention on the existence of practices that occur *outside* the classroom and that may have a strong influence on didactic phenomena; practices such as those related to preparing the course outline, choosing a textbook, preparing the final examination by a committee of instructors, studying for the final examination by students, etc. In the college studied in this research, some of these institutional practices emphasise certain mathematical tasks making them *routine*. My focus is on tasks related to the topic limit of functions, routinised by their repetitive occurrence in the final examinations. Reports on the (negative) effect of the routinisation of tasks—in textbooks and in the classroom—on students' learning, can be found, for example, in Lithner (2004) and Selden, Selden, Hauk, and Mason (1999). The absence of theoretical content or the dissociation between theoretical discourses and technical discourses in relation to the topic limits of functions has been reported by different authors. For example, Barbé, Bosch, Espinoza, and Gascón (2005) report on the absence of a theoretical block in the knowledge to be taught about algebra of limits in Spanish high schools; they analyse how this absence imposes didactic constraints on the teachers' practice. The work of Lithner (2004) and Raman (2004) shows that in many calculus textbooks intuitive ideas about limits, the definitions and techniques to find limits are presented in different self-contained sections and that links among these sections are often absent. In Hardy (2009a) I study some of the possible effects that the routinisation of tasks and the absence of theoretical content in instructors' models of the knowledge to be learnt might have on students' praxeological organisations to deal with limit finding tasks. The analysis carried out in the present paper seems to stress the negative effect of the routinisation process and of the absence of theoretical discourses in instructors' expectations of students' performance.

Individuals may behave different in different contexts and in front of different tasks. One could say that an individual *behaves* as a cognitive subject when he or she behaves as a scholar seeking the truth, he or she wants to know for the sake of knowing—in brief, he or she behaves as a *Homo sapiens*. But if we do not take into account the fact that the learner is not only *Homo sapiens*, but also *Homo economicus* and *Homo institutionalis*, then his or her behaviour may appear inconsistent to us. Understanding the different positions that individuals may take in a certain context and in front of a given task, and the reasons of him or her being at this position is key for our understanding of teaching and learning phenomena as they occur in institutional settings. In the present research I have found that while students dealing with the typical tasks proposed to them by the institution seem to behave as *institutional subjects* who rely on the institution's responsibility towards the validity of knowledge (Hardy, 2009a), students dealing with non-routine tasks seem to behave as *cognitive subjects*, interested in mathematical knowledge *per se* and preoccupied by consistency and theoretical explanations. Hence, it is not that the students are unable to behave *mathematically*; it is that the institution does not provide them with the opportunity to do so.

To analyse the differences between students' behaviour in front of *routine* and *non-routine* tasks, I conducted 28 interviews with students who have successfully completed a calculus course. Students' performance in the interview seems to support the conjecture that when dealing with routine tasks (or any task that resembles a routine task), students' choices of techniques are based on what the institution emphasises as *normal* behaviour. Non-routine tasks, however, seem to help students in taking the position of cognitive subjects responsible for their theoretical explanations. In both cases, students' activities are described in terms of praxeological organisations; I have tried to capture the differences between them complementing the notion of praxeology with the notions of *norms*, *rules* and *strategies* and the notion of *position* in an institution, provided by the "Institutional Analysis and Development" framework (IAD; see Ostrom, 2005).

The combination of ATD and IAD has already been used in Sierpinska, Bobos, and Knipping (2008) in a study of students' frustration in prerequisite mathematics courses at the university level, and in Hardy (2009a, 2009b) in studying students' and instructors' perceptions of the knowledge to be learnt about limits of functions at the college level.

This paper is structured as follows. In the next section I present my theoretical framework; in particular, I present the notions of rules, norms, strategies and position developed in IAD, and explain how I have combined these with the notion of praxeology developed in ATD. Relevant features of the college institution and the calculus course studied in this paper are also presented in the next section. The methodology is presented in section 3. Results and their analysis are in section 4. The paper ends with a discussion of the results and some conclusions.

2. Theoretical framework

The main components of ATD and in particular the notion of praxeology have been thoroughly presented in several recent papers and thus I do not go through them here (see, for example, Chevallard, 2002; Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; see also Hardy, 2009a).

In my research, the notion of praxeology provided me with a structure to study the epistemological nature of students (mathematical) activities as they occur within an institution. To study the institutional status of these activities, however, the incorporation of some elements of the IAD framework proved to be useful. In particular, I am interested in understanding the mechanisms that regulate institutional (mathematical) activity and the relation between these regulatory mechanisms and students' construction and appropriation of mathematical knowledge.

According to the IAD framework, an institution is an organisation of repetitive human interaction whose aim is to achieve certain goals (Ostrom, 2005). The institution defines who its participants are and what mechanisms will regulate and make possible the accomplishment of the goals.

In the framework of the educational system considered in this paper, students finish high school at the age of 16 and have to attend a two-year college program in order to be entitled to university studies. The high school curriculum does not include calculus; students take a calculus course for the first time at college level. In the college studied in this research, calculus is taught as a multi-section course. In particular, in the studied semester, there were 19 sections taught by 14 different instructors. There is a common outline, prepared by a committee appointed by the mathematics department, a common textbook, chosen by a textbook committee appointed by the mathematics department, and a common final examination prepared, administered and corrected by a committee made of all the instructors teaching the course. The teaching of calculus is an institution in itself, which I call *College-calculus institution*. It is linked to some supra-institutions such as the department of mathematics, the science committee, the ministry of education, and to some sub-institutions such as the curriculum committee, the classrooms, the final examination committee, etc.

Taking into account the existence of a common final examination—that indeed defines a practice since its general structure has not changed over the years (constants in the questions change but *types* of questions do not change)—and that this final examination is the only practice enforced by the College-calculus institution (midterms, assignments and practices *in* the classroom are the section instructors' business), I could characterise the College-calculus institution's practices about limits by looking at the types of tasks related to limits of functions proposed over the last seven years (2002-2008) and their model solutions available in the textbooks and in the so-called "correction sheets" for the final examinations, written by teachers and made available to students. All problems related to limits in the final examinations are of the "find the limit" type. The model solutions contain no theoretical justifications or proofs of validity. Instructors are free to provide theoretical justifications of the techniques in their lectures, but they cannot require students to provide such justifications in the final examinations. Therefore, while instructors' classroom practices could be modelled with complete mathematical praxeologies, containing both the practical and the theoretical blocks, the final examination practice, which defines, for students, the knowledge to be learnt, must be modelled with praxeologies containing only practical blocks: types of tasks and techniques for solving them. The praxeologies corresponding to these problems are described in Hardy (2009a).

2.1. Routine and non-routine practical blocks

I call *routine tasks* and *routine techniques* those belonging to any of the practical blocks routinised by its repeated occurrence in the final examinations. Non-routine tasks are those that have not appeared in the final examinations of the past seven years. Among the non-routine tasks, I distinguished those that strongly resemble routine tasks but differ from them on the conceptual level from those that are easily recognised by the students as non-routine. For example, a routine task in the final examinations is to find the limit at a constant of a rational function that assumes the 0/0 indeterminate form; in such a case, the polynomials in the numerator and denominator are easily factorable using a standard school-algebra technique, and the value of the limit is a constant (e.g., $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$). A task with a similar setting but in which the value of the limit is infinity or does not exist is a non-routine task that strongly resembles the routine task just described (e.g., $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$). A limit finding task involving non-algebraic functions, for example, are *essentially* non-routine and are easily recognised as such by the students.

2.2. Rules, norms and strategies

The IAD framework distinguishes three mechanisms that regulate human activity within institutions: rules, norms and strategies. Rules are explicitly stated by a recognised legal authority and their violation carries a sanction: "You have to do so and so, if not so and so will happen to you." Norms are implicit and are part of the moral fabric of the institution—they refer to custom and tradition; they do not carry (legal) sanctions and they cannot be (legally) enforced. Strategies refer to courses of action to be taken by a participant of an institution to achieve certain goals. Because an institution is an organisation of repetitive interaction, participants of an institution get to learn the norms and the strategies by observing patterns of interactions and their outcomes.

Mathematical activity in institutions is also governed by rules, norms and strategies. Axioms or logical connections can be understood as rules whose violation leads to contradiction (the sanctions). Mathematical techniques can be understood as strategies to accomplish a certain goal (proving a theorem, finding a limit, etc.). Etiquette in writing papers follows norms; the elegance of the writing, however, cannot replace the validity of a proof.

The main contribution of combining these elements with the notion of praxeology is to provide a framework to investigate the mechanisms that regulate students' and instructors' construction of the praxeologies: *how tasks are classified into types of tasks, how techniques are chosen, and what the sources of explanatory discourses are*.

2.3. Positioning

Participants of an institution are assigned—or assign themselves—to different positions. Positions are the anonymous slots into and out of which participants can move (Ostrom, 2005, p. 40). A position carries in its definition "the set of authorized actions and limits on actions that the holder of the position can take" to achieve a certain goal (p. 41).

In my research, I have identified two positions that students can take in the College-calculus institution and that correspond to two of the four positions identified by Sierpinska et al. (2008, p. 291) in their study of students' frustrations in pre-requisite mathematics courses. These are "Student" and "Learner"[1]. In the position of "Student" a participant abides by the rules and norms of the College-calculus institution addressed to its students; in particular, he or she studies because there is a test coming, not out of disinterested curiosity or passion for the subject. A student takes the position of "Learner" when he or she behaves as a cognitive subject interested in knowing calculus; his or her goal in the institution is to learn.

I have characterised students' positioning by analysing their theoretical discourses—how they explain their choices of a technique, how they support these techniques, and how they justify the validity of these techniques; i.e., by analysing the theoretical blocks of the praxeologies they have built.

3. Methodology

To study students' behaviour in front of routine and non-routine tasks I conducted, in the 2008 winter semester, 28 interviews with college level students who had successfully passed a calculus course in the 2007 fall semester. Procedures regarding subjects' recruitment and their distribution with respect to the teachers are thoroughly explained in Hardy (2009a, 2009b). Interviews were task-based; this type of methodology is described in Goldin (1997).

Interviews consisted in a one-hour, one-to-one encounter with the subject and the protocol included a variety of tasks related to limits (classifying limit expressions, finding limits, finding limits from graphs, and graphing functions). In this paper I discuss some striking differences in students' behaviour when dealing with two of the limit finding tasks. These tasks—to be called from now on *Task R* and *Task NR*—consisted of finding limits that strongly resemble routine tasks but differ from them

1. The other two positions identified by Sierpinska et al. are that of a "Person" and that of a "Client" (2008, p. 291); it might well be that these positions are available in the institution I have studied; none of the interviewed students, however, seemed to have occupied one of these two positions while dealing with the tasks proposed in the interviews.

on the conceptual level and of finding limits that were easily identified by the students as non-routine, respectively. Students were asked to think aloud while working on both tasks. When they were finished, I asked them questions about their calculations, failed attempts, answers, etc.

The choice of problems in Task R is justified in Hardy (2009a). While problems in both Task R and Task NR are non-routine, problems in Task NR are *essentially* non-routine in the sense that they are non-routine *and* they do not resemble routine tasks. The functions involved (cosine and exponential) are different from the standard functions that students are given when asked to find limits in the final examination. Nevertheless, the interviewed students were taught, at some point in their pre-calculus and calculus courses, the graphs of cosine and exponential functions. In addition, techniques to conjecture the value of a limit by means of a calculator and reading limits from graphs are listed in the course outline of calculus. This is to say that, though problems in Task R and NR are non-routine, the calculus course includes techniques that can help students to guess or conjecture the proposed limits. Task NR has a double purpose: on the one hand, it serves as a control of students' abilities to combine the different things they have learnt to find limits—as it is discussed below, students were able to combine different approaches when dealing with Task NR but they were unable to do so when dealing with Task R. On the other hand, it allowed me to observe students' behaviour in front of limit finding tasks that, for the students themselves, are clearly non-routine.

The results and conclusions presented in this paper are based on an analysis of students' approach to the problem[2] R: find $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4}{x^2-25}$ in task R, and to two problems in task NR: find $\lim_{x\to\infty} e^x\cos(x)$ (NR1) and find $\lim_{x\to-\infty} e^x\cos(x)$ (NR2). As was pointed before, my goal is to compare students' behaviour in front of routine and non-routine limit finding tasks. Problems R and NR1/NR2 serve this purpose because, on the one hand, while the rational expression in R strongly resembles those appearing in the final examinations (the limit is taken at a constant that is a zero of the

2. This problem corresponds to problem 2.3 in Hardy (2009a).

denominator and both polynomials are easily factorable using school-algebra techniques), none of the routine techniques help in finding the limit, and on the other hand, the three limits R, NR1 and NR2 can be found using similar ideas (e.g., graphing, table of values, etc.).

4. Results

In the interviews, students have shown that their choice of a technique to find a limit is not based on calculus criteria, but on certain aspects of the functions involved in the limit expressions—aspects that are not relevant from the point of view of calculus but are *made* relevant by their *normal* occurrence in final examinations. A detailed analysis of students' performance in problem R is given in Hardy (2009a, section 5). In this paper I focus on some striking differences between the ways in which some students approached problem R and the ways in which the same students approached problems NR1/NR2. In particular, I analyse the behaviour of two groups of students: Group 1, consisting of five students who stated that they couldn't remember how to deal with a problem such as R, and Group 2, consisting of three students who gave an answer for problem R in the form of a question: "is it undefined?" or "infinity, right?".

4.1. Group 1

Students in Group 1 did not consider the possibility of using non-routine techniques when dealing with problem R—they perceived it as a routine task and their focus of attention was on trying to *remember* the right routine technique. For example, one of the students in Group 1, student S6, failed to find limit R; he said:

> My first reflex was, is always, I put the five here so I saw it was over zero. [...] Again I factor out but... [...] I can't remember how to treat it.

When dealing with the essentially non-routine task, however, these students made use of different techniques, combining graphs with the use of the calculator and with mathematical notions such as that of "bounded function". For example, student S6 succeeded in finding the limit NR2; first he said that the value of the limit was the same as the one he gave for NR1 (infinity), but, after I made a brief intervention, he found the correct limit by reasoning about the behaviour of the two functions involved in the expression and their product. Our exchange was the following:

> I: What about *e* to the *x*? [My intervention.]
>
> S6: Oh, no, it would all go towards zero, yes, that's true. *e* to the *x* would be closer and closer to zero. So this would go towards... but I do not know how to treat the *cos* in that situation. I know this goes towards zero [for the exponential function] and *cos*... Because even if this is going towards zero, if my *cos* is getting bigger and smaller... but it is always the same sequence multiplied by that, I guess I could assume it is going towards zero.

He even made the non-trivial reflection that, if a function is going towards zero and it is multiplied by a function that is getting bigger and smaller, that does not guarantee by itself that the limit would be zero. He convinced himself that the limit was zero when he realised that the behaviour of cosine was "always the same sequence".

Two students in Group 1 spontaneously thought about using the calculator to deal with problems NR1/NR2 but they did not consider this possibility when dealing with problem R—in front of which they froze just stating "I am stuck" or "I am not sure [what to do]".

Furthermore, one of the students, after using the calculator to conjecture the value of limits NR1/NR2, tried to support her conjectures by means of mathematical arguments. Her reasoning went along the following line: because the cosine function is bounded, what matters for the limit is the behaviour of the exponential function.

4.2. Group 2

The students in Group 2 provide an answer for problem R in the form of a question but they did not feel compelled to justify or further explore their conjectures. The same students, however, when dealing with task NR, were not satisfied with just stating a conjecture; without being prompted to do so, they tried to justify it. For example, when given problem R, student S21 said: "Could it be undefined?" When given problems NR1/NR2, however, he said:

> Well, there's an *e* that would keep growing. Cosine goes between one and negative one. Well, the cosine you can't really find it, it keeps going up

> and down so the limit does not exist.… I think the limit... Well, since *cos* is either one or negative one it would be positive infinity or negative infinity. But since it is to infinity, it can't really exist.

Student S12, when given problem R, said "Infinity, right?" and did not display any further interest in the problem. When given problem NR1, she also formulated her answer in the form of a question: "Can't you say it is just infinity?" However, she immediately continued, trying to justify her statement:

> Ok, so this is infinity and cos of… Can't you say it's just infinity? Because this is infinity and cos is… bounded; so infinity.

To deal with problem NR2 she spontaneously started using her calculator to conjecture the value of the limit. The third student in Group 2, who had also answer problem R with a question and no further justification, when given problems NR1/NR2 said:

> Oh, ok. Well, this goes to plus infinity [for the exponential function in NR1], this goes to… plus one, minus one [for the cosine function]. I could say… because this is plus or minus infinity. Well, my teacher would say that this limit won't exist, but I say it's plus infinity and minus infinity. And this is of course zero because this goes to zero [the exponential function in NR2] and this [the cosine function] is plus one and minus one, this [the exponential] goes very rapidly to zero, so you don't care if it's minus one or plus one. [He drew a very good sketch of the function $f(x) = e^x \cos(x)$.]

5. Discussion and conclusions

Independently of their performance, all students recognised problems NR1/NR2 as non-routine. Their discourse related to this recognition was based on unfamiliarity: they claimed that these were problems that they have not often (or ever) done ("I don't remember doing limits with e^x", "Do we cover this in Calculus I?"). In this sense, I surmise that, in the most general setting, students immediately classify tasks they are confronted with into two types: *familiar tasks* and *unfamiliar tasks*. The set of familiar tasks contains the set of routine tasks and those that strongly resemble them. The set of unfamiliar tasks contains those problems they think they have never seen or done before. These two types of tasks define two different praxeologies related to limit finding tasks: a familiar or routine praxeology, and an unfamiliar or non-routine praxeology. The features that guide the classification of tasks, however, are not based on criteria characteristic of calculus. To distinguish familiar from unfamiliar tasks, interviewed students appeared to focus on the function of which a limit was being taken: if the function is a rational function (or a function involving square radicals), then it is a familiar task, otherwise it is an unfamiliar task. Among familiar tasks, they distinguish tasks in which the polynomials involved are "easily" factorable from tasks in which the polynomials are not "easily" factorable (see Hardy, 2009a, section 6). Criteria typically belonging to calculus such as whether the limit is taken at a constant or at infinity, types of indeterminate forms, existence of the limit, etc., were not considered as classifying features.

Techniques to accomplish familiar tasks are those they have learnt in the context of accomplishing routine tasks: factoring and cancelling common factors, substitution, and rationalisation. To accomplish unfamiliar tasks, it is clear to them that none of the routine techniques apply; this fact seems to trigger the use of other techniques they have learnt: making tables of values, graphing, studying the behaviour of the involved functions separately, etc.

My research findings (Hardy, 2009a) show that students' technological discourse when dealing with familiar tasks refers to what's *normal* in the institution. Interviewed students supported their use of a technique to deal with a familiar task (such as problem R) by saying: "We do this because that's what we usually do under the circumstances" (Hardy, 2009a, section 6). The corresponding theoretical discourse seems to be absent. It is my conjecture that in the praxeology corresponding to unfamiliar tasks, the justification of the technique (the technology) is that *routine techniques do not apply to these problems*—for example, the expressions cannot be factored or rationalised—and therefore one must resort to unorthodox means. This justification is a *cognitive norm*. On the theory level, the students made use of *mathematical rules* (e.g., the limit of a bounded function multiplied by a function that tends to zero is zero), and *mathematical strategies* (e.g., making a table of values to conjecture the value of a limit).

The following table summarises the analysis above:

Practical Blocks		Theoretical Blocks	
Types of tasks	Techniques	Technology	Theory
Familiar	Techniques that apply to routine tasks: factoring, cancelling common factors, substitution, rationalisation, etc.	This is what we usually do under the circumstances	Absent
Unfamiliar	Unorthodox techniques: graphing, making tables of values, studying the involved functions separately, etc.	Routine techniques do not apply to these problems	*Based on mathematical rules and strategies*
Classification of tasks and choice of techniques based on institutional (non-mathematical) norms		*Discourse based on institutional (non-mathematical) norms*	

Table 1. Students' praxeologies to deal with familiar and unfamiliar tasks

Students in Group 1 perceived limit R as a routine task and could not overcome the fact that the typical techniques that apply to routine tasks did not seem to work in this case. They claimed that they did not remember how to deal with a limit of this kind or that they could not see how to use the standard techniques. Though being unable to find the limit, they did not consider the possibility of using non-routine techniques. Nevertheless, when given the essentially non-routine tasks, they proved to have other resources to deal with limits; they either spontaneously thought of using the calculator, or they reasoned about the behaviour of a function from the behaviour of its factors. Unfamiliar tasks seem to trigger the recovery of knowledge that has been hindered by the routinisation process.

Students in Group 2 solve problem R by stating a question, e.g., "Infinity, right?", and not showing any further interest in the problem. When given problems NR1/NR2, however, their answer-solution was followed by an explanatory discourse, e.g., "Infinity, right? Because so and so…"

In the studied college, instructors' model of the *knowledge to be learnt* about limits is compounded only of practical blocks. Fragments of corresponding theoretical blocks, however, do form part of the *knowledge to be taught* as defined in curricular documents by the College-calculus institution (Hardy, 2009b). This, together with the institutional context, suggests two different explanations of why students, when dealing with tasks that they relate to those exemplifying the knowledge to be learnt (familiar tasks), provide a solution without justification, but when dealing with an unfamiliar task, they do try to justify their statements. On the one hand, it might be that when dealing with familiar tasks, students just "copy" the format of solutions expected in the final examinations: a solution without any justification. When dealing with unfamiliar tasks, however, they have to search for an approach that belongs to the knowledge they have been taught, and in that type of knowledge, theoretical justifications do exist. On the other hand, it might be that when dealing with familiar tasks, students rely on the authority of the institution—it is the institution, embodied in the persons responsible for the knowledge to be taught and learnt, and in the official documents and texts, and not the students, who is responsible for the validity of this knowledge. Theory in the mathematical sense is not the students' responsibility (Chevallard, 1985, p. 75). Unfamiliar tasks, however, might be identified by the students as "outside" the jurisdiction of the institution; theoretical explanations and consistency is indeed a concern and students take responsibility over them. These two possible explanations are not mutually exclusive; they might complement each other in explaining students' behaviour in front of routine and essentially non-routine tasks.

Students in Groups 1 and 2 have shown (different forms of) *normal behaviour* when dealing with familiar tasks: abiding by the norms of the institution, not going any further than what they believe is expected from them. This suggests that, when dealing with familiar tasks, students' positioning was that of "Students". When dealing with essentially non-routine tasks, however, they behaved as cognitive subjects and they based their explanatory discourses on mathematical rules and strategies—they combined different techniques to tackle a problem, thinking "outside the box" and providing theoretical justifications. In other words, students positioned themselves as "Learners".

Institutions vary substantially in the degree to which participants control their own entry into or exit from a position. Questions that arise from this are, on the one hand, about the degree of freedom that students have to enter or exit a position; and, on the other hand, about whether there are particular actions that can be taken, by the different institutions taking part in the didactic phenomena, to favour students taking the position of "Learners".

Balacheff (1999) points out the difference between the norms in a didactic contract, which act locally, in relation to a particular classroom activity, as a temporary didactic strategy, and the more permanent normative mechanisms of classroom custom. A question that arises from this distinction is how these different types of norms complement each other (or crash together) in shaping students' (and instructors') behaviour in the classroom. The norms discussed in this paper are of the second type; they refer to custom and tradition in the College-calculus institution. Students' performance in the interviews shows that these are the norms that regulate students' behaviour when facing the typical limit finding tasks proposed by the institution.

In the interviews, the introduction of non-routine tasks seemed to act as a disruptive element, breaking the norm, and thus creating a space for creativity and requiring explicit theoretical justification.

In my research, ATD provided me with a framework to characterise the different types of knowledge taking part in the process of didactic transposition and the epistemological nature of students' and instructors' practices—relating to limits of functions. An analysis in terms of praxeologies shows precisely what types of tasks the participants identify, what are the techniques they choose to accomplish the tasks, and what their explanatory discourses are. The notions of norms, rules, strategies, and position, defined in IAD, allowed me to identify and analyse the (institutional) sources of students' behaviour in those practices and to attempt an explanation of students' different attitudes towards mathematical knowledge. This analysis, in terms of the mechanisms that regulate human behaviour in institutions, contributes to the understanding of *how* and *why* participants classify tasks, choose techniques, and provide explanatory discourses. It is in this sense that the combination of ATD and a framework for institutional analysis can contribute to our understanding of didactic phenomena occurring in institutions.

References

Balacheff, N. (1999). Contract and custom: Two registers of didactical interactions. *The Mathematics Educator, 9*(2), 23-29.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 235-268.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Goldin, G. A. (1997). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 40-62 + 164-177.

Hardy, N. (2009a). Students' perceptions of institutional practices: the case of limits of functions in college level calculus courses. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 341-358.

Hardy, N. (2009b). *Students' models of the knowledge to be learned about limits in college level calculus courses. The influence of routine* *tasks and the role played by institutional norms* (Doctoral dissertation). Concordia University, Canada.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23,* 405-427.

Ostrom, E. (2005). *Understanding institutional diversity*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three college mathematics textbooks. *Journal of mathematical behavior, 23,* 389-404.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. & Mason, A. (1999). *Do Calculus students eventually learn to solve non-routine problems* (Technical report). Cookeville, TN: Tennessee Technological University. http://math.tntech.edu/techreports/TR_1999_5.pdf

Sierpinska, A., Bobos, G. & Knipping, Ch. (2008). Source of students frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses. *Instructional Science, 36,* 289-320.

Un estudio sobre la noosfera para entender la enseñanza de la geometría a través de la construcción del triángulo

Lidia Ibarra, Blanca Formeliano, Graciela Méndez,
Mirta Velasques y Florencia Alurralde
Facultad de Ciencias Exactas, Univ. Nacional de Salta, Argentina

Abstract. In this paper we analyse part of the documents produced by the noosphere related to the tasks concerning the theme *Triangle: constructions*. We focus on the levels of 6th year primary school, level 2 and 7th year of secondary education, level 3. In all the cases the nature of the geometric activities appearing in the mathematical organisation taught is clearly "showing". We conclude that school provides students with its own school mathematics, as each institution puts forward different, usually incomplete, mathematical organisations, with respect to the construction of triangles. The true mathematical discipline, and more particularly the way of thinking typical of geometry, is thus hidden.

Résumé. Dans ce travail nous analysons quelques-uns des documents produits par la noosphère à propos des tâches relatives au thème *Triangle : constructions*, en nous centrant sur les classes de 6^{e} et 7^{e} années de l'école générale (niveau 2-Primaire et 3-Secondaire respectivement). Dans tous les cas, les activités géométriques qui sont proposées lors de l'enseignement de cette organisation mathématique ont un caractère nettement « monstratif ». Nous mettons en évidence que l'école met à la disposition des élèves sa propre mathématique scolaire et que chaque institution propose des organisations mathématiques différentes, généralement incomplètes, autour de la construction de triangles. La discipline mathématique véritable, en particulier celle qui est propre à la géométrie, se retrouve alors occultée.

Resumen. En el presente trabajo analizamos una parte de los documentos producidos por la noosfera y relacionados con las tareas en torno al tema *Triángulo: construcciones*. Nos centramos en los niveles de 6º año de Escuela General Básica Nivel 2-Primaria y 7º año de Escuela General Básica Nivel 3-Secundaria. En todos los casos las actividades geométricas que aparecen en la organización matemática enseñada tienen un carácter netamente «mostrativo». Concluimos que la escuela proporciona su propia matemática escolar ya que en cada institución se proponen organizaciones matemáticas distintas, habitualmente incompletas, en torno a la construcción de triángulos. Se esconde así la verdadera disciplina matemática y, en particular, el modo de pensar propio de la geometría.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 367-381)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

En el presente trabajo analizamos una parte de los documentos que produce la noosfera relacionados con el tema «Triángulo: construcciones», focalizado en 6º año de Escuela General Básica Nivel 2-Primaria y 7º año de Escuela General Básica Nivel 3-Secundaria. Para ello indagamos los diseños curriculares jurisdiccionales y las tareas propuestas tanto en los libros de texto utilizados por los estudiantes como en sus carpetas. Esto nos ayuda a concebir la forma de abordar la construcción de los triángulos en las aulas, ya que constituye una parte importante de la organización matemática enseñada.

Tomamos como referencia los resultados del proyecto de investigación nº 1171 del CIUNSa donde se analiza la segmentación del Sistema Educativo de la Provincia de Salta (Argentina) como consecuencia de la implementación de la Ley Federal de Educación, hoy derogada y reemplazada por la Ley Nacional de Educación en vigencia, y el estudio de los documentos curriculares nacionales, jurisdiccionales y provinciales llevados a cabo en el proyecto nº 1494 del CIUNSa (Ibarra et al. 2006). Observamos que el tema «Construcción de triángulos» se presenta sin especificar cómo complejizar su estudio y sin organizar dicho trabajo en cada año de escolaridad obligatoria.

A partir de los diferentes fenómenos que fuimos distinguiendo en las actividades desarrolladas por los alumnos de 6º y 7º y de las investigaciones realizadas anteriormente, advertimos que el libro de texto es la guía que adopta el docente para enseñar geometría. Todo ello nos llevó a plantear una serie de preguntas que organizaron nuestro trabajo. ¿Cómo presentan las tareas los autores de los libros de texto? ¿La propuesta se relaciona con una organización matemática de referencia? ¿Es un germen de problemas la construcción con regla y compás? ¿Cuáles son las tareas que diseñan y/o seleccionan de los libros de texto los docentes para enseñar los problemas de construcción con regla y compás?

A fin de empezar a responder dichas cuestiones realizamos el recorrido siguiente:

(a) Determinación de la organización matemática de referencia para el tema «Construcción de triángulos».

(b) Análisis de la organización matemática a enseñar, focalizado en el tema «Construcción de triángulos».

(c) Análisis de la organización matemática enseñada a través de las carpetas de los alumnos.

2. Marco teórico

Para transmitir conocimientos sobre una cuestión determinada —en esta ocasión, la construcción de triángulos— se recorre un camino que empieza en la *sociedad*, continúa en la *escuela,* sigue por cierta *área* dentro de una *disciplina* en la que se estudia la *cuestión,* por cierto sector dentro del *área* y por cierto *tema* de dicho del *sector*. Esto hace que en cada institución podamos hablar de una geometría escolar. Atendiendo a ello se realiza el estudio, teniendo en cuenta los distintos niveles de enseñanza, en nuestro caso en la provincia de Salta, Argentina, nos situamos en la finalización de la escuela primaria e inicio de la secundaria.

El marco teórico de la presente investigación se basa en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Una obra matemática, también llamada organización matemática, nace como respuesta a un tipo de cuestiones o tareas problemáticas y está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997). La TAD establece que las tareas requieren diferentes procedimientos, llamados *técnicas,* que permiten dar respuestas a las actividades propuestas. Las técnicas permiten agrupar los problemas en lo que llamaremos *tipos de tareas*.

Para que una técnica pueda existir en una institución no solo debe dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas sino que también debe justificarse. Las argumentaciones que se elaboran para describir y justificar la utilización de cada una de las técnicas se denominan *elementos tecnológicos*. Así como cada técnica se asocia a una tecnología, cada tecnología se asocia a una teoría. Entonces, una organización matemática consta de cuatro categorías de elementos: tipos de tareas (T_i), técnicas (τ_i), tecnologías (θ_i) y teorías (Θ_i).

Diremos, por ende, que estudiar matemáticas consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una organización matemática para dar respuesta a ciertos tipos de tareas problemáticas que surgen en una institución determinada.

Según Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997), los exámenes, las carpetas y los libros de texto son dispositivos didácticos en la medida en que cada uno de ellos incide sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas. En consecuencia, el análisis de los apuntes de los alumnos, de los exámenes y de las guías de estudio que el docente estructura, entre otros, constituye una revisión del material empírico de la organización matemática enseñada.

3. Metodología de trabajo y desarrollo

Partimos de algunos conceptos locales extraídos del marco teórico. En primer lugar, analizamos la organización matemática de referencia que forma parte del desarrollo curricular del área de la matemática focalizada en el eje geometría, en el tema «Construcción de triángulos». En segundo lugar, observamos las características de las instituciones, a través de sus proyectos institucionales, los libros de texto seleccionados —que orientan la transmisión del conocimiento geométrico— y los cuadernos de los alumnos, que permiten acercarnos al modo en que aprenden a través de sus producciones.

Con los elementos teóricos aportados por la TAD y con el propósito de generar categorías teóricas a partir de la indagación de los libros de texto, organizamos los datos y examinamos los contenidos a enseñar.

El desarrollo del trabajo se realiza a través de las tres etapas citadas anteriormente.

3.1. Determinación de la organización matemática de referencia para el tema «Construcción de triángulos»

El desarrollo de esta etapa requiere un análisis histórico-epistemológico que permita dar cuenta de la complejidad de la construcción de un triángulo con regla y compás.

¿Qué teoría sustenta la construcción con regla y compás de un triángulo? ¿Qué definiciones son necesarias y suficientes para la construcción con regla y compás de un triángulo? ¿Bajo qué condiciones son posibles las construcciones con el uso de la regla y el compás? ¿Cuáles son las restricciones emergentes en la construcción de un triángulo con regla y compás?

Teorías que sustentan la construcción con regla y compás

En los *Elementos* de Euclides (Libro I) encontramos definiciones, proposiciones y postulados que hacen referencia a la construcción de triángulos, que orientan la organización matemática de referencia a partir de la cual organizamos las tareas. Euclides define los triángulos teniendo en cuenta los lados (Definición 20) y los ángulos (Definición 21).

– *Definición 20*. De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales; isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y el escaleno el que tiene los tres lados desiguales.
– *Definición 21*. De los triángulos, el triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos.

Dentro de las definiciones, no está explícito que un triángulo quede definido por dos cualidades como, por ejemplo, isósceles y acutángulo, o isósceles y rectángulo, o escaleno y rectángulo.

Para la construcción del triángulo equilátero, Euclides empieza con los segmentos y divide el problema en tres etapas consecutivas (Levi, 2003):

– Libro I, proposición 1: Sobre un segmento dado construir un triángulo equilátero.
– Libro I, proposición 2: Trazar un segmento igual a un segmento dado con extremo en un punto dado.
– Libro I, proposición 3: Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al otro.

La reconstrucción de un triángulo equilátero enunciada como proposición, según Beppo Levi (2003), es un problema que Euclides resuelve usando el compás, mediante el trazado de dos círculos. Euclides omite justificar por qué las dos circunferencias deben cortarse, noción topológica que hoy podemos admitir o demostrar gracias al concepto de continuidad enunciado por Richard Dedekind.

Observamos que a partir de la definición de triángulo equilátero y de los procedimientos utilizados en su construcción es posible generar nuevas tareas de construcción de triángulos.

De las diferentes construcciones emerge la necesidad de justificar el transporte de segmentos y de ángulos para la construcción de triángulos isósceles y escalenos. A medida que ampliamos los tipos de triángulos en función de las propiedades que cumplen los lados y ángulos, los procedimientos se justifican con elementos teóricos que en muchos casos no fueron definidos en los *Elementos* de Euclides, como los teoremas de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y la desigualdad triangular.

La organización matemática de referencia queda definida mediante los tipos de tareas, las diferentes técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se requieren para interpretar y justificar dichas técnicas. En nuestro caso tenemos los siguientes componentes:

3.1.1. Tipos de tareas para construir un triángulo bajo ciertas condiciones

– T_1: Construir un triángulo dado un lado (la consideramos incluida en T_2).
– T_2: Construir un triángulo dados tres lados.
– T_3: Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos.
– T_4: Construir un triángulo dados un ángulo y un lado.
– T_5: Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
– T_6: Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

La justificación de los mencionados procedimientos aparece como enunciados de la siguiente forma: existen operaciones elementales para la construcción de un triángulo utilizando únicamente la regla (Puig Adam, 1961):

– Trazado de una recta por dos puntos.
– Intersección de dos rectas.
– Transporte de segmentos.
– Transporte de ángulos.

El uso exclusivo de la regla impide la construcción de determinados triángulos, por ello es necesaria la introducción de operaciones geométricas que se realizan con el compás; a saber:

– Trazar una circunferencia de centro y radio dados.
– Hallar las intersecciones de una recta y una circunferencia.
– Hallar las intersecciones de dos circunferencias.

Ejemplificamos con la tarea T_5: Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

3.1.2. Técnicas utilizadas para llevar a cabo dichas tareas

La construcción puede realizarse con distintos instrumentos (con una hoja de papel con borde recto, con regla y transportador o con compás) y del siguiente modo:

τ_1: Realizando marcas en la hoja de borde recto se transportan los lados y plegando el papel, con una porción triangular del mismo, se transporta el ángulo.

τ_2: Con la regla transportamos los lados y con el transportador tomamos la abertura del ángulo.

τ_3: Con un compás que mantenga la abertura transportamos el lado, luego la abertura del ángulo y el otro lado. Los discursos matemáticos que enuncian en qué condiciones pueden realizarse estas operaciones elementales, constituyen los elementos tecnológicos que, en última instancia, determinarán si la construcción es posible o no.

Por ejemplo, con esta técnica se puede construir un triángulo dado un lado y dos ángulos (T_3). (Θ_1: existe la solución, si la suma de estos dos ángulos es menor que dos rectos.) Las técnicas τ_1 y τ_2 por sí solas son insuficientes para la tarea T_2, es decir, construir un triángulo dados tres lados o construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (T_6).

En la construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (si la suma de los dos ángulos es menor que dos rectos) se generan variantes en la resolución que dependen de si el ángulo comprendido es agudo, recto u obtuso. A su vez, los lados pueden ser iguales entre sí o distintos. Si los lados son iguales la tarea se reduce a T_4.

Caso 1: dos lados iguales y el ángulo comprendido es agudo (transporte de ángulos y segmentos). Se obtiene isósceles.

Caso 2: dos lados iguales y el ángulo comprendido es recto (transporte de segmentos y ángulos). Se obtiene isósceles.

Caso 3: dos lados iguales y el ángulo comprendido es obtuso. Se obtiene isósceles. Esta técnica puede usar solo regla, regla y compás, solo compás y/o regla y transportador.

T_3: Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos; podemos considerar dos sub-tareas:

T_{31}: Construir un triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y un ángulo opuesto.

T_{32}: Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos adyacentes al lado.

En la tarea T_{31} se construye el tercer ángulo por transporte del suplemento de la suma. La restricción en esta tarea se presenta si la suma de los dos ángulos no es menor que dos rectos. Este es otro ejemplo que se justifica con el transporte de ángulo.

τ_4: Intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás.

A los elementos tecnológicos asociados a las técnicas τ_1, τ_2, τ_3 y τ_4 se los deduce del axioma de continuidad (Θ_2) y del postulado nace la solución, si la suma de estos dos ángulos es menor que dos rectos (Θ_1), referentes teóricos que encontramos en la geometría euclidiana.

Al construir un triángulo dados un lado y dos ángulos, se generan los triángulos obtusángulo isósceles y escaleno si la suma de los dos ángulos es menor que un recto; si la suma es mayor que un recto es acutángulo isósceles o escaleno.

3.1.3. Tipos de tareas que permiten construir otros triángulos, utilizando regla y compás

T_1: Construir un triángulo dado un lado (la consideramos incluida en T_2; es posible construir el equilátero y el isósceles rectángulo).

T_2: Construir un triángulo dados tres lados (el escaleno, rectángulo).

T_4: Construir un triángulo dados un ángulo y un lado.

3.2. Organización matemática a enseñar. Análisis focalizado en el tema *Triángulo: construcción*

Queda delimitada por los contenidos de geometría que la institución acuerda que deben ser enseñados, condicionados por los diseños curriculares provinciales de 7.º grado que proponen: Construcción de figuras con regla y compás o los núcleos de aprendizajes prioritarios de 6.º grado, en los que se especifica construir figuras utilizando regla, compás, transportador y escuadra, y por los libros de texto que la institución selecciona dentro del proyecto institucional.

3.2.1. De los contenidos propuestos en los documentos curriculares

Los diseños curriculares provinciales de 7.º grado expresan como contenido conceptual *construcciones de figuras con regla y compás* y como contenido procedimental *construcción de figuras con regla y compás*.

Los contenidos básicos comunes de 6.º grado, por su parte, expresan como contenido conceptual *propiedades de los lados de un triángulo y propiedades de los ángulos de un triángulo* y como contenido procedimental *justificación de las construcciones en base a propiedades de las figuras*. En los núcleos de aprendizajes prioritarios de 7.º grado encontramos:

> La producción y el análisis de construcciones geométricas considerando las propiedades involucradas y las condiciones necesarias y suficientes para su construcción, y también: el reconocimiento y análisis de figuras y cuerpos geométricos argumentando sobre las propiedades involucradas en situaciones problemáticas que requieran construir figuras a partir de diferentes informaciones sobre propiedades y medidas utilizando compás, regla, transportador y escuadra, y evaluando la adecuación de la figura obtenida.

En 6.º grado se especifica: «Construir figuras utilizando regla, compás, transportador y escuadra.»

Continuamos con el estudio de los libros de texto, considerados como indicadores de la organización matemática a enseñar, teniendo en cuenta además las tareas definidas en el marco teórico y los materiales elaborados por los docentes, guías de trabajos prácticos, en base a los elementos tecnológicos.

3.2.2. De los contenidos propuestos en los libros de texto

Se realiza el estudio sobre 12 libros de texto, para cada año (6.º y 7.º), de mayor circulación en la ciudad de Salta, entre los cuales se seleccionan para analizar los trabajados en las instituciones en las que fue posible acceder a realizar el trabajo de investigación.

Las actividades geométricas, en cuanto a construcción de triángulos, desarrolladas en los libros de texto se presentan del siguiente modo:

– Libros de 6.º año de EGB 2: Las únicas tareas que aparecen en los libros de texto de 6.º analizados son T_1 y T_2 y representan el 20,5% del total de las tareas analizadas en los mismos.
– Libros de 7.º año de EGB 3: Observamos que muchas veces la construcción de triángulos es un tema ausente en las tareas propuestas en los libros de texto de 7.º año. En un 20% de los libros estudiados las construcciones de triángulos aparecen a través de las siguientes tareas:
    – T_2: Construir un triángulo dados los tres lados.
    – T_3: Construir un triángulo dados dos ángulos y un lado.
    – T_5: Construir un triángulo dados un ángulo y dos lados.

En un 60% de los libros el tema *triángulo* aparece en la sección *áreas*. En el 20% restante, la cuestión *construcción de triángulos* no aparece.

3.3. Análisis de la organización matemática enseñada a través de las carpetas de los alumnos

Continuando con el tema *Construcción del Triángulo*, retomamos las preguntas iníciales y profundizamos la observación de las actividades matemáticas desarrolladas en el aula. Para ello, se realiza el estudio de 40 carpetas de alumnos de 6.º y 7.º, de cinco instituciones escolares elegidas todas dentro del radio de la ciudad de Salta Capital.

Para el análisis de las actividades geométricas, en cuanto a construcción de triángulos, desarrolladas en los cuadernos, tenemos en cuenta los siguientes indicadores: cantidad de tareas referidas al tema, procedimientos utilizados por los niños y sus respectivas justificaciones.

3.3.1. Carpetas de 6.º año

– Institución I_1: Los alumnos realizan sus actividades con fotocopias de un texto de un determinado autor.

De un total de 75 tareas, 5 de ellas (6,66%) están dedicadas a probabilidades y estadísticas, y 4 (5,33%) a geometría y medida. Ninguna de las tareas hace referencia a la construcción de triángulos.

– Institución I_2: Los alumnos trabajan con fotocopias de textos de diferentes autores.

De 85 tareas, 5 de ellas (5,88%) se dedican a probabilidades y estadísticas; 3 de ellas (3,52%) a geometría y medida, y el resto, 77 (90,58%) al eje Números y Operaciones. La única tarea relativa al tema de triángulos es: Cálculo de ángulos interiores del triángulo a través de ecuaciones lineales.

– Institución I_3: En la carpeta de los alumnos se indican páginas del libro con las tareas a realizar y hay guía de trabajos prácticos del profesor.

Todas las tareas desarrolladas en esta institución para el 6.º año giran en torno a actividades aritméticas y de estadística.

– Institución I_4: No tiene 6.º de EGB 2 a consecuencia de la segmentación existente dentro del Sistema Educativo de la Provincia de Salta, tal como pusimos de manifiesto en anteriores investigaciones.

– Institución I_5: Ejercicios sin referencias bibliográficas.

De 66 tareas sobre cálculos aritméticos y resolución de ecuaciones desarrolladas durante el año, solo 4 (6,06%) se refieren a cálculo de perímetro (medida) y la geometría está ausente en la propuesta.

3.3.2. Carpetas de 7.º año

– Institución I_1: Los alumnos realizan sus actividades con fotocopias de un determinado autor.

De 105 tareas, se dedican 5 (4,73%) a probabilidades y estadísticas; 3 (2,85%) a geometría y medida; 9 (8,58%) a evaluaciones y el resto (84,76%) se utiliza para el eje Números y Operaciones. Las tareas se refieren a: Clasificación de ángulos según la amplitud. Ángulos formados por dos rectas paralelas y dos transversales.

– Institución I_2: Se trabaja con fotocopias de varios libros de diferentes autores.

Ausencia de actividades geométricas.

– Institución I_3: En la carpeta de los alumnos se observa que estos escriben la página del libro indicando la tarea a realizar. Contiene una guía de trabajos prácticos del profesor.

Todas las tareas desarrolladas en esta institución giran alrededor de actividades aritméticas, algebraicas y de estadística para el 7.º año.

– Institución I_4: Las carpetas contienen fotocopias de una guía de estudio elaborada por el docente [1].

Las tareas geométricas propuestas en esta institución se basan en el trazado de figuras y se enuncian usando el lenguaje geométrico adecuado al nivel educativo de los alumnos, otras giran alrededor de la medida, como el cálculo de perímetro.

– Institución I_5: Hay ejercicios sin referencias bibliográficas.

De 90 tareas sobre cálculos aritméticos y resolución de ecuaciones de una incógnita desarrolladas en un año, solo hay 2 (2,22%) referidas al cálculo de perímetros y superficies.

4. Conclusiones

4.1. Sobre la organización matemática de referencia

La resolución de los diferentes tipos de problemas relacionados con la construcción de triángulos mediante distintas técnicas, permitió agruparlos en función de los datos que se proporcionan en el enunciado y justificar teóricamente el proceso de construcción.

4.2. Sobre la organización matemática a enseñar

La ausencia de determinadas condiciones para la construcción de triángulos en 6.º y 7.º grado es una de las características de los diseños curriculares respectivos lo que se ve reflejado en la mayoría de los libros de texto. La presentación del tema *Construcción de Triángulos* es bastante desarticulada en tanto que aparecen actividades sin secuenciación ni profundización. En consecuencia, el tema se presenta de manera incompleta (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004) en el sentido que las tareas que están presentes en los libros de texto no explicitan las posibles variaciones de las técnicas de construcción que permitiría, por ejemplo, abordar la construcción de triángulos como el isósceles-rectángulo, el isósceles-acutángulo y el isósceles-obtusángulo, ni la variación de los datos. Se observan actividades tales como construir todos los triángulos posibles yuxtaponiendo tres palitos (4 cm; 5,5 cm y 8 cm) (T2), sin tener en cuenta la desigualdad triangular.

1. Consta de ocho guías de estudio que nosotros identificaremos como tareas.

Los problemas geométricos aparecen aislados y se pone de manifiesto la ausencia de justificaciones e interpretaciones que podrían proporcionar elementos tecnológicos para establecer interrelaciones entre las diversas actividades. Todas las propuestas de los autores tienen una única solución por lo que no se plantea la cuestión de las *condiciones de existencia* de todas las soluciones posibles, lo que provoca dificultad para desarrollar el germen de problemas en torno a la *construcción de triángulos*.

Los problemas geométricos no aparecen en los libros de texto de 6.º de EGB 2 y 7.º de EGB 3, centrándose el mayor porcentaje de las actividades en los problemas de cálculo de superficie que corresponden al eje Medida. La mayoría de los autores de los libros de texto contextualiza el tema Construcción de Triángulos en forma arbitraria y truncada, ya que se rigen por los Documentos Curriculares (C.B.C., D.C.P., Núcleos de Aprendizajes Prioritarios).

4.3. Sobre la organización matemática enseñada

La ausencia de los problemas geométricos en las carpetas de los alumnos se corresponde con la propuesta de los libros de texto. Este fenómeno didáctico en torno a la enseñanza de la Geometría es un desafío a superar en la enseñanza primaria, como etapa inicial de un trabajo futuro, ya que encontramos que en 6.º año (EGB 2) y 7.º año (EGB 3) se presentan actividades geométricas sin continuidad ni secuenciación.

Las actividades que figuran en las carpetas de los alumnos no están acompañadas de las justificaciones matemáticas pertinentes al nivel educativo en cuestión, en consecuencia las actividades geométricas tienen un carácter netamente *mostrativo* (Gascón, 1997).

4.4. Conclusiones generales

En los documentos curriculares C.B.C., D.C.P. y N.A.P. no se especifica qué triángulos se pueden trabajar en cada etapa escolar, solo aparecen los contenidos conceptuales y procedimentales en forma general.

En los libros de texto se presentan los contenidos matemáticos en un mismo nivel. Así, por ejemplo, los polígonos regulares y los triángulos se proponen conjuntamente.

Asimismo, la generalidad observada en el análisis de las propuestas curriculares se repite en los libros de texto. En estos los problemas de geometría relativos a la construcción con regla y compás son escasos en 6.º y en 7.º. Y cuando aparecen los problemas de construcción, entonces se concentran en un mismo tipo de problemas triviales. Así, por ejemplo, se propone construir un triángulo cuyos lados miden 5 cm; 2,5 cm y 6 cm, en el libro de texto de 7.º año. Como consecuencia, la problemática de la construcción de triángulos no está organizada de manera que en 7.º se amplíen, completen y desarrollen las tareas realizadas en el curso anterior. Estas deficiencias en la organización global de la matemática enseñada originan algunas de las carencias que hemos señalado.

En general, en los libros considerados no hay una propuesta sistemática y coherente (global) sobre la construcción de triángulos con sus correspondientes técnicas y elementos tecnológicos. Aparecen tipos de tareas como, por ejemplo, T_1, T_2, T_3 y T_5 sin una justificación adecuada de las técnicas a utilizar. Los datos proporcionados en los enunciados de las actividades son insuficientes para realizar los procedimientos respecto del objeto teórico que funciona como modelo. Por ejemplo: ¿Qué ángulo aparece como dato? ¿Existen condiciones que deben cumplir los dos lados suministrados como datos para construir el triángulo? ¿Qué condición debe cumplir el ángulo respecto de los dos lados?

De 220 tareas analizadas en cuadernos de 6.º año, el 3,5% de las mismas hace referencia a la construcción de triángulos y, en 7.º año, de 275 solo el 2,2% se refiere al tema. A esto debemos agregar que la decisión de los docentes de sacar copias de las actividades de los libros traslada al aula las falencias observadas en relación con la organización de la propuesta de los libros de texto.

Así, el docente que no posee una adecuada formación epistemológica sobre el conocimiento matemático a enseñar será orientado o condicionado en su proyecto por los libros de texto. Con esto queremos decir que si un libro de texto está sustentado en un modelo epistemológico de las matemáticas de corte axiomático, este será el modelo transpuesto en el aula. Si son otros los fundamentos del autor del libro de texto, estos otros serán transpuestos al trabajo en el aula.

Esto indica que la escuela proporciona su propia matemática escolar y que esconde la verdadera disciplina matemática y en particular el modo de pensar propio de la Geometría. En consecuencia, en una misma ciudad es posible visualizar la relativa arbitrariedad de la puesta en práctica del currículum de 6.º y 7.º año de EGB, con el tema *Construcción de Triángulos*.

Referencias

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma*, *26*, 11-21.

Ibarra, L. et al. (2006). Fragmentación y desarticulación entre ciclos y niveles en la Educación General Básica y el tercer ciclo de la EGB de la ciudad de Salta Capital. *Proyectos de Investigación del CIUNSa* 898 y 1171. Salta, Argentina.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Puig Adam, P. (1961). *Curso de Geometría Métrica (Tomo I. Fundamentos)*. Madrid: Nuevas Gráficas.

L’enseignement du numérique en France en classe de seconde : un problème sous-estimé par la profession

Mirène Larguier et Alain Bronner
LIRDEF, Université Montpellier 2 (IUFM), France

Abstract. We are interested in putting into use a *numeric space* in accordance with the demands of the official school curriculum in the first year of sixth form (students aged 15 and 16). We identify a problem related to the profession the symptoms of which are the difficulties teachers encounter to create concepts concerning the objects of this numeric space. We use the *numeric filter* (Bronner, 2007) to describe and analyse what may be observed in ordinary classes. Through our observations we have identified knowledge for the teacher, which is necessary for the students to acquire sound knowledge with respect to *the numeric.*

Resumen. Nos interesamos por la implementación de un *espacio numérico* conforme a las demandas del currículum oficial en el primer curso del bachillerato francés (15-16 años). Identificamos un problema de la profesión cuyos síntomas son las dificultades que encuentran los profesores para construir los conceptos relativos a los objetos de este espacio de números. Utilizamos el *filtro numérico* (Bronner, 2007) para describir y analizar lo que se puede observar en las clases normales. A través de nuestras observaciones, hemos identificado conocimientos para el profesor necesarios para que los conocimientos de los alumnos sobre lo numérico puedan ser sólidos.

Résumé. Nous nous intéressons à la mise en place d’un *espace numérique* conforme aux demandes du curriculum officiel en classe de seconde, première classe du lycée en France (15-16 ans). Nous identifions un problème de la profession dont les symptômes sont les difficultés rencontrées par les professeurs pour construire les concepts relatifs aux objets de cet espace de nombres. Nous utilisons le *filtre du numérique* (Bronner, 2007) pour décrire et analyser ce qui peut être observé dans des classes ordinaires. A travers nos observations de classes, nous avons repéré des connaissances pour le professeur nécessaires pour que les connaissances des élèves sur le numérique puissent être solides.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 383-404)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Introduction

L'observation dans les classes de seconde des pratiques de l'enseignement du numérique nous amène à identifier un *problème de la profession* selon la caractérisation donnée par Gisèle Cirade (2006) : la difficulté de mettre en place des espaces numériques, au sens d'Alain Bronner (1997, 2007), conformément aux injonctions du programme de seconde. Notre projet est de cerner ce problème et d'en connaître les conditions et les contraintes au sens d'Yves Chevallard (2009) :

> Ce qu'il faut entendre, c'est qu'il existe des contraintes (c'est-à-dire des conditions qui apparaissent *non modifiables*) et qu'on peut créer des conditions (c'est-à-dire des contraintes *modifiables*) en chacun des niveaux de la civilisation, de la société, de l'école, de la pédagogie et de la discipline. Ces conditions et contraintes de divers niveaux codéterminent *le* didactique, c'est-à-dire, en gros, ce que le professeur peut faire pour aider l'élève à étudier la discipline et ce que peut faire l'élève pour s'aider lui-même (et pour aider ses camarades d'étude et le professeur lui-même). (p. 1)

Nous désirons décrire ces conditions et contraintes pour pouvoir dans un deuxième temps mettre au jour les connaissances du professeur qui nous semblent nécessaires pour opérer des choix didactiques adéquats afin de développer les connaissances des élèves sur le numérique.

1. Cadre théorique et méthodologie

Pour étudier la question de la construction de l'espace numérique en seconde, nous utilisons essentiellement le cadre de la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) développée depuis une vingtaine d'années par Y. Chevallard (2007) et les travaux d'A. Bronner (1997, 2007) concernant le numérique et l'algébrique. Ce dernier a notamment développé un outil permettant l'étude d'un espace numérique qu'il a intitulé le *filtre du numérique* (Bronner, 2007). La fonction de ce filtre est de « traquer » le numérique, que ce soit au niveau d'une pratique ou d'une institution. Ainsi, différents éléments constitutifs d'un espace numérique peuvent être identifiés :

– les objets de base : les systèmes de nombres, l’ensemble des opérateurs (prendre la racine carrée d’un positif…) et des comparateurs ($<$, $>$, $\neq$ …) ;
– les types de pratiques (calcul exact, calcul approché, mixte) ainsi que les différents contrats institutionnels de calcul ;
– les articulations et les dynamiques du domaine numérique avec les autres domaines ainsi que les contrats sous-jacents (y compris une dynamique numérico-numérique) ;
– les raisons d’être du numérique.

Ces éléments ainsi que les organisations mathématiques (OM) du numérique constituent un espace numérique. L’observation de l’espace numérique comprend également ce qui relève de l’organisation didactique (OD) dans ce qu’elle a de spécifiquement numérique.

Notre recherche [1] s’appuie sur l’observation de classes de seconde avec une méthodologie particulière. Elle se différencie des démarches d’ingénierie habituelles en didactique des mathématiques dans la mesure où l’observation dans les classes n’est pas conditionnée par les objectifs et des comportements attendus qui auraient été précisés par une analyse a priori en fonction du projet du chercheur. L’observation dans les classes est ici première, et c’est elle qui permet la découverte et l’accès aux connaissances enseignées sans aucune interaction entre l’enseignant et le chercheur. À partir des éléments révélés au chercheur dans la dynamique de l’enseignement, est élaborée une analyse a priori en prenant en compte les acquis antérieurs des élèves, la mémoire didactique de la classe et la conformité avec les programmes. Il est alors possible de faire une comparaison entre cette analyse a priori et l’analyse a posteriori.

2. Description de la réalité des pratiques enseignantes

Le recueil des données a été réalisé à partir de deux classes de seconde dont les enseignants ne sont ni des débutants, ni des experts, et dont les élèves ont des options qui les destinent a priori vers des bacs généraux,

1. Le cadre de la recherche est la thèse de Mirène Larguier (2005), sous la direction d’Alain Bronner, intitulée « La construction de l’espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession ».

majoritairement un bac scientifique d'ailleurs. L'étude porte sur toute la durée de l'année scolaire, ce qui pose des questions particulières non abordées dans la majorité des recherches. En conséquence le grain d'analyse est très variable : de l'année à la minute ! Les deux professeurs enseignent dans un même lycée de la périphérie de Montpellier, ils ont été observés tout au long d'une année scolaire, Mathieu en 2006-2007 et Clotilde l'année suivante. Les deux classes sont qualifiées de « très bonnes » par les professeurs.

Les deux professeurs ont commencé le programme annuel par un chapitre contenant des révisions des domaines numérique et algébrique (abrégé en NA) où les notions travaillées le sont en tant qu'objets, et non pas en tant qu'outils au service de la résolution de problèmes en suivant la distinction faite par Régine Douady (1986). Ce chapitre contient également les ensembles de nombres et leur dénomination. Cette nouveauté du programme de seconde semble être la porte d'entrée la plus commune vers les mathématiques du lycée [2]. Ce début de progression est vécu comme satisfaisant par les deux professeurs pour ce temps de la reprise scolaire (de la rentrée aux vacances de Toussaint) et ils justifient ce choix a posteriori. Ainsi Mathieu lors de l'interview du 6 décembre 2006 déclare : « C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait, c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire». De même Clotilde explicite son choix dans l'interview du 6 décembre 2007 : « … je ne veux pas commencer par un chapitre trop difficile en début d'année pour pouvoir les mettre en confiance… ».

Un élément technologique, au sens de Chevallard (2002b), du geste professionnel (Bronner & Larguier, 2004) d'organisation globale de l'enseignement de l'année de seconde est le souci de parvenir à construire des apprentissages solides concernant les bases du calcul numérique et algébrique pour les élèves qui seront orientés principalement en première S mais également en première ES [3]. Les enseignants de seconde qui ont

2. Une étude des manuels en vigueur au moment de la recherche ainsi que les visites dans les classes de seconde confortent cette impression.
3. Dans le lycée général en France, à partir de la classe de première (élèves de 16-17 ans), les élèves choisissent une orientation : scientifique (S), littéraire (L) ou économique et sociale (ES).

également l'expérience de ces classes de première savent que des manques de maîtrise de techniques de base concernant le NA vont être des obstacles importants ; ils savent également qu'il existe une grande rupture entre la seconde et la première. C'est le cas pour Mathieu et Clotilde qui ont justifié le choix de leur progression par les arguments précédents lors d'entretiens menés avec eux.

Pour analyser le programme de seconde sur le numérique nous utilisons la notion de contrainte selon les différents niveaux de codétermination didactique en suivant une hiérarchie établie par Y. Chevallard (2002a). Ce sont ses termes – discipline, domaine, secteur, thème, sujet d'étude – que nous reprenons ci-dessous. Une contrainte au *niveau de la discipline* provient peut-être du découpage du programme et de l'ordre choisi pour son écriture.

Effectivement nous pouvons lire que le programme est subdivisé en trois domaines dans l'ordre suivant : *Statistique / Calculs et fonctions / Géométrie*. Le deuxième domaine « Calculs et fonctions » est subdivisé en trois secteurs qui n'apparaissent pas explicitement ainsi mais que nous repérons comme étant les suivants : *Nombres / Fonctions / Modèles et modélisation algébrique.* Le secteur qui nous intéresse plus spécifiquement dans cet article est le premier, c'est celui qui contient toutes les notions liées au numérique en classe de seconde. Il comprend six thèmes qui apparaissent dans la colonne intitulée « Contenus » et qui sont présentés en deux parties :

– la première partie contient les quatre thèmes suivants : *Nature et écriture des nombres / Notations* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ */ Représentation des nombres dans une calculatrice / Nombres premiers* ;
– la deuxième partie correspond à deux autres thèmes : *Ordre des nombres / Valeur absolue d'un nombre.*

Les professeurs peuvent alors trouver « naturel » de suivre les contenus dans l'ordre de leur écriture, ce qui est peut être l'une des raisons qui confortent l'idée de la nécessité des révisions a priori avant d'aborder véritablement le programme. Par ailleurs ce programme décline les objectifs généraux de chaque domaine. Ainsi pour le domaine « Calculs et fonctions » le premier objectif du programme est le suivant :

« *Approfondir la connaissance des différents types de nombres* ». Nous trouvons aussi dans le document d'accompagnement (Ministère de l'Éducation nationale, 2000) le commentaire suivant en ce qui concerne le secteur « Nombres » et le thème « *nature et écriture des nombres* » : « On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque-là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés » (p. 13). Ainsi la reconnaissance de la nature des nombres est un type de tâches bien identifié dans les programmes. Nous le nommerons T et nous allons analyser sa place dans le curriculum réel et suivre son histoire au cours de l'année. Plus généralement nous allons chercher à repérer les contextes dans lesquels les différents types de nombres interviennent.

3. Une tâche emblématique et des objets problématiques du numérique

Nous allons développer nos observations concernant T : « *reconnaître à quels ensembles appartiennent des nombres donnés* ». Ce type de tâches est emblématique du domaine numérique travaillé en début d'année lors de la reprise scolaire. Ainsi T peut apparaitre également emblématique de la liaison collège/lycée en permettant une reprise de connaissances anciennes tout en travaillant des connaissances complètement nouvelles (comme la désignation des ensembles).

Dans les classes de Clotilde et de Mathieu, de nombreux spécimens de T sont travaillés dans le premier chapitre. Les justifications ne sont généralement pas demandées. Ainsi dans le cahier d'exercices des élèves de Clotilde nous trouvons les affirmations suivantes sans aucune justification : « $\sqrt{18}$ irrationnel » ; ou « 1/3 rationnel ». La praxéologie construite dans la classe relativement à ce type de tâches T est incomplète. Les éléments du bloc technologico-théorique sont absents, la réponse attendue par le professeur repose sur de nombreux implicites qui ne sont certainement pas partagés par tous les élèves. Pourtant les connaissances qui pourraient faire l'objet d'une reprise d'étude des apprentissages du collège sont en particulier :

– la définition d’un nombre décimal et sa reconnaissance à partir de son écriture décimale ;
– la reconnaissance d’un nombre *idécimal* (Bronner, 1997) à partir de son écriture décimale illimitée ;
– savoir qu’un nombre rationnel écrit sous la forme fractionnaire peut être un nombre idécimal, ou bien un nombre décimal pouvant être éventuellement un nombre entier.

Des connaissances nouvelles en seconde concernent les inclusions des ensembles de nombres et de manière plus générale la reconnaissance des types de nombres et de leurs écritures « canoniques », c’est-à-dire des formes usuelles qui facilitent le travail avec les nombres (calcul, comparaison, etc.). Par ailleurs le professeur peut choisir des sujets d’étude parmi des thèmes donnés dans les programmes. Ainsi l’un d’entre eux concerne une nouvelle conception du décimal comme pouvant s’écrire sous la forme d’une fraction irréductible dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5 (d’exposant entier positif ou nul).

Le travail de reprise dans le domaine du numérique en lien avec ce type de tâches emblématique est sous-estimé par les enseignants qui semblent ne pas avoir conscience des organisations mathématiques à développer en conformité avec la demande des programmes, et surtout en conformité avec la rationalité mathématique. Mais quelles sont les raisons d’être de ce type de tâches emblématique ? Quel problème mathématique essentiel pour la discipline motive la maîtrise des praxéologies en lien avec T ? En posant ces questions, nous nous référons à Y. Chevallard qui dénonce l’enseignement des mathématiques comme étant la visite d’un musée, ou encore l’enseignement de réponses toutes faites véhiculées par la tradition, alors même que les questions à l’origine de ces réponses ont été perdues (Chevallard, 2001). Nous voyons apparaître une motivation des calculs sur les nombres afin de les exprimer sous certaines formes particulières et une légitimité de ce travail dans le domaine numérique :

> On rencontre […] un grand problème des mathématiques : comment reconnaître si deux objets mathématiques d’un certain type sont ou ne sont pas le même objet ? Comment savoir par exemple si $7 \times 5 - 8 = 23$? Ou si $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$? Ou, encore, si $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^2$?

> À ce grand problème, il existe une solution générique, universelle : pour répondre à la question posée, il suffit chaque fois de disposer d'un système d'écriture des objets du type considéré, dans lequel chacun de ces objets ait une écriture et une seule. Le calcul de l'écriture « canonique » des objets à comparer permet alors de répondre : ainsi a-t-on $7 \times 5 - 8 = 35 - 8 = 27$, ce qui montre que $7 \times 5 - 8 \neq 23$. De même, il vient d'une part $\frac{60}{84} = \frac{4\times15}{4\times21} = \frac{3\times5}{3\times7} = \frac{5}{7}$ et d'autre part $\frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{5\times19}{19\times7} = \frac{5}{7}$, en sorte qu'on peut conclure, cette fois, positivement : on a bien l'égalité $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$. (p. 529)

Ce n'est donc pas la connaissance de la nature du nombre en soi qui est importante, mais la connaissance pour un type de nombres donné de son écriture canonique. Ainsi la détermination de la nature d'un nombre peut orienter le choix de son écriture relativement à un contexte donné. Ce fonctionnement est renforcé par une règle du *contrat institutionnel de calcul* (Bronner, 2007) : le travail de démonstration en mathématiques sur le NA oblige le plus souvent à utiliser des valeurs exactes. Ces raisons expliquent alors pourquoi il est important de connaître les valeurs exactes des lignes trigonométriques de certains angles, comme $\cos\frac{\pi}{6}\,\text{rad} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et pourquoi on garde cette écriture avec un radical. Nous développerons plus loin cet exemple ; différents types de nombres apparaissant dans le cadre de la trigonométrie, une reprise du travail du début de l'année sur le numérique est alors possible.

Dans la réalité de ce que nous avons pu observer, les professeurs font rencontrer aux élèves en début d'année le type de tâches *T* sur un certain nombre de spécimens en conformité avec les programmes, sans motiver ce travail par un problème spécifique de la discipline, et sans utiliser ce travail ultérieurement pour motiver à son tour une poursuite de l'étude de la synthèse relative aux nombres. Pourtant nous allons voir qu'une reprise de *T* est possible dans la suite du programme de seconde – nous venons de citer le cas de la trigonométrie – mais les professeurs ne perçoivent pas en général ces nouvelles *niches* pour réactiver ce type de tâches et enrichir l'espace numérique.

4. La tâche emblématique et la valeur absolue

Nous allons montrer comment les différents types de nombres sont mis au service de la valeur absolue. Le programme[4] inscrit la notion de valeur absolue dans le cadre numérique en y attachant la signification de distance entre deux nombres. Cette notion est un objet mathématique inscrit dans les contenus, mais les accompagnements minimisent cette place pour réduire la notion à une notation (c’est nous qui soulignons) : « Aucune étude particulière n’est demandée. Cette *notation* sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres ». Cette conception conforte l’idée que la valeur absolue apparait davantage comme un nouvel opérateur (au sens de Bronner, 2007) de l’espace numérique. Par ailleurs le travail algébrique (résolution d’équations, d’inéquations) en lien avec la valeur absolue n’est pas un objectif du programme.

À l’occasion des observations dans les classes de Mathieu et de Clotilde, les données recueillies dans la réalisation effective des séances ont permis de caractériser les choix didactiques relatifs à l’enseignement de la valeur absolue, de décrire les organisations mathématiques choisies et de les comparer sur la durée de la séquence. Nous observons des choix communs sur les contenus abordés, mais avec des conceptions différentes sur les objets traités. Par exemple, les définitions données par les deux professeurs diffèrent. Pour Clotilde le cadre est numérique :

> La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres $p - q$ et $q - p$ qui est positif ou nul. Cette distance se note $|p - q|$ et se lit « valeur absolue de p moins q ». Conséquence : la valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance de x à zéro.

Pour Mathieu c’est l’articulation entre les cadres géométrique et numérique qui permet la définition : « Soit x un nombre réel et M le point d’abscisse x sur la droite des réels, la valeur absolue de x notée $|x|$ est la distance de O à M. » En revanche les deux professeurs choisissent de faire travailler les techniques de résolution de certaines équations et inéquations utilisant des valeurs absolues dans le cadre algébrique en ne suivant pas les prescriptions du curriculum officiel. Des praxéologies

4. Il s’agit du programme qui a été en vigueur jusqu’en 2009.

différentes ont cependant été choisies pour un même type de tâches privilégié par les professeurs et pourtant pratiquement hors programme : « résoudre une équation du style $|ax + b| = c$ ». Mathieu privilégie une technique géométrique utilisant la droite graduée quand Clotilde privilégie une technique algébrique fondée sur le signe du binôme $ax + b$. Paradoxalement, les connaissances les plus élémentaires concernant l'objet valeur absolue ne sont pas maitrisées par les élèves. Ainsi des élèves de Mathieu, interrogés le 5 février 2007 lors d'un entretien en dehors de la classe, n'ont pas su répondre à des questions concernant le concept de valeur absolue comme : « Qu'est-ce que vous diriez à un élève qui sort de troisième pour expliquer ce que veut dire la valeur absolue d'un nombre ? » Voici un passage de l'interview :

> Charly explique : « je mets le nombre, je fais plus d'un côté et moins de l'autre et ça donne le nombre ». Un exemple est demandé, Anissa prend la parole pour expliquer ce que signifie que la valeur absolue de x vaut 5 et elle fait un schéma en même temps d'une droite graduée où figurent 0, –5 et 5. Elle dit c'est 5 entre –5 et 5. Puis elle reprend et dit que x est entre –5 et 5. Il lui est demandé de prendre le nombre +1, alors elle dit que valeur absolue de x c'est 5 ou –5. À la question de savoir ce que vaut valeur absolue de 4, Maël répond : « c'est 4 ou –4 ». Anissa corrige : « c'est la distance de x à... »

Cet entretien confirme l'interprétation sur le manque de sens que les élèves donnent aux techniques employées et aux objets manipulés. Il confirme également l'impact très grand de la technique géométrique de résolution des inéquations comportant une valeur absolue, développée dans la classe de Mathieu. On note aussi la prégnance des types de tâches algébriques concernant le thème de la valeur absolue chez les élèves. Le concept lui-même ne semble pas construit, mais il évoque des situations où il apparaît, à partir d'un ostensif sonore « valeur absolue », ou à partir d'un ostensif visuel « les deux barres » – la notion d'ostensif renvoyant au travail de Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999). À la question « Qu'est-ce que c'est ? », des élèves apportent la réponse « voilà ce que nous faisons d'habitude avec ».

Nous pouvons remarquer qu'aucun des élèves interrogés n'a réussi à construire un sens convenable pour ce nouvel objet numérique. Le même constat sera réalisé en interrogeant trois élèves de Clotilde. Des techniques et des éléments technologiques présents dans les organisations mathématiques viennent envahir l’espace de compréhension des élèves. Il est possible que nous touchions là à un manque dans l’enseignement des mathématiques, voire des sciences en général, à savoir le manque de questionnement du type « Qu’est-ce que c’est ? ». Pour ces professeurs, le problème de l’enseignement serait d’apprendre aux élèves à faire des choses avec un objet mathématique, et non pas apprendre à se représenter cet objet, à le réifier. Par ailleurs nous notons un manque dans les connaissances du professeur à l’égard du savoir à enseigner ; en effet une articulation serait possible, et même nécessaire, avec l’enseignement des nombres relatifs au collège. Dès la classe de 5[e] du collège (élèves de 12-13 ans) une première rencontre implicite a lieu avec la valeur absolue pour introduire la somme des nombres relatifs, elle apparait généralement sous la dénomination de « distance à zéro » du nombre. Si cette articulation était prise en compte par les enseignants de seconde, elle participerait de la synthèse sur les nombres demandée par le programme.

Nous avons observé par ailleurs que les nombres irrationnels servent la cause de la valeur absolue dans des tâches dont un spécimen est : « Exprimer sans valeur absolue $\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{2}-3\right|$ ». Ainsi des irrationnels « de service » (Bronner, 2007) sont actualisés à l’occasion du travail sur ce thème par les deux professeurs. Mais ils apparaissent sans motivation et sans être questionnés aux yeux des élèves. La raison d’être du choix de ces nombres irrationnels est vraisemblablement de nécessiter un travail sur la définition même de la valeur absolue. En effet les élèves sont ainsi amenés à se poser la question, qui est dans ce cas non triviale, du signe des expressions numériques en jeu.

En utilisant le filtre du numérique, le travail d’analyse relatif à l’objet valeur absolue chez ces deux professeurs permet de développer quelques constats. L’espace numérique en seconde est enrichi par rapport au collège grâce à l’apparition de nouveaux éléments :

– *Des objets d’apprentissages nouveaux* par rapport au collège en conformité avec les programmes : les ensembles de nombres, les intervalles, la valeur absolue ;

– *Un nouvel opérateur* : des types de tâches, comme « trouver la valeur absolue d'un nombre donné, d'une expression numérique ou d'une expression algébrique », font fonctionner la valeur absolue comme un opérateur de manière semblable à l'opérateur racine carrée introduit en quatrième ;
– *Une dynamique numérico-algébrique* : le nouvel opérateur devient la motivation pour générer des types de tâches qui ne sont plus officiellement au programme, et qui sont « immotivés » ;
– *Des règles du contrat institutionnel* : les tâches proposées relatives à des valeurs absolues consistent à supprimer la valeur absolue.

5. La tâche emblématique et la trigonométrie

Nous avons vu comment les irrationnels sont des nombres mis au service du travail relatif à la valeur absolue. Nous allons rencontrer dans cette partie des nombres irrationnels « produits » (Bronner, 2007) dans le cadre de la trigonométrie, mais ni leur apparition ni leur nature ne sont questionnées. Dans les classes de Mathieu et de Clotilde, le chapitre sur la trigonométrie a été abordé en fin d'année, chez Mathieu à partir du 23 mai 2007 et chez Clotilde à partir du 30 avril 2008. En utilisant notre méthodologie, un travail d'analyse comparative analogue à celui concernant la valeur absolue a donc pu être mené. Pour mieux comprendre l'analyse du curriculum réel, nous présentons la place de la trigonométrie dans le curriculum officiel.

Au collège (d'après les programmes en vigueur en France jusqu'en 2006-2007 et les nouveaux programmes d'avril 2007), la trigonométrie est un secteur du domaine de la géométrie euclidienne et ne concerne que les angles aigus d'un triangle rectangle dont les mesures sont exprimées en degré. Au lycée, en seconde, à cette conception dans le cadre de la géométrie du triangle rectangle, s'en ajoute une autre dans le cadre des fonctions. En effet, dans le programme de seconde (MEN, 2002), la trigonométrie est située dans le domaine « Fonctions » et le secteur « Fonctions de référence » en présentant la seule *capacité* suivante : « *Connaître la représentation graphique de* $x \mapsto \sin x$ *et de* $x \mapsto \cos x$ ». Les commentaires en regard des capacités précisent : « La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en “enroulant” $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°. » Dans le document d’accompagnement du programme de seconde on suggère de s’appuyer sur un logiciel de géométrie dynamique pour « montrer » cet enroulement et on insiste sur le calcul exact de ces valeurs particulières :

> Pour faire le lien avec les valeurs des sinus et des cosinus de 30°, 45° et 60°, on déterminera, sur le cercle trigonométrique, la longueur des arcs interceptés par ces angles remarquables et on établira les valeurs exactes des sinus et cosinus correspondants. (MEN, 2000, p. 15)

Nous repérons dans le curriculum officiel plusieurs ruptures dans le domaine de la trigonométrie entre les conceptions construites au collège et celles de la classe de seconde. En effet ces ruptures concernent : (a) une nouvelle représentation graphique de la droite des réels qui « s’enroule » autour du cercle ; (b) les angles qui peuvent être orientés et leurs mesures qui peuvent prendre toutes les valeurs réelles, même des valeurs négatives ; (c) les objets cosinus et sinus deviennent des fonctions dans $\mathbb{R}$ et même des fonctions de référence pour lesquelles la variable ne réfère plus à un angle mais à un réel.

Pour faire comprendre l’enroulement de la droite des réels, Clotilde a choisi une activité du manuel de la classe qui utilise une comparaison avec l’enroulement du fil d’une bobine ; elle n’utilise jamais de logiciels de géométrie dynamique dans la classe, bien que presque toutes les classes du lycée soient équipées en vidéoprojecteurs. Cette mise en scène étant installée, la suite du programme peut se « dérouler » pour faire le lien avec les valeurs remarquables « des sinus et des cosinus de 30°, 45° et 60° » lorsque ces angles sont exprimés en radians. Les questions suivantes restent totalement dans l’ombre : « Pourquoi ces angles doivent être remarqués ? » ; « Pourquoi les valeurs de ces sinus et de ces cosinus sont à connaître ? » ; « Pourquoi change-t-on d’unité de mesure des angles ? » Il est vraisemblable que le professeur ne se les pose même pas : c’est au programme. Cela renvoie à la question des connaissances du professeur, posée en début d’article.

Lors de la séance du 16 mai 2008, à la fin de la séquence, Clotilde donne un tableau que les élèves doivent compléter (voir figure 1). Ce document présente une extraordinaire vitrine de nombres qui émergent dans l'espace numérique de seconde avec des entiers relatifs, des décimaux, des irrationnels formés avec les exemples typiques que sont les nombres π, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice : *On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.*

Point								**I**	**A**	**B**	**C**	**J**				
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$								1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\sin x$								0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				

a. Retrouver le point qui correspond à chaque angle.
b. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau.

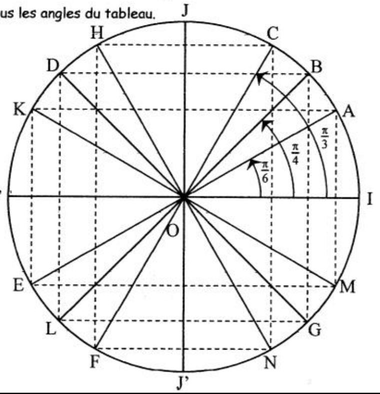


Figure 1. La vitrine des nombres

Nous avons observé qu'il n'est pas de la responsabilité de l'élève de savoir pourquoi il est nécessaire de conserver des écritures complexes de ces nombres comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par exemple. Si le professeur avait renvoyé cette question dans le *topos* des élèves (Chevallard, 2002b), il aurait alors pu réaliser une reprise du type de tâches emblématique *T* pour justifier l'écriture canonique de ces nombres ; mais la prise de conscience de la nature des nombres est absolument absente de toute cette séquence pourtant très riche au point de vue du travail possible sur le numérique. Les seules justifications données sont sous la forme de règles conventionnelles non référées à des nécessités de la discipline. Ainsi Clotilde n'accepte-t-elle pas la réponse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la transforme en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en argumentant : « Comme on a dit qu'on n'aimait pas les racines de 2 sous le trait de fraction on l'écrit comme ça. » L'année précédente Mathieu, dans le même contexte, avait précisé aux élèves : « Si je veux enlever la racine au dénominateur qu'est-ce qu'on fait ? » ; des élèves avaient répondu : « On multiplie. » ; le professeur avait alors demandé : « On multiplie par quoi ? » et les élèves avaient ajouté : « Par racine de 2. ». Auparavant, pendant la recherche des élèves, tout en circulant dans la classe pour observer leur travail, il avait annoncé : « Travaillez avec des fractions, ne travaillez pas avec des nombres à virgule ».

Ainsi les professeurs habituent les élèves à des pratiques de calcul exact qui sont régies par des règles conventionnelles décidées par le professeur alors que des raisons épistémologiques les étayent. Le *contrat institutionnel de calcul* est dans ce contexte de la trigonométrie sous l'entière responsabilité du professeur, pourtant les questions sous-jacentes pourraient être dévolues à l'élève comme faisant partie des aspects du travail mathématique.

L'espace numérique élaboré en seconde est ainsi enrichi par de nouveaux éléments qui sont des opérateurs, à savoir les opérateurs cosinus et sinus, générateurs de tableaux de nombres réels contenant de nombreux irrationnels. Ces opérateurs permettent une production de nombres de façon procédurale. L'intérêt est centré sur la façon d'obtenir les valeurs numériques, et non pas sur la nature des objets numériques produits ni sur le changement de statut du nombre dont on cherche le cosinus et qui évolue vers un statut de variable de la fonction cosinus. La question « Qu'est-ce que c'est ? » n'est pas actualisée, elle est masquée par la question « Comment on fait ? ». L'accent étant mis sur les valeurs particulières des angles, le changement de statut précédent est difficile à faire percevoir aux élèves, même de façon intuitive. La proposition des programmes est de conjuguer les cadres numérique et géométrique pour commencer à travailler le concept de fonction trigonométrique ; c'est ce que commence à mettre en place Clotilde, mais l'importance donnée aux calculs des valeurs particulières de façon statique occulte la fonction, alors même que le but visé en seconde est de dévoiler cette fonction. Dans la classe de Mathieu, le changement de point de vue sur le cosinus a été abordé grâce à la calculatrice graphique ; ainsi le passage du cadre numérique au cadre fonctionnel a été illustré par l'obtention d'une courbe, donnant un ostensif de la fonction sous-jacente et de sa continuité perceptible intuitivement.

Une dynamique numérico-géométrique est ainsi mise en œuvre par les deux professeurs. Des nombres de différentes natures sont engendrés par l'opérateur cosinus à partir du cercle trigonométrique et du triangle rectangle. Cependant une autre dynamique reste implicite : c'est une dynamique inter-numérique qui pourrait vivre grâce à la reprise du travail numérique du début de l'année en lien avec le type de tâches emblématique *T* et l'écriture canonique des nombres en fonction de leur nature. Mais il semblerait que ce type de tâches emblématique ne soit pas exportable en dehors du secteur « Nombres » du domaine « Calculs et fonctions ». Ce lieu de la trigonométrie en seconde permettrait de retravailler le numérique, puisque des irrationnels y arrivent « naturellement ». Cependant la prise de conscience de la nature et de l'écriture de ces nombres n'est pas de la responsabilité de l'élève. Pourtant il serait intéressant de poser la question de la valeur exacte de nombres comme par exemple $\cos 17$ ou $\sqrt{34}$, et de faire savoir aux élèves que l'écriture de ces valeurs exactes ne peut correspondre ni à un entier, ni à un décimal, ni à un rationnel, ce qui exclut notamment une écriture décimale affichée par une machine [5]. Ainsi en dehors du contexte d'un problème, les écritures $\cos 17$ ou $\sqrt{34}$ sont a priori les meilleurs signifiants de ces nombres. Ces exemples pourraient enrichir les prototypes habituels utilisés comme irrationnels. Il est intéressant de noter à cet égard que sur six manuels de seconde édités en 2004 et 2005, un seul – celui de la collection Hyperbole (Malaval, Courbon, Colonna, Lécole, Noailles & Tardy, 2004) – donne dans la rubrique intitulée « Le cours » un exemple d'irrationnel qui est un cosinus, à savoir $\cos 23$ (p. 12). Pourtant en faisant la synthèse des nombres rencontrés dans le grand *fourre-tout* (Bronner, 1997) du collège, ce type de nombres a été fréquenté et peut être réinvesti dans un rôle d'exemple.

Une autre dynamique reste implicite, c'est la dynamique numérico-fonctionnelle. Nous avons souligné dans les ruptures entre collège et

5. L'idécimalité de $\sqrt{34}$ peut être démontrée en seconde mais non pas celle de $\cos 17$ qui sera admise.

lycée, la conception nouvelle en seconde pour le cosinus et le sinus considérés comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Or le travail proposé aux élèves reste dans le cadre numérique avec un tableau de valeurs et un dessin statique qui focalise l’intérêt pour des angles très particuliers. Pour que les élèves prennent conscience du changement de cadre, il faudrait qu’ils résolvent des problèmes qui nécessitent ce changement de point de vue, mais ces problèmes sont absents de l’organisation mathématique. Ainsi la continuité de la fonction cosinus est assurée implicitement par le cercle trigonométrique mais il n’existe pas de tâche liée à cette dynamique. Dans le corpus des connaissances nécessaires pour le professeur, nous notons également qu’il existe une catégorie qui correspond à des problèmes qui donneraient du sens aux concepts à enseigner et qui les motiveraient.

6. Identification d’un problème de la profession

Nous avons posé dans cet article la question de la construction de l’espace numérique en classe de seconde. Le problème qui est observé dans les classes est la difficulté de sa mise en place conformément au curriculum officiel. Nous pouvons résumer les demandes institutionnelles : (a) ne pas faire de révisions systématiques ; (b) faire des reprises du NA en lien avec les autres cadres en particulier le cadre fonctionnel ; (c) travailler les notions en tant qu’outils dans des résolutions de problèmes.

Des contraintes pèsent sur les choix didactiques à différents niveaux de co-détermination didactique :

– au niveau de la discipline, l’écriture des programmes qui semble influencer les progressions suivies par les professeurs et par les auteurs des manuels ;
– au niveau de l’école, la place de la classe de seconde, comme charnière entre collège et lycée, et de plus passage obligé vers la classe de première S où les difficultés en mathématiques deviennent des handicaps pour les élèves et pour le professeur ;
– au niveau de la société, la réussite en mathématiques est très souvent la clé pour s’orienter vers des études supérieures. Ainsi la demande

sociale pèse sur les professeurs de lycée, et en particulier sur les professeurs enseignant en première S et terminale S.

En outre, les représentations des enseignants influencent leurs décisions didactiques. Elles peuvent concerner par exemple leur rapport personnel à l'activité mathématique, leur perception de l'élève de seconde, leur conception des processus d'apprentissage ou encore leur façon d'expliciter les difficultés des élèves (Larguier, 2005).

Dans les deux classes observées, l'activité proposée aux élèves se présente presque toujours sous la forme de notions travaillées en tant qu'objets et pratiquement jamais comme outils de résolution de problème (Douady, 1986). Dans le cadre numérique, les objets sont identifiés par des ostensifs, les tâches sont souvent réduites à des manipulations de ces ostensifs (« tu mets les racines de trois ensemble » ; « tu remontes tout en haut » ; « tu enlèves les petites barres » : éléments technologiques entendus chez Clotilde). Ces mathématiques sont coupées de leurs raisons d'être, des tâches sont travaillées de façon immotivée. Nous constatons également que le langage naturel est totalement absent dans les productions écrites des élèves, alors que ce registre, employé ici au sens donné par Raymond Duval (1995), est essentiel dans les processus de conceptualisation. Le travail du numérique est réduit à un travail de manipulation de signes, le raisonnement semble absent de ce domaine.

En utilisant le filtre du numérique nous avons analysé les éléments de cet espace numérique de seconde. En particulier nous avons désigné ce type de tâches *T* emblématique du numérique qui est le repérage de la nature des nombres rencontrés dans l'activité mathématique. La raison d'être de *T* pourrait être de déterminer la forme d'écriture la plus adaptée par rapport au contexte dans lequel le nombre apparait. Nous avons recherché des lieux du programme de seconde où cette tâche emblématique pouvait être reprise. C'est ainsi que la valeur absolue et la trigonométrie ont été analysées comme étant des habitats possibles.

Ces constats nous amènent à poser des questions sur les connaissances que les professeurs devraient pouvoir mettre en œuvre pour ne pas passer à côté de nouvelles rencontres concernant le numérique. Nous identifions des connaissances épistémologiques spécifiques des mathématiques enseignées, ce que Chevallard (2005) appelle épistémologie scolaire.

Nous pourrions formuler cela également en disant que ce sont des connaissances liées au processus de transposition didactique entre le savoir savant et le savoir à enseigner (Chevallard, 1991).

Notre travail a permis de débusquer des connaissances nécessaires pour l'enseignement du numérique, domaine dont on peut penser qu'il est très familier au professeur. Voici quelques exemples de telles connaissances :

– *La prise de conscience des cadres implicites travaillés à travers les différents points de vue d'une notion*. Pour les thèmes de la valeur absolue et du cosinus, nous avons montré comment le flou du professeur sur les changements de cadres ne permet pas aux élèves de dépasser les obstacles inhérents aux notions étudiées. Cette identification entraîne alors une question didactique : comment faire identifier par les élèves des changements de cadre, autrement dit à travers quels problèmes ? Les professeurs devraient connaitre des exemples de tels problèmes.

– *Les raisons d'être mathématiques de certaines exigences ou traditions*. Par exemple pourquoi s'intéresser à des valeurs particulières d'angles, pourquoi celles-là, pourquoi pas 10° ou 100° ? Pourquoi vouloir des valeurs exactes pour exprimer leurs « lignes » trigonométriques ? Pourquoi chasser les radicaux des dénominateurs ? Quels sont les problèmes qui nécessitent ces apprentissages ? Ces raisons sont souvent perdues, elles doivent être recherchées pour motiver la nécessité de certains savoirs.

– *La compréhension de l'organisation globale des programmes du collège au lycée*. Nous identifions également une difficulté du côté du professeur au niveau de la discipline : elle consiste à percevoir le programme comme un ensemble cohérent en lien avec les programmes des autres classes. La vision d'ensemble devrait permettre de mieux anticiper les reprises des connaissances antérieures pour les consolider et permettre les apprentissages sur le long terme.

– *Des connaissances sur les processus de conceptualisation des notions enseignées*. Les professeurs devraient savoir anticiper les conceptions qui vont se développer en lien avec les organisations mathématiques choisies. Nous avons vu par exemple comment le concept de valeur absolue n'est pas construit chez les élèves qui n'ont retenu que des bribes de praxéologies mises en place. Cela suppose que les professeurs connaissent également l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques qui ont été repérés dans les recherches. Un exemple concerne la valeur absolue, l'appropriation de ce concept par les élèves nécessite de dépasser au moins quatre obstacles, en suivant la théorisation de Guy Brousseau (1983) mise en œuvre par Alain Duroux (1983). Si les professeurs repèrent bien la difficulté d'apprentissage de la notion, ils n'ont en général pas pris conscience de la nature des difficultés.

Les difficultés sont perçues par les professeurs comme un problème du côté de l'élève et non pas comme signal d'un problème de la profession de professeur de mathématiques. Mais comment amener les professeurs à développer ces prises de conscience ? Un paradoxe est le suivant : les professeurs appliquent en conformité les contenus des programmes, mais ne savent pas évaluer les besoins mathématiques des élèves et en conséquence leurs propres besoins concernant leurs connaissances personnelles pour enseigner des mathématiques.

Mais comment leur faire acquérir ces connaissances produites par les recherches en didactique, sans une formation initiale et continue plus conséquentes ? Nous touchons là à des choix de société et à des choix politiques. Si la formation tout au long de la vie est affirmée comme principe, il faut constater la pauvreté de la formation continue et la brièveté de la formation en didactique dans la formation initiale actuelle. Cette contrainte pèse lourdement sur le déficit de connaissances didactiques du professeur alors même que le corpus de connaissances nécessaires au professeur pour enseigner est en train de se constituer grâce à l'implication de chercheurs dans ce domaine en pleine exploration.

Références

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en questions* (Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches non publiée). Université Montpellier 2, France.

Bronner, A. & Larguier, M. (2004, août). Analyse didactique de la séance « carte de géographie ». Dans D. Bucheton, M. Rebière & A. Jorro (Coordonnateurs), *La réflexivité des langages, instruments de travail du professeur et des élèves : points communs et spécificités disciplinaires*. Symposium proposé au 9e colloque de l'Association internationale pour la recherche en didactique du français, Québec, Canada. http://www.colloqueairdf.fse.ulaval.ca/fichier/Symposium_Bucheton/Bronner-Larguier.pdf

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 164-198.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2001). Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale. *Bulletin de l'APMEP*, *435*, 526-539.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude. Écologie & Régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Dans C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Éds), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). Paris : APMEP et Animath.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2009, mars). *Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ?* Exposé présenté au deuxième séminaire de didactique des mathématiques, Sousse, Tunisie. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Quel_avenir_pour_l_enseignements_des_mathematiques.pdf

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, France. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x, 3*, 43-67.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Larguier, M. (2005). *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde* (Mémoire de DEA). Université Montpellier 2, France.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession* (Thèse de doctorat). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00637391/fr/

Malaval, J., Courbon, D., Colonna, A., Lécole, J.-M., Noailles, J. & Tardy, C. (2004). *Mathématiques 2de*. Paris : Nathan.

Ministère de l'Éducation nationale. Direction générale de l'Enseignement scolaire. (2000). *Mathématiques. Classe de seconde. Accompagnement des programmes*. Paris : CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale. Direction générale de l'Enseignement scolaire. (2002). *Mathématiques. Classe de seconde*. Paris : CNDP.

Japanese "open lessons" as an institutional context for developing mathematics teacher knowledge

Takeshi Miyakawa
Joetsu University of Education, Japan

Carl Winsløw
University of Copenhagen, Denmark

Résumé. Nous étudions les organisations mathématiques et didactiques d'une séance de « leçon ouverte » au Japon, ainsi que le cadre institutionnel dans lequel elles sont développées.

Resumen. Se estudian las organizaciones matemáticas y didácticas relativas a una sesión de «clases abiertas» realizada en Japón, así como el marco institucional en el que estas se desarrollan.

Abstract. We study the mathematical and didactic organisations observed in an "open lesson" session carried out in Japan, as well as the institutional framework in which these organisations develop.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 405-414)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

A number of ATD-based studies have been devoted to analyse or model the components of mathematics teacher knowledge as well as the institutional conditions for its development and use (Chevallard, 2002; Durand-Guerrier et al.). The notion of didactic organisation (DO) has been proposed to describe the praxeologies which are constructed (by teachers) with the aim of having students enact a certain mathematical organisation (MO). In turn, pre- or in-service teacher training aims at improving teachers' knowledge basis for enacting DOs. It may be concerned directly with MOs and hence with at least a part of the condition for describing the tasks of DOs. It may also be directly concerned with techniques or theory of DOs. Teacher training (pre- and in-service) is thus characterised by a kind of second order didactic organisations, denoted here 2DO. The task types can in principle be described by way of the teacher knowledge to be developed and the prerequisites of the participants. However, in some settings with experienced teachers—like the one studied in this paper—the "target knowledge" may not be so precise. In fact, the main task of a 2DO may be to facilitate the knowledge exchange and *development* among teachers. The technique is how this is done, and ways to describe that may also be quite well established (as we shall see). A theory of teacher knowledge and development could contribute to the development and stability of a 2DO, and often at least "informal" theories are involved in their design and in the wider "traditions" associated with them.

This paper introduces a general technique of 2DO related to the development of experienced teachers, which is well established in Japan, *koukai-jyugyou* (open lesson), in the setting of teacher research meetings (*kenkyu-kai*). The basic idea is that teachers from other schools (up to several hundred) are invited to observe a class, taught by an expert teacher, and just after this, to participate in a discussion session with him—and sometimes other invited experts—on the details of the lesson. Note that this can be regarded as an element of lesson study (Miyakawa & Winsløw, 2009a) but developed separately and on a larger scale, with different purposes.

In many pre- and in-service teacher education activities, participants read and talk about DOs and MOs, but without any common access to any concrete DO. In short, the training activity includes direct access to an instance of what it is about (i.e., teaching). The fact that this is not "common" in the 2DO found in many parts of the world seems to be an obvious case of what Bourdieu (as cited in Chevallard, 2002, p. 11) calls *l'inconscient scolaire* ("the school unconscious"); such local practices are considered "natural" and alternatives are not even imagined.

Our aim here is not to describe the phenomenon of *koukai-jyugyou* in general; instead, we study in detail one instance of open lesson, through analyses of videos of the lesson and the discussion. We outline in particular the DO planned and realised by the expert teacher, the MO established for children and the 2DO of the whole session, through which teachers build common knowledge, particularly as regards the techniques of the observed didactic practice.

2. Context: an "open lesson" festival in Joetsu

The open lesson observed was taught on June 26, 2009, in a second-grade class (pupils' age around seven) of the elementary school attached to Joetsu University of Education, about two hundred kilometres northwest of Tokyo. This open lesson formed part of two-day *kenkyu-kai*, held annually at this school, and attended by hundreds of teachers from all over Japan. During these two days, the school showcases lessons from all school disciplines, as well as other aspects of the school's life, such as after-school musical and sports activities. It is very important to give a holistic impression of the school's life, governed by the general aim of "preparing pupils to live in human society" (an approximate translation of the school's motto). The mathematics lesson considered in this paper was observed by about 70 teachers. This lesson is part of a series of lessons whose unit title is "*sukkiri* by drawing". The meaning of this Japanese word is approximately *feeling of relief or clarity*—"I got it". Concretely, the teacher of this class aims to give students *sukkiri* by encouraging them to produce "heuristic diagrams" that clearly show the problem situation or its solution. He has practiced this unit since the beginning of the school year (in April). Pictures of some diagrams produced by pupils in previous lessons are exposed in the back of the class.

3. The lesson: mathematical and didactic praxeologies

The teacher first proposes the following "para-task" (t_1): *There were 16 customers in a Daido bus. Later, some customers got on this bus. Now as a whole, the number of customers is 34. What would be the next phrase?* After about two minutes of whole class discussion, the class agrees to consider the following task (t): *How many people got on later on?* The mathematical praxeology to be developed has as task type *T: Given the whole and a part, find the other part*. Considering this as a problem of arithmetic, we could represent it as $w = p + x$ where w and p are given whole numbers and x is to be found. This might lead to techniques such as the rewriting $x = w - p$ with a technology on "moving elements of an equation to the other side", "subtracting the same thing", etc. However, at this level and depending on the context, other ways of representing the task and its solution might appear, such as representing the whole as w dots, encircling p of them, and counting the dots not encircled to get x. And even this might be an abstraction from the concrete task that would not be immediate to students. Indeed, the teacher asks pupils—as in previous lessons—to make a "picture" (in Japanese: *e*, a free drawing) or a "diagram" (in Japanese: *zu*, clearly distinct from a free drawing, yet not indicating a precise form) that gives them *sukkiri*. After a few minutes of individual drawing, the 40 students are organised into 10 groups. Each group must produce a common diagram on a sheet of magnetic white board (each group gets one).

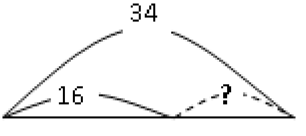


Figure 1. A line diagram

The diagrams are then exposed at the blackboard one by one in the order designated by the teacher, and a "chair" of each group explains it to the class. This procedure is a *didactic technique* for the *task* of making students discuss *t* and propose a shared technique and technology, rather than mimicking some standardised technique for *T*.

Indeed, the students produce a relatively large variety of diagrams (Figure 2). All diagrams except those of groups 4 and 5 bear some resemblance to *senbun zu* (line diagrams) in which an addition is represented as in Figure 1.

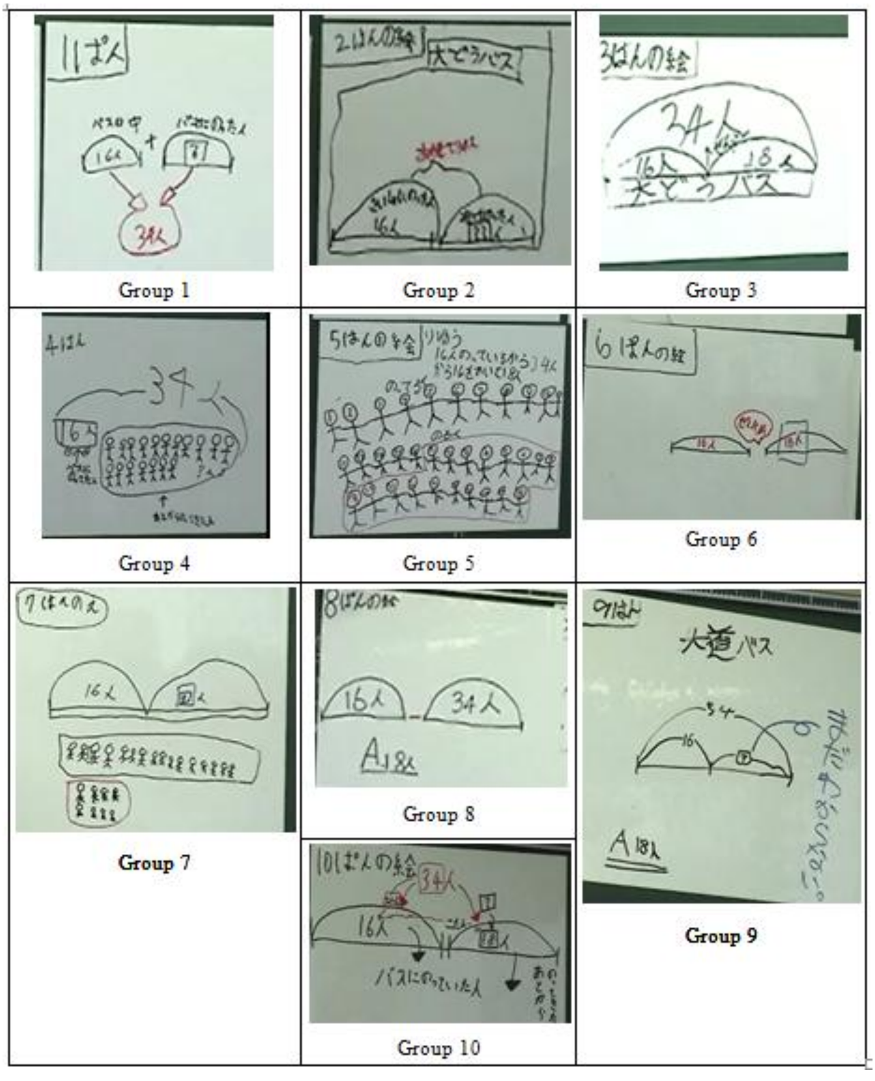


Figure 2. The diagrams produced by the 10 groups of students

Groups 4 and 5 (and to some extent 7) have produced a more "naturalistic" representation of the situation, with pictogram like "people" in two groups making up 34, and in which you can count "how many must be added to 16 to get 34". Besides these elements, several of the diagrams contain text, such as the upper part of group 1 (on the left-hand side, "people in the bus"; on the right-hand side, "people who got on"), and some contain an arithmetic operation (+ or –). The explanations of the pupils expand this sparse *technology,* e.g., referring to the diagram of group 5: *The people rounded by a red rectangle are the ones who are going to get on... hum... Then, the people who are not rounded by a red rectangle are the ones who are in the bus.*

4. Teachers' discussion

The discussion is organised in the classroom, shortly after the pupils have left. Most of the participants are seated at children's tables while others sit or stand around them. Seated at the teacher's desk, we find the teacher, a chairman—a teacher from another school in Joetsu—and a university professor. After the chairman's welcome, the teacher gives a few comments on the lesson and its goals, and then the participants are invited to pose their questions and make comments. The teacher reacts to most of them, while the chairman sometimes calls for related questions before the teacher answers. At the end, the university professor (a mathematics educator who has been collaborating with the teacher and who, in particular, observed 14 out of the 16 lessons connected to this project).

The discussion involves 10 participants, one of whom speaks more than once (posing a total of five questions). We now discuss three main points in the discussion.

The meaning of "sukkiri". Several comments and questions address the meaning of *sukkiri* in general and the way it applies to the current lesson. This term appears explicitly in the lesson, particularly in the first part, as the teacher asks students: *Now, in "Sukkiri by drawing!" I had you all drawing many pictures. You all drew many pictures. What kind of picture that makes you all sukkiri?* He picks up on some *naive* answers such as "mountains" (which refers to the particular drawing related to the line diagram: see Figures 1 and 2) and also the answer "line diagrams", given by one student, which is a goal the teacher had in mind. At the discussion session, the teachers' initial address contains the following explanation of his motivation:

> In upper grades, the textbook uses line diagram a lot, or other diagrams, to explain something. But I asked myself whether children really understand the diagram and use it as a tool for understanding. In upper grades, I usually explain how to use the diagram first. This is often forcing them to use it as a tool to solve problems with diagram. (...) So I was thinking to start teaching gradually from lower grades, and then started this course "Sukkiri by drawing!"

Prompted by a direct question on the meaning of *sukkiri* and its relation to diagrams, he says:

> *Sukkiri* is to have a picture that helps them to get an answer or to make a formula, or helps them to see what to do using a question mark, instead of a picture that just describes precisely the problem situation.

The teachers' apparent preference for using diagrams as a first approach, and as a main source of *sukkiri*, is challenged by some participants. For instance, one says that

> You said that what makes *sukkiri* for children was a picture. But I think it might be possibly words, formula, or of course a diagram or picture. I think it depends on children who have different feelings and apprehensions. This is why a new national program is stressing the relation between different representations such as words, diagram, and formula.

At this point, *sukkiri* has become part of the technology of a 2DO, integrated within the discussion of *representations* (ostensives) that appear in the MO of the classroom. The teacher admits that he did not focus enough on pupils' reasons to write numbers on their diagrams (Figure 1). In the last part of the lesson (whole class mode), he focuses on the *operations* involved. We now turn to this point.

Techniques to manage children's ideas. The meaning of subtraction and addition are important parts of the national curriculum for the second grade (Japan Society for Mathematics Education, 2000, p. 8). Several participants challenge the way in which the teacher led the discussion of both the para-task t_1 and the pupils' productions related to task t. The point is that the situation seems to imply the technique of addition to get a whole. As can be seen from the drawing of group 8, it is not easy to use the subtraction symbol within a diagram otherwise representing the problem situation; the addition (and implicit equation) in the drawings of groups 1 and 9 is more appropriate, while it does not directly show a technique. The teacher could have followed up on some of the alternative ideas to eventually obtain a shared *sukkiri* by seeing that subtraction is appropriate as a technique for *t*. Some participants observed that erroneous formulas, like 34 + 16, were eliminated in group discussions, while others remain (as for group 8). It seems to be the point of several comments that the delicate transitions between problem situation, task and technique could have been brought about more clearly, had the teacher gone along with children's ideas in different phases of their work. The discussion in the 2DO therefore proposes a technique in the DO to lead children to an expected technique (subtraction) to solve task *t* in the MO, with respect to a technology of the DO mentioned in the lesson plan and also by a participant: *through the interaction with friends, children modify and construct their thinking*.

Theory. The "theory" referred to in the 2DO includes the national curriculum but also the school's philosophy of "preparing pupils to live in human society". In the discussion, frequent references are made to these elements and how the choices realised in the DO could be justified, or not, with respect to them. The notion of *sukkiri* could be said to be an emergent or tentative element of theory too, to the extent it helps unifying the discussion of how to realise these general aims in the concrete DO. To that effect, the university professor sums up the reflections of the participants in two major aims (part of the technology of DO) which the techniques applied in the lesson might contribute to achieve for students: helping them to gain a more varied and autonomous tools to reflect about numerical relations, and more generally to reflect collectively and thoroughly about the meaning of a problem, rather than to be satisfied with learning a quick, possibly "unclear" technique to solve it:

> … when a problem is given, there would be children who quickly solve it and get *sukkiri*. Like [one of the participants] told us earlier, children may assume *sukkiri*, even with a wrong answer. When this happens, sharing it

> with other people and asking themselves what is really a problem, and discussing with them, and thinking what to do (…) is one good experience they may have. In that sense, I expect that the children grow up who can't stop to think, and the Prime Minister will be also one of them.

5. Conclusion

The "open lesson" (including the discussion and situated within a *kenkyu-kai*) constitutes an ecology (in the sense of Chevallard, 1988, para. 3.2) of teachers' knowledge (2DO) related to a more or less specific set of mathematical and didactic organisations. In fact, it includes a well-established and general 2DO-technique for developing and sharing teacher knowledge in a group of teachers, some of which are experienced and some of whom may be less experienced. In the open lesson studied here, we identify a 2DO where the most apparent task is to discuss and reflect upon a concrete DO-technique for teaching semantic aspects of addition and subtraction, and also a more general DO-technique which uses pupils' diagrams to promote shared reflection on concrete tasks. However, the 2DO task is not limited to dealing with DO-techniques, and the common reflection and discussion is certainly meant to enable the development of more theoretical forms of shared knowledge. In the session studied, we certainly see the development of more general technology or even theory of how to orchestrate pupils' use of various representations of numerical problems; and also about even more generical DO-tasks, coming from the institutional context, and about how to relate them to a concrete DO.

The point of an "open lesson" is not to showcase a "super lesson" but to constitute such an ecology of 2DO that may be realised with direct access to a DO (and, with it, to the MO it sets out to teach).

Acknowledgements

We would like to thank Mr. Masato Isono and the Attached Elementary School of Joetsu University of Education who generously provided us with materials from an open lesson. This project was partially supported by JSPS KAKENHI (21830043) (TM) and a JSPS invitation fellowship (CW).

References

Chevallard, Y. (1988). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 97-106). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Durand-Guerrier, V., Winsløw, C. & Yoshida, H. *A model of mathematics teacher knowledge and a comparative study in Denmark, France and Japan*. Manuscript submitted for publication.

Japan Society for Mathematics Education (2000). *Mathematics Program in Japan. Elementary, Lower Secondary and Upper Secondary Schools*. Tokyo: JSME.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009a). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Éducation & didactique, 3*(1), 77-90.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009b). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218.

L'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles à l'entrée de l'université

Ridha Najar
LDAR Université Paris 7, Université Lyon 1 (IUFM), France

Abstract. At university level, set theory functional notions are characterized by specific conceptual and semiotic properties. These properties are not familiar to students who in high school have been used to manipulate these notions (in calculus or in the study of geometrical transformations) in tasks where the set theoretical perspective remains invisible and not operational. In this article, we study the effect of such a transition in the teaching of set theory functional notions on the possibility first year university students have of using these notions in problem solving.

Resumen. En la universidad, las nociones conjuntistas funcionales se caracterizan por propiedades conceptuales y semióticas específicas. Estas no son familiares a los estudiantes, acostumbrados en el Bachillerato a manejar estas nociones (en análisis o en el estudio de transformaciones geométricas) en tareas donde la dimensión conjuntista queda invisible y no operatoria. En este artículo, estudiamos el efecto de esta transición en la enseñanza de las nociones conjuntistas funcionales sobre las posibilidades de los estudiantes que entran en la universidad para utilizar estas nociones en la resolución de problemas.

Résumé. À l'université, les notions ensemblistes fonctionnelles se caractérisent par des propriétés conceptuelles et sémiotiques spécifiques non familières aux étudiants, habitués au secondaire à manipuler ces notions (dans le cadre de l'analyse et des transformations géométriques) dans des tâches où l'aspect ensembliste reste invisible et inopérant. Dans cet article, nous essayons de voir l'effet de cette transition dans l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles sur les possibilités des étudiants entrant à l'université à mettre en œuvre ces notions dans la résolution de problèmes.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 415-430)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

Dans l'enseignement secondaire tunisien, les notions et le langage ensemblistes, qui ont vu leur apparition avec la réforme des « mathématiques modernes », n'ont pas complètement disparu lors des réformes ultérieures, comme ce fut le cas pour les structures algébriques et l'algèbre linéaire. L'institution secondaire a choisi de garder l'usage de ces notions tout en modifiant leur écologie. Elle recommande ainsi d'introduire lesdites notions dans différents thèmes d'étude au fur et à mesure des besoins d'enseignement, mais de ne pas les considérer comme des objectifs d'apprentissage et d'éviter tout exposé général les concernant. À l'entrée de l'université, les enseignants du supérieur, considérant que les concepts de base de la théorie des ensembles ont été suffisamment manipulés dans le secondaire pour être devenus familiers, passent souvent rapidement sur l'enseignement de ces notions et ne font pas du symbolisme associé un enjeu explicite d'enseignement. Cela conduit les étudiants à développer des mécanismes de travail peu réfléchis dans ce domaine et constitue une source d'obstacles souvent difficiles à surmonter. Ce constat n'est pas spécifique au système d'enseignement tunisien, comme le montrent plusieurs travaux concernant l'enseignement supérieur[1]. Nous considérerons à titre d'exemple les recherches menées dans différentes universités françaises au sujet de l'algèbre linéaire, dont on trouvera une synthèse dans l'ouvrage coordonné par Jean-Luc Dorier (1997). Selon les auteurs, les difficultés des étudiants dans ce domaine « sont […] révélatrices d'un même obstacle, massif, qui apparaît pour toutes les générations successives, et pratiquement pour tous les modes d'enseignement » (p. 105). Ils désignent ces difficultés par *l'obstacle du formalisme*. Les expérimentations menées dans le cadre de ces recherches ont montré à quel point le manque de maîtrise du langage ensembliste et les déficiences en logique élémentaire conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes les connaissances d'algèbre linéaire apprises.

1. On pourra consulter par exemple Frédéric Praslon (2000) et Isabelle Bloch (2000) en France, Marianna Bosch, Cecilio Fonseca & Josep Gascón (2004) en Espagne et Claudia Corriveau (2007) au Canada.

Notre travail dans cet article rejoint ces préoccupations. Il vise, à travers l’analyse de réponses d’étudiants à deux exercices, à montrer les effets des choix institutionnels concernant l’enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition secondaire/supérieur sur les possibilités de résolution de problèmes chez des étudiants entrant à l’université. Le public concerné par l’expérimentation est constitué d’étudiants tunisiens poursuivant leurs études en première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1 dans la suite). Notons que les étudiants admis dans ces classes sont choisis parmi les meilleurs bacheliers de la section *Mathématiques* et les mathématiques constituent la matière de base (étudiée à raison de 12 heures par semaine) dans les programmes d’étude de ces classes.

2. Contexte de l’expérimentation

L’expérimentation s’est déroulée vers la fin du deuxième trimestre de l’année universitaire. Dans la période précédant l’expérimentation, les étudiants ont étudié toute la partie du programme relative aux notions ensemblistes, aux structures algébriques, aux espaces vectoriels et applications linéaires. De ce fait, nous considérons qu’au moment de l’expérimentation, les étudiants sont assez familiarisés avec les notions intervenant dans les exercices proposés. Ces exercices sont travaillés dans deux séances séparées. Dans chaque séance, les étudiants sont répartis en trois groupes selon leur choix, les membres de chaque groupe étant appelés à fournir à la fin de la séance une production commune montrant leur travail. Ces productions ne constituent pas une rédaction finale de la solution ; elles représentent plutôt des brouillons où l’on peut voir les réflexions, les tentatives (réussies ou non) et les démarches entreprises à propos de la résolution de l’exercice. Elles sont utilisées par la suite pour analyser les raisonnements produits.

3. Description et analyse de l’expérimentation

3.1. Première séance

3.1.1. Énoncé de l’exercice

Soient E et F des **K**-espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F. On rappelle que le graphe de f est l’ensemble

$$G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel (sev) de E × F isomorphe à E.

3.1.2. Analyse a priori

La question de l'exercice comporte deux tâches : l'une consiste à « montrer que G est un sous-espace vectoriel de E × F » (tâche 1) ; l'autre à « montrer que G est isomorphe à E » (tâche 2). Deux stratégies sont possibles pour résoudre l'exercice.

La première stratégie permet de réaliser les deux tâches en même temps. Elle consiste à construire un morphisme bijectif permettant de transporter la structure d'espace vectoriel de E à G, ce qui montrera que G est un sev de E × F et, en même temps, qu'il est isomorphe à E. On peut considérer par exemple l'application φ de E dans G (ou dans E × F) définie par : $\varphi(x) = (x, f(x))$, ou encore la projection p de E × F sur E (dont la restriction à G définit un isomorphisme de G sur E).

Par exemple, avec l'application φ, on montre que φ est linéaire et bijective. Le théorème sur le transfert de la structure d'espace vectoriel permet de conclure que G est un espace vectoriel (donc un sev de E × F) isomorphe à E.

La deuxième stratégie traite les tâches 1 et 2 de façon séparée. Pour la première tâche, on obtient que G est un sev de E × F en montrant que G vérifie les axiomes d'un sev. Pour la deuxième tâche, on construit une application de G dans E (ou de E dans G) et on montre qu'elle définit un isomorphisme entre G et E. Pour cette deuxième tâche, le sujet pourrait utiliser l'une des applications indiquée dans la première stratégie.

Remarquons que la formulation de la question : « Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E × F isomorphe à E », pourrait suggérer à certains étudiants d'adopter la deuxième stratégie.

Terminons par un commentaire sur ces deux stratégies. D'un point de vue heuristique, la première stratégie est plus économique que la deuxième. Elle requiert une appropriation globale de la question et une bonne disponibilité du théorème sur le transfert des structures par les morphismes. La deuxième stratégie est plutôt démonstrative, notamment dans la première question qui utilise la définition d'un sev. Pour cette stratégie, l'articulation (possible) entre les deux tâches n'est pas mise en évidence. D'un autre côté, pour les deux stratégies, la difficulté d'obtenir l’isomorphie entre G et E dépend et du choix de l’application et de l’usage des notions ensemblistes et d’algèbre linéaire qui seront mises en jeu.

Notons que le théorème sur le transfert des structures est étudié et travaillé au premier trimestre de l’année universitaire dans le chapitre sur les groupes et qu’il est revu lors de l’étude des autres structures algébriques.

3.1.3. Résultats pour la première séance

Notons d’abord qu’aucun des trois groupes d’étudiants n’a adopté la première stratégie pour répondre à la question. Si nous admettons que les étudiants ont agi, de façon naturelle, selon l’ordre des tâches prescrites dans la consigne (qui pouvait suggérer de traiter chacune des deux parties de la question de façon séparée), il n’en est pas moins vrai que cette stratégie, en demandant une appropriation globale des données de l’exercice et une bonne disponibilité des connaissances, semble encore être difficile à adopter par les étudiants.

Cela dit, l’analyse des productions des trois groupes montre que les notions mathématiques sous-jacentes à la résolution de l’exercice (sous-espace vectoriel, application linéaire, injection, surjection, espaces vectoriels isomorphes) semblent être bien connues par les étudiants, et les pas de raisonnement traduisant les stratégies adoptées sont assez organisés. Toutefois, les étudiants des deux premiers groupes ont buté sur la question de l’isomorphisme entre G et E. Les difficultés rencontrées découlent essentiellement d’une manipulation inappropriée des objets ostensifs mis en jeu. Examinons par exemple un extrait de la production du groupe 1 (voir figure 1). Dans cette production, nous remarquons que pour montrer que G et E sont isomorphes, les étudiants ne caractérisent pas dans la définition de h l’élément y. S’ils montrent correctement que h est injective, ils n’arrivent pas à associer un antécédent à un élément (x, y) de G pour montrer la surjectivité. Il semble que l’ostensif y choisi, véhiculant l’idée d’une valeur arbitraire et donc impuissant à exprimer sémiotiquement la relation $y=f(x)$, a constitué pour eux un obstacle. Le même problème s’est posé lorsque les étudiants ont voulu vérifier la linéarité de h.

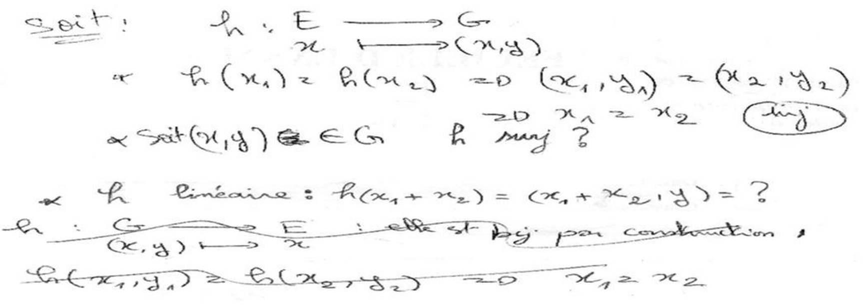

Soit : $h : E \longrightarrow G$
$x \longmapsto (x,y)$
* $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ (inj)
* Soit $(x,y) \in G$ h surj ?
* h linéaire : $h(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, y) = ?$
$h : G \longrightarrow E$, $(x,y) \longmapsto x$: elle est bij. par construction,
$h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Figure 1. Production 1 du groupe 1

Les étudiants du deuxième groupe ont défini l’application g de E dans G, qui à x associe le couple $(x, f(x))$, et ont montré convenablement que g est linéaire et injective (voir figure 2).

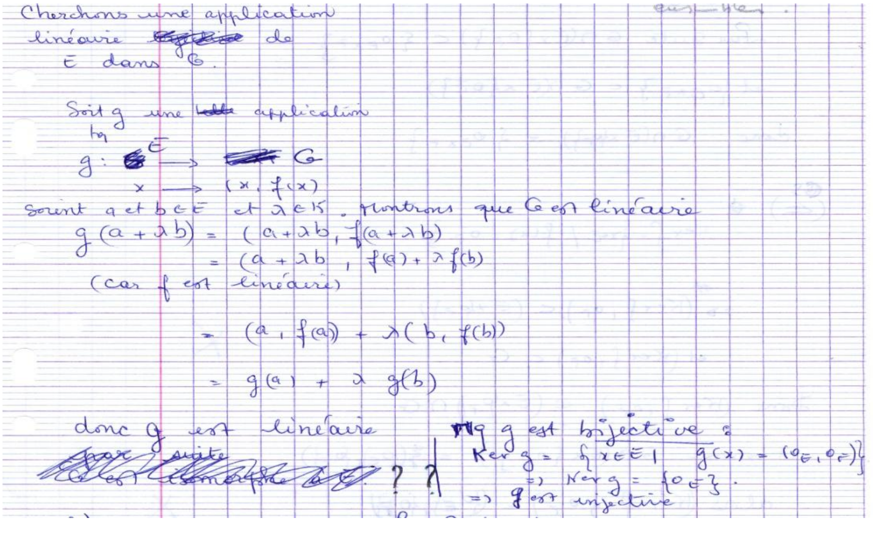

Cherchons une application linéaire de E dans G.
Soit g une application tq
$g : E \longrightarrow G$
$x \longmapsto (x, f(x))$
Soient a et $b \in E$ et $\lambda \in K$. Montrons que G est linéaire
$g(a + \lambda b) = (a + \lambda b, f(a + \lambda b))$
$= (a + \lambda b, f(a) + \lambda f(b))$
(car f est linéaire)
$= (a, f(a)) + \lambda (b, f(b))$
$= g(a) + \lambda g(b)$
donc g est linéaire
Mq g est bijective :
$\mathrm{Ker}\, g = \{x \in E \mid g(x) = (0_E, 0_F)\}$
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, g = \{0_E\}$.
$\Rightarrow g$ est injective

Figure 2. Production 1 du groupe 2

Dans cette production nous ne rencontrons aucune trace concernant l’étude de la surjectivité de l’application g. En demandant aux étudiants du groupe concerné la raison qui les a empêché de montrer que g est surjective, ils ont répondu qu’ils ont voulu pour cela montrer que $g(E) = G$. Pour obtenir l’inclusion $G \subset g(E)$, l’écriture $G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ les a entraînés dans l’erreur de noter un élément de G par (x, y) au lieu de $(x, f(x))$, ce qui les a perturbés lors de la recherche de l'antécédent de (x, y).

Concernant la réponse du troisième groupe, les deux parties de la question sont traitées de façon séparée (voir figure 3). Nous remarquons que le travail de ce groupe est bien organisé, les calculs bien rédigés et les justifications conformes. Le détail de la production de ce groupe nous montre la finesse des raisonnements et du jeu entre ostensifs et non-ostensifs nécessaire à la résolution de cet exercice, et l'on conçoit mieux comment des étudiants (ceux des groupes 1 et 2) qui apparemment connaissent bien leur cours et savent exprimer à la fois les données du problème et ce qu'ils veulent démontrer peuvent échouer à cause d'un choix inapproprié des moyens ostensifs mis en jeu.


1) Mq que G est sev de E×F isomorphe à E
G ≠ ∅ car $f(0_E) = 0_F \Rightarrow (0_E, 0_F) \in G$
soit $(x_1, y_1) \in, (x_2, y_2) \in G^2$ et $\lambda \in K$
mq que $\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in G$
En effet
$\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$
or $(x_1, y_1) \in G \Rightarrow y_1 = f(x_1)$
de même $y_2 = f(x_2)$
d'où $f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2)$ car f morphisme
$= \lambda y_1 + y_2$
d'où $(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \in G$
Par suite G est un K-sev de E×F
montrons que G isomorphe à E
soit $\varphi : G \longrightarrow E$
$(x, y) \longmapsto x$
$\varphi(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \varphi((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)) = \lambda x_1 + x_2$
$= \lambda \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2)$
d'où φ est un morphisme (1)
$\operatorname{Ker} \varphi = \{(x, y) \in G \,/\, \varphi(x, y) = 0_E\}$
$\varphi(x, y) = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ d'où $\operatorname{Ker} \varphi = \{(0_E, f(0_E))\}$
d'où φ est injective
soit $x \in E$ on a $\varphi(x, f(x)) = x$ d'où φ surjective
par suite φ est bijective (2)
(1) et (2) donnent φ est un isomorphisme de G vers E
d'où G est isomorphe à E

Figure 3. Production 1 du groupe 3

3.2. Deuxième séance

3.2.1. Énoncé de l'exercice

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 2$). H désigne un hyperplan de E (c'est à dire un sous-espace de E de dimension $n-1$). Montrer qu'il existe une forme linéaire f non nulle sur E telle que H soit le noyau de f.

3.2.2. Analyse a priori

Nous donnons ci-dessous deux stratégies qui peuvent être adoptées pour résoudre l'exercice.

La première stratégie consiste à définir f par la donnée de l'image d'une base de E. On choisit une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de E. On pose $f(e_i) = 0_{\mathbf{K}}$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $f(e_n) = k$, où k est un scalaire *non nul*. L'application f ainsi définie répond à la question.

La deuxième stratégie consiste à définir f par la donnée de l'expression de $f(x)$ pour tout x dans E. On considère une somme directe de E, $E = H \oplus H'$, où H' est un sev de E de dimension 1 engendré par un vecteur a. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \lambda \cdot a$, où $x_1 \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En utilisant les conditions « f est linéaire » et « H est inclus dans $\mathrm{Ker} f$ », on obtient : $\forall x \in E, f(x) = f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$. L'inclusion $\mathrm{Ker} f \subset H$ (ou encore la condition f non nulle) entraîne que $f(a) \neq 0_{\mathbf{K}}$. En posant $f(a) = k$, avec k un scalaire non nul, on obtient $f(x) = \lambda \cdot k$ pour tout $x = x_1 + \lambda \cdot a$ dans E. L'application f ainsi définie répond à la question.

Terminons par un commentaire. L'exercice est ici du type constructif : pour prouver l'existence de f, il faut la définir explicitement. Pour ce faire, les étudiants doivent bien comprendre le rôle joué par les contraintes de f et doivent pouvoir les reformuler de façon opératoire pour arriver à les exploiter convenablement. Un choix arbitraire d'une base de E, ou encore une décomposition non appropriée de x pourrait constituer un obstacle pour la construction de f.

3.2.3. Résultats pour la deuxième séance

Pour résoudre le problème d'existence de f, les étudiants des trois groupes ont essayé de définir f explicitement. Les démarches de raisonnement entreprises présentent une certaine organisation et les connaissances utilisées sont correctes dans leur ensemble, bien que nous rencontrions parfois un certain implicite, ou encore des glissements dans la formulation de certains résultats (comme l'écriture « $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$ » qui se rapproche sémiotiquement du théorème du rang « $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$ »). Cela est généralement fréquent chez les étudiants au début de leurs études supérieures. La difficulté essentielle à laquelle les étudiants des trois groupes se sont heurtés dans cet exercice est la détermination des images des vecteurs de E qui ne sont pas dans H. Tout particulièrement, les étudiants ne sont pas arrivés à mettre en évidence une reformulation convenable de l'hypothèse $\dim \mathrm{G} = 1$, pour rendre la décomposition de E en somme directe ($\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{G}$) opérationnelle et permettre en conséquence la détermination des images des vecteurs de G. Examinons maintenant des extraits des productions de chacun des trois groupes.

Pour le groupe 1 (voir figure 4), la décomposition de E en somme directe n'a pas été exploitée et les étudiants ont traité f d'un point de vue ensembliste, en distinguant les éléments de H et ceux de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$. La notation « y » attribuée aux images des éléments de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$ porte implicitement le fait que cette image est non nulle, mais elle ne permet pas de relier « x » à son image ; « y » apparaît ainsi comme la notation d'un objet libre dans $\mathbf{K}$.

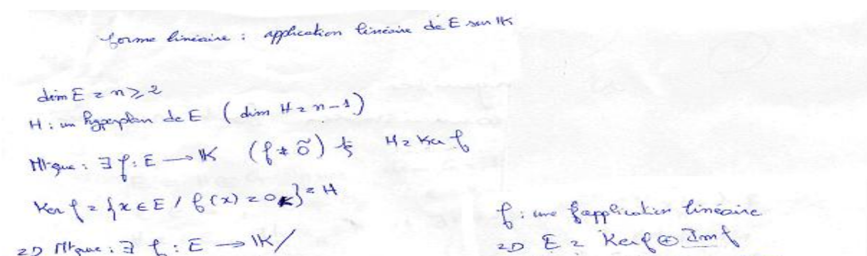


Figure 4. Production 2 du groupe 1

Il faut dépasser ce stade pour avancer dans la résolution et, visiblement, les étudiants n’y parviennent pas. Il y a des mises en relation qui ne s’effectuent pas du fait de contraintes non prises en considération. Cela a bloqué l’avancée du travail.

Pour le groupe 2 (voir figure 5), bien que les reformulations adoptées soient pertinentes eu égard à l’objectif de l’exercice, les étudiants ne sont pas arrivés à rendre l’hypothèse « $\dim G = 1$ » opérationnelle pour déterminer les images des x_G.

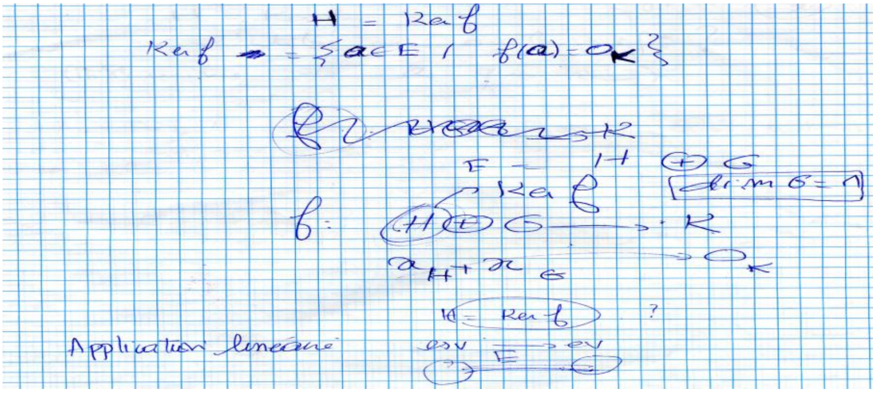


Figure 5. Production 2 du groupe 2

L’expression additive d’un x de E ($x = x_H + x_G$) laisse invisible le fait que x_G est dans un espace de dimension 1, et de ce fait la décomposition de E en somme directe reste impuissante à permettre l’expression de la contrainte relative à l’image de x_G. La combinaison, dans une forme unique, entre les expressions de la somme directe et de la dimension 1 n’étant pas produite, les étudiants se sont trouvés dans une impasse.

Passons maintenant au groupe 3. Les démarches entreprises par l’étudiant de ce groupe (voir figure 6) sont bien organisées, les connaissances sont convenablement utilisées et les résultats obtenus sont correctement justifiés. La rédaction est aussi conforme.

Toutefois, nous notons que la base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H n’a pas permis d’avancer dans le travail ; c’est plutôt l’expression des vecteurs x_{H_1} en fonction d’un vecteur générateur de H_1 qui manque pour obtenir une définition complète de f. Il y a là un « état » qui manque dans la stratégie adoptée par l’étudiant. Celui-ci se retrouve à la fin dans la même situation que les étudiants des deux premiers groupes.

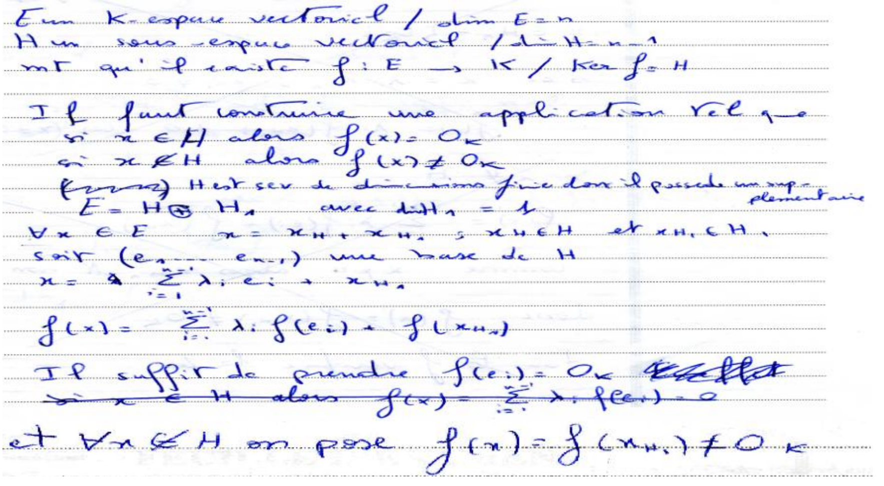

E un K-espace vectoriel / dim E = n
H un sous-espace vectoriel / dim H = n-1
mq qu'il existe $f : E \to K$ / Ker $f = H$
Il faut construire une application tel que
si $x \in H$ alors $f(x) = 0_K$
si $x \notin H$ alors $f(x) \neq 0_K$
H est sev de dimension finie donc il possède un supplémentaire
$E = H \oplus H_1$ avec dim $H_1 = 1$
$\forall x \in E$ $x = x_H + x_{H_1}$; $x_H \in H$ et $x_{H_1} \in H_1$
soit $(e_1 \ldots e_{n-1})$ une base de H
$x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i + x_{H_1}$
$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(e_i) + f(x_{H_1})$
Il suffit de prendre $f(e_i) = 0_K$
~~si $x \in H$ alors $f(x) = \sum \lambda_i f(e_i) = 0$~~
et $\forall x \notin H$ on pose $f(x) = f(x_{H_1}) \neq 0_K$

Figure 6. Production 2 du groupe 3

En conclusion, pour cet exercice, le choix des objets ostensifs dans la définition de *f*, le traitement des formulations symboliques et la nécessité d’articuler les dimensions sémiotique et conceptuelle dans la décomposition de *E* en une somme directe ont constitué des obstacles pour les étudiants des trois groupes pour adopter des méthodes de travail appropriées permettant de surmonter les difficultés rencontrées.

4. Interprétation et conclusion

Dans leur travail, les étudiants ont fait preuve d’aptitudes à fixer des stratégies de travail, à mobiliser des connaissances mathématiques, conformes dans leur ensemble, et à les mettre en œuvre dans l’exploration des espaces de résolution des exercices proposés. Néanmoins, dans les productions analysées, les étudiants ne sont pas parvenus à terminer la résolution des exercices. Les erreurs constatées sont surtout dues à des difficultés dans le choix de reformulations appropriées et opérationnelles des données des exercices et dans la possibilité d’articuler les dimensions sémiotique et conceptuelle dans le choix des moyens ostensifs à mettre en œuvre dans la construction des fonctions requises. À notre avis, ces difficultés, liées à la pratique de résolution de problèmes plutôt qu’à l'appropriation d'éléments du savoir enseigné, résultent des choix des institutions ES et CPS1 concernant l'enseignement des notions et langage ensemblistes et aux difficultés des étudiants à dépasser les différences et changements brusques intervenant dans l'enseignement de ces notions dans la transition ES/CPS1.

En effet, en nous situant dans l'approche anthropologique du didactique, à propos de laquelle on pourra consulter Yves Chevallard (1999), et en nous basant sur les documents d'enseignement officiels (programmes, manuels officiels et sujets de baccalauréat pour ES et programmes et fiches de travaux dirigés pour CPS1), l'étude des rapports institutionnels aux notions et langage ensemblistes, et particulièrement celles qui se rapportent aux notions d'application et de fonction, nous a permis de constater une rupture entre les environnements praxéologiques relatifs à ces objets mis en place dans les institutions ES et CPS1 (Najar, 2010). Dans ce qui suit, nous explicitons la façon dont cette rupture se manifeste essentiellement, tout d'abord dans l'enseignement secondaire, ensuite en première année des classes préparatoires scientifiques.

Dans l'enseignement secondaire, malgré la présence des notions ensemblistes fonctionnelles (composition d'applications, image d'un ensemble par une application, bijection et bijection réciproque, etc.) dans divers thèmes d'étude, notamment dans l'étude des transformations géométriques et des fonctions numériques d'une variable réelle, ces notions ne sont pas considérées par l'institution comme un objectif d'étude et aucun thème spécifique n'est consacré à leur enseignement. Cette situation a conduit les auteurs des manuels officiels à introduire lesdites notions au gré des besoins, chaque fois que le contexte d'étude l'exige. Cela a entraîné un manque dans l'institutionnalisation des notions utilisées et une absence de structuration dans leur présentation. D'un autre côté, dans les exercices où interviennent ces notions, on s'efforce de mettre à la disposition des élèves des techniques de travail qu'il serait possible d'utiliser sans faire appel aux notions ensemblistes sous-jacentes ou au discours technologique associé. Par exemple, pour les tâches de composition et de décomposition des transformations géométriques, les techniques associées sont étroitement liées aux objets ostensifs utilisés dans la désignation de ces transformations. La réalisation de ces techniques dépend des conditions géométriques de la situation et utilise le formulaire mis à la disposition des élèves, relatif aux différents cas de composition et de décomposition de ces transformations, comme par exemple : (a) $t_{\vec{u}'} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{u}'}$ (composition de deux translations) ; (b) $s_{(\mathrm{OB})} \circ s_{(\mathrm{OA})} = r_{\mathrm{O},\, 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})}$ (composition de deux symétries orthogonales d’axes sécants) ; (c) $S(\mathrm{O}, k, \theta) = h(\mathrm{O}, k) \circ r(\mathrm{O}, \theta)$ (décomposition d’une similitude directe en une homothétie et une rotation).

Pour la recherche de l’image par une transformation géométrique d’une partie du plan (une figure géométrique la plupart du temps), les techniques utilisées se réfèrent généralement à l’aspect synthétique global de la figure géométrique considérée (et non à sa nature ensembliste comme ensemble de points) et on s’intéresse à l’effet cinématique de la transformation considérée (translation, rotation, etc.) plutôt qu’à son aspect fonctionnel. Concernant le problème de la bijectivité d’une application, posé exclusivement dans les exercices d’analyse, son étude est limitée aux fonctions continues et strictement monotones. Montrer qu’une fonction est bijective d’un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathrm{I})$ revient alors à étudier ses propriétés analytiques sur I (continuité et sens de variation via la fonction dérivée). Cette façon de procéder a limité la mise en œuvre des notions ensemblistes fonctionnelles dans les exercices à des tâches rigides (voir M. Bosch, C. Fonseca & J. Gascón, 2004) et répertoriées, où l’aspect ensembliste des notions reste invisible et inopérant, et dont les praxéologies mathématiques associées sont dans leur majorité ponctuelles.

En CPS1, en revanche, les notions ensemblistes sont présentées dès le départ de façon structurée et en toute généralité. L’environnement praxéologique relatif au travail de ces notions est essentiellement constitué par des praxéologies mathématiques locales ou régionales dont les composants technologiques sont souvent sollicités dans la mise en œuvre de ces praxéologies dans les exercices. Le fonctionnement des connaissances dans le *topos* des étudiants se trouve par conséquent très proche de ce qu’il est dans les développements théoriques du cours. Nous remarquons en même temps une négligence quant au fonctionnement des connaissances enseignées au niveau technique, comme l’a montré Aline

Robert (1998), ce qui rend difficile le retour sur les praxéologies mathématiques ponctuelles étudiées dans ES et la mise en évidence du lien entre ces praxéologies et les praxéologies locales étudiées dans CPS1. Cela crée une rupture et un dysfonctionnement dans les organisations praxéologiques au niveau de la transition ES/CPS1 et conduit naturellement à des difficultés d'apprentissage pour les étudiants dans l'institution CPS1. Cette rupture semble être difficile à dépasser par les étudiants entrant à l'université.

Par ailleurs, l'usage du langage ensembliste et, plus généralement, du symbolisme mathématique dans le supérieur est généralement considéré par les enseignants comme naturel et il est supposé que son usage répété en entraînera la maîtrise. Or, pour Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999), il faut se méfier de cette *naturalisation* des ostensifs. Ils soulignent ainsi que

> la méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle – c'est à dire non construite – explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de *stratégies didactiques d'ostension*. On désigne par ce terme les pratiques d'enseignement où le professeur se limite à *montrer* aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer. (p. 92)

Cela soulève le problème des nécessités d'apprentissage liées à la pratique des mathématiques, que les apprenants ne semblent pas pouvoir acquérir par des efforts personnels et pour lesquelles des actions didactiques semblent être nécessaires. Dans l'objectif de décrire ces besoins d'apprentissage qui sont sous-estimés, voire ignorés par l'institution, et de prouver leur nécessité pour la réussite des apprenants, Corine Castela (2008) distingue au niveau de la technologie de toute praxéologie mathématique ponctuelle intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique d'une technologie assure la validité de la technique utilisée, quant à la composante pratique, elle correspond à « ce que certains mathématiciens anglais considèrent comme *a mathematical folklore* […], c'est à dire certains savoirs très ancrés dans l'expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre, de piloter la technique » (Castela, 2007,

p. 180). Pour C. Castela, ces connaissances d’ordre pratique sont dotées d’une légitimité mathématique (par référence à l’activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l’institution éducative (vu que leur nécessité se manifeste dans les tâches d’évaluation et c’est leur absence qui est institutionnellement évoquée comme facteur d’échec), mais l’institution reste muette à leur propos, et n’organise aucun système didactique visant explicitement à permettre leur apprentissage.

Notre recherche montre que les effets de la gestion institutionnelle concernant l’enseignement des notions et langage ensemblistes dans la transition secondaire/supérieur n’épargnent pas de bons sujets institutionnels que sont les étudiants des classes préparatoires et confirme l’importance déjà soulignée par les auteurs susmentionnés du travail à mener sur les ostensifs et sur la composante pratique du discours technologique notamment au début de l’enseignement supérieur, où la plupart des étudiants se trouvent en quelque sorte désorientés par l’ampleur des changements qui se produisent par rapport au secondaire, aussi bien sur le plan des contenus que sur celui des méthodes et pratiques d’enseignement et d’apprentissage.

Références

Bloch, I. (2000). *L’enseignement de l’analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation* (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux, France. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/fr/

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Castela, C. (2007). Les ressources autodidactes en mathématiques de très bons élèves de classes scientifiques. Dans M.-C. Penloup (Éd.), *Les connaissances ignorées. Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves* (pp. 173-202). Paris : INRP.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand, France : IREM.

Corriveau, C. (2007). *Arrimage secondaire-collégial : démonstration et formalisme* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Canada.

Dorier, J.-L. (Éd.). (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition secondaire/supérieur* (Thèse de doctorat en cotutelle). Université Paris 7 et Université Virtuelle de Tunis. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00564191/fr/

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/Deug sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement* (Thèse de doctorat non publiée). Université Paris 7.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros

Luisa Ruiz Higueras y Francisco Javier García
Dpto. Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, España

Abstract. This paper addresses the problem of the initial training of prospective primary school teachers. Our aim is to describe and analyse the mathematical and didactic praxeologies in a study process where a dynamic system is modelled. We will focus on the characterization of teacher's didactic praxis and didactic logos, in order to draw conclusions for the development of new teacher training initiatives. We will study how the "milieu-media" dialectic can be reinterpreted for the construction of meaningful mathematical and didactic knowledge in the teacher training process. Likewise, we will verify the pertinence and richness of establishing networks between the Theory of Didactic Situations and the Anthropological Theory of the Didactic.

Résumé. Ce travail se situe dans le domaine de la formation des professeurs et a pour objectif de décrire et analyser les praxéologies mathématico-didactiques lors d'un processus d'étude où sont abordées des tâches de modélisation d'un système dynamique. Nous mettrons spécialement l'accent sur l'analyse de la *praxis* et du *logos* didactique du professeur, afin de dégager des conclusions permettant l'élaboration de nouveaux dispositifs pour la formation des professeurs. En particulier, nous étudierons comment la dialectique des médias et des milieux peut être réinterprétée pour la construction de connaissances mathématiques et didactiques significatives dans le processus de formation des enseignants. De même, nous mettrons en évidence la pertinence et la richesse de la création de liens entre la théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique du didactique.

Resumen. Este trabajo se ubica en el ámbito de la formación de maestros y tiene como objetivo describir y analizar las praxeologías matemático-didácticas en un proceso de estudio que aborda tareas de modelización de un sistema dinámico de variación. Se hará especial énfasis en la caracterización de la praxis didáctica y del logos didáctico del profesor, con intención de extraer, de este análisis, conclusiones que permitan construir nuevos dispositivos para la formación de maestros, en particular, estudiaremos cómo la dialéctica medios-media puede ser reinterpretada para la construcción con sentido de los conocimientos matemático-didáctico de los maestros. Asimismo, queremos constatar la pertinencia y riqueza del establecimiento de redes entre la teoría de situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 431-464)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Introducción

La formación de maestros es uno de los problemas cruciales a los que se enfrenta la didáctica de la matemática. Consideramos que todo intento de construir respuestas adecuadas a este problema implica conocer y analizar en detalle en qué consiste la actividad didáctico-matemática del profesor, tarea que debe ser asumida por la comunidad de investigación. Por ello, nos planteamos como objetivos:

– Describir y analizar las praxeologías matemático-didácticas de un proceso de estudio en torno a los primeros conocimientos numéricos, haciendo especial énfasis en la caracterización de la praxis didáctica y del logos didáctico del profesor.
– Extraer, de este análisis, conclusiones que nos permitan construir nuevos dispositivos para la formación de maestros. En particular, estamos interesados en estudiar cómo la dialéctica medios-media[1] puede ser reinterpretada para la construcción con sentido de los conocimientos matemático-didáctico de los futuros maestros.

Para ello realizaremos el estudio de un caso concreto: diseño e implementación de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática en la educación infantil.[2] Aunque la problemática asociada no la desarrollaremos aquí en toda su complejidad, mediante el estudio de este caso también abordamos el problema de la transposición didáctica de la modelización matemática en etapas muy tempranas de la educación, problemática que normalmente está ausente en la investigación en el dominio de *la modelización y de las aplicaciones*. Asimismo, queremos constatar la pertinencia y riqueza del establecimiento de redes entre la teoría de situaciones didácticas (TSD) y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) pues, como afirma Guy Brousseau (2007, p. 50): «La TAD y la TSD se complementan. Pero a mi parecer sería absurdo que nos contentásemos con yuxtaponerlas. En numerosas cuestiones se confunden y deben considerarse al mismo tiempo.»

1. Chevallard (2006).
2. En España, la educación infantil es la etapa educativa que va desde los 3 a los 6 años.

1. Estructura praxeológica de la formación de maestros

En un trabajo anterior (Ruiz Higueras & García, 2007), presentamos un *modelo de referencia* que describe cómo se organizan los procesos de estudio mediante los que los maestros en formación construyen los saberes matemático-didácticos. En él se muestra cómo todo maestro en formación se sitúa en la intersección de dos instituciones y de dos sistemas didácticos: uno real, el *sistema didáctico de formación* (ubicado en una institución de *formación de maestros* I_{FM}), otro que siempre está presente *in absentia*, el sistema didáctico escolar (ubicado en una *institución escolar* I_E). La labor principal de la institución I_{FM} es capacitar al *maestro en formación* para que sea competente en su desempeño profesional en otra institución escolar I_E. Esto supone para la institución I_{FM}:

- disponer de un conocimiento adecuado de cómo funciona el sistema de enseñanza de las matemáticas (SEM) y el sistema escolar (SE),
- tener caracterizado el conjunto de saberes *didáctico-matemáticos* que capacitará profesionalmente al futuro maestro,
- disponer de *praxeologías de formación* adecuadas para que el alumno-maestro construya *con sentido* estos saberes y los pueda reconstruir en el medio escolar generando OD que desarrollen una actividad de estudio viva y funcional en la escuela.

Desde el enfoque antropológico se postula que toda actividad de estudio, en cualquier nivel educativo, debe surgir como respuesta a cuestiones cruciales y con suficiente poder generativo. Aplicado a la formación de maestros, se considera necesario, pues, identificar *cuestiones problemáticas de la profesión de maestro* lo suficientemente fecundas y «vivas» como para generar procesos de estudio amplios y complejos que eviten, en el medida de lo posible, la atomización, la excesiva compartimentación del saber matemático-didáctico objeto de estudio y la *monumentalización*[3] de los saberes didácticos.

3. Chevallard (2006) define el fenómeno del monumentalismo como el resultado de la pérdida de las razones de ser de las praxeologías matemáticas que se estudian en la escuela. De forma análoga, consideramos que muy a menudo la formación matemático-didáctica del maestro sufre el mismo fenómeno: la pérdida de las razones de ser que doten

En este artículo nos aproximamos al problema didáctico y de investigación, formulado desde la TAD:

> **P_{FM}: Problema de la Formación de Maestros.** ¿Cómo concebir, expresar, gestionar y evaluar[4] procesos de estudio δ (OM, OD) en una institución I_{FM} con el fin de que los sujetos de I_{FM} sean capaces de reconstruir, articular, gestionar y evaluar pares (OM, OD) *optimizados* en otra institución escolar I_E?

Entendiendo que un par (OM,OD) es óptimo si, al menos, satisface los siguientes indicadores[5]:

- OM es una praxeología local relativamente completa,
- OD es un proceso de estudio que incluye y se desarrolla a partir de la *razón de ser* de OM,
- OD está diseñado de forma que las diferentes *dimensiones* o *momentos* del proceso de estudio estén presentes y desempeñen su adecuada función a lo largo de este proceso.

La investigación desde la TAD ha producido pares (OM, OD) *optimizados*, pero también gran parte de las ingenierías didácticas diseñadas en el marco de la TSD puede ser considerada como óptima atendiendo a estos criterios.

El problema de la formación de maestros, entendido como un proceso de estudio, se puede modelizar en términos praxeológicos. En Ruiz Higueras y García (2007) propusimos caracterizar la formación de maestros como procesos de estudio[6] de pares (OM, OD). El hecho de

---

de sentido a los saberes matemático-didácticos que los maestros en formación estudian en las facultades de Ciencias de la Educación.

4. Artaud (2007, p. 244) amplia aún más los verbos de acción: ¿Cómo observar, analizar, evaluar, desarrollar, evitar, y difundir una OM y una OD relativa a esta OM?

5. Estos indicadores son fruto de trabajos de investigación como los de Bolea (2002), Fonseca (2004), García (2005), Rodríguez (2005), Sierra (2006), Ruiz, Bosch y Gascón (2007) o Barquero, Bosch y Gascón (2007).

6. Todo proceso de estudio puede ser descrito en términos de una praxeología didáctica. Para no confundir los procesos escolares de estudio de las matemáticas con los procesos de estudio de los maestros en formación, propusimos denominar a estos últimos praxeologías de formación.

darle una estructura praxeológica, abre una nueva vía para describir, analizar, problematizar, cuestionar, reconstruir, etc. toda propuesta de formación existente y elaborar, mediante un riguroso control científico, nuevas propuestas que puedan completarla y, en suma, optimizarla.

2. Un modelo para describir las praxeologías didácticas

Durante un proceso de estudio escolar, un profesor y un conjunto de alumnos participan de forma integrada en un proceso de estudio en el que el profesor lleva a cabo una *acción didáctica* con el fin de que los estudiantes construyan una organización matemática (en adelante, OM). En la medida en que las características de esta OM condicionan las posibles formas de organizar su estudio (esto es, la organización didáctica OD) y, recíprocamente, las características del proceso de estudio OD condicionan la OM realmente construida, en la TAD se suele describir todo proceso de estudio como un par (OM, OD), lo que permite aprehender de manera conjunta esta dependencia mutua entre *lo matemático* y *lo didáctico*.

Describir un proceso de estudio supone pues describir, de forma conectada, la OM en juego y la OD que guía su construcción en el aula. Sin embargo, mientras que la descripción de la OM parece relativamente sencilla y es fácil encontrar descripciones detalladas en muchos artículos y publicaciones relacionadas con la TAD, la descripción de la OD parece mucho más compleja. Las técnicas didácticas parecen más escurridizas. Muy a menudo, tienen una naturaleza básicamente discursiva y, en contraste con las técnicas matemáticas, parecen depender mucho más fuertemente del contexto en el que la acción didáctica se lleva a cabo.

El objetivo de este apartado es elaborar un modelo (tentativo) para la descripción de las praxeologías didácticas, que nos ofrezca una terminología común y un conjunto de herramientas teóricas para llevar a cabo esta descripción.

Toda OD implica la existencia de tareas, técnicas, tecnologías y teorías didácticas. Tareas y técnicas didácticas constituyen la *praxis didáctica* del profesor, mientras que tecnologías y teorías didácticas conforman su *logos didáctico*. La cuestión que nos planteamos es: ¿con qué elementos describir las praxeologías didácticas? Y en particular,

¿con qué elementos podemos describir la *praxis didáctica*? ¿Y el *logos didáctico*? Para construir este modelo, nos apoyaremos en los trabajos de Gérard Sensevy, Alain Mercier y Maria Luisa Schubauer-Leoni (2000, 2002), de G. Sensevy et al. (2005), de Claire Margolinas (2002) y de C. Margolinas, Lalina Coulange y Annie Bessot (2005).

1.1. Un modelo para describir la praxis didáctica

A la hora de poner en juego un par (OM, OD), el profesor se enfrenta con un conjunto de seis tipos de tareas de acuerdo con las seis dimensiones básicas de todo proceso de estudio[7]: «realizar el momento del primer encuentro», «realizar el momento exploratorio», «realizar el momento tecnológico-teórico», «realizar el momento de la institucionalización», «realizar el momento de trabajo de la técnica» y «realizar el momento de la evaluación» (Artaud, 2007).

Con el fin de disponer de herramientas más finas para el análisis de la praxis didáctica del profesor, proponemos usar el modelo desarrollado por G. Sensevy et al. (2000, 2002, 2005). Proponen cuatro elementos que constituyen una estructura básica de la acción del profesor y que pueden ser entendidos como grandes tipos de tareas didácticas: definir, regular, devolver e institucionalizar. Consideramos que esta estructuración básica de la acción, combinada con las seis dimensiones fundamentales del proceso de estudio, nos permite describir con más precisión la praxis didáctica del profesor. Por ejemplo, durante el momento del primer encuentro, el profesor tiene básicamente que definir la situación y los objetos que la integran así como asegurar la devolución[8]. Sin embargo, en numerosas ocasiones, el profesor debe reforzar la devolución durante el momento exploratorio e incluso durante el momento del trabajo de la técnica, con el fin de evitar que los alumnos abandonen la situación. Por otro lado, pequeñas institucionalizaciones (de términos, de notaciones, de técnicas, de saberes) son densas en todos los momentos del proceso de estudio. Asimismo, el profesor lleva a cabo la regulación de la relación didáctica de forma continua durante todo el proceso de estudio.

7. Chevallard (2002b).

8. En el sentido de Guy Brousseau (1998).

Dependiendo del momento didáctico, es responsabilidad del profesor regular las interacciones de los alumnos con la situación de manera que, por ejemplo, exploren la situación y busquen técnicas iniciales (momento exploratorio), o pongan en funcionamiento las técnicas, su alcance, su validez, haciéndolas evolucionar si es necesario (momento de trabajo de la técnica), o se construya un entorno tecnológico-teórico que explique y justifique la actividad matemática realizada (momento tecnológico-teórico).

El modelo de G. Sensevy et al. (2000, 2005) desglosa este primer nivel de estructuración en un segundo nivel en el que se identifican tareas didácticas (o de enseñanza) específicas, entre otras, la tarea de *denominar, organizar la acción en el medio, analizar la acción, organizar la interacción* o *la integración de los objetos*.

En un tercer nivel de descripción, proponen una categorización de las técnicas didácticas según la tripleta mesogénesis, cronogénesis y topogénesis (Chevallard, 1985). Sucintamente, para *definir, devolver, regular e institucionalizar*, el profesor pone en funcionamiento técnicas didácticas:

– para modificar, cuando es necesario, el medio de la situación (técnicas mesogenéticas),
– para organizar, o re-organizar, el reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos (técnicas topogenéticas),
– para regular el tiempo didáctico (técnicas cronogenéticas).

En una extensión de este modelo, consideramos que también el profesor hace vivir y evolucionar los diferentes *momentos didácticos* a través de acciones sobre el medio, el topos (suyo y de los alumnos) y controlando el tiempo didáctico. En consecuencia, proponemos usar esta categorización de las técnicas didácticas para describir y analizar, con más precisión, la *praxis didáctica* del profesor en el aula.

1.2. Un modelo para describir el *logos didáctico*

Un marco para estructurar la descripción, explicación y justificación de la *praxis didáctica* no está explícitamente recogido en el modelo de G. Sensevy et al. (2000, 2002, 2005). Aun cuando los autores se preguntan, en su análisis de secuencias de enseñanza en torno a la «carrera al 20», sobre el sistema de creencias del profesor sobre su *praxis*, consideramos que es necesario un modelo más rico para estructurar y describir el *logos didáctico*.

C. Margolinas et al. (2005) proponen otro modelo para analizar la actividad del profesor. En un sentido amplio, constituye una referencia para describir las praxeologías didácticas. En su modelo, basado en la estructuración del medio didáctico en la teoría de las situaciones didácticas, los autores proponen cuatro niveles característicos de la acción del profesor (tabla 1).

Nivel +3	Valores y concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje	Es el nivel más general (nivel «noosferiano» o ideológico): reflexión muy general del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje
Nivel +2	Proyecto didáctico global	Concepción general sobre cómo organizar un tema de enseñanza: nociones a estudiar y conocimiento a adquirir
Nivel +1	Proyecto didáctico local	Proyecto didáctico específico de una lección o conjunto de lecciones: objetivos y organización del trabajo
Nivel 0	Acción didáctica	Interacción con los alumnos, decisiones durante la acción
Nivel –1	Observación de la acción de los estudiantes	Percepción de la actividad de los estudiantes y regulación de su trabajo

Tabla 1. Niveles de la actividad del profesor (Margolinas et al., 2005)

Proponemos usar este modelo para estructurar el logos didáctico del profesor. Si los niveles –1 y 0 corresponden a acciones que el profesor realiza en el aula, es decir, a su praxis didáctica, y que hemos propuesto analizar a partir del modelo de G. Sensevy et al. (2000, 2002, 2005), los niveles +1, +2 y +3 nos permiten estructurar el porqué de esa praxis, es decir, su logos didáctico.

2. Descripción de las praxeologías didácticas: el caso de Ana

Analizaremos el caso de la profesora Ana[9] usando los modelos teóricos introducidos en el apartado anterior, con el fin de ponerlos a prueba y mostrar su pertinencia para el análisis de la praxeologías didácticas.

Si toda actividad del profesor en el aula puede ser modelizada como un par (OM, OD), entendiendo que OM puede ser una praxeología local (e incluso regional), integrada pues por un conjunto de praxeologías puntuales (respectivamente, locales), entonces no será posible describir y entender la praxeología didáctica de Ana sin explicitar también las praxeologías matemáticas que está reconstruyendo en el aula. Aunque descritas en apartados separados en aras de mayor claridad expositiva, ambas están íntimamente relacionadas.

2.1. Praxeologías matemáticas: un proceso de modelización en torno a un sistema de variación

El proceso de estudio, cuya estructura praxeológica vamos a describir en este apartado, fue diseñado conjuntamente por la maestra y los investigadores como un verdadero *recorrido de estudio e investigación* (García & Ruiz Higueras, 2008). Aunque las limitaciones de espacio no nos permiten una descripción detallada de este proceso, consideramos importante, para su comprensión, introducir ciertas características fundamentales de este *recorrido de estudio e investigación* (REI, en adelante):

- Tiene su origen en una cuestión generatriz extra-matemática, que surge en el medio escolar, pero que está relacionada con prácticas que exceden el ámbito escolar.
- Introduce un sistema de variación, de origen biológico, que varía en el tiempo, lo que dirige y condiciona toda la actividad matemática, situando en el corazón del proceso de estudio la problemática de la modelización.
- Ha sido diseñado para que viva en una institución con características muy especiales, como es la etapa de la Educación Infantil (en España, de 3 a 6 años).

9. Nombre ficticio.

En el REI que hemos diseñado, el sistema está configurado por una colección de gusanos de seda que va a sufrir una serie de transformaciones (*metamorfosis*) a lo largo de un determinado período de tiempo. Su pertinencia para poder realizar tareas de modelización matemática desde la educación infantil, se justifica porque:

- Constituye un medio que provoca gran curiosidad en los niños, lo que permitirá desarrollar una actividad matemática rica y cargada de sentido en esta epata educativa, respetando el principio de enseñanza globalizada de este nivel.
- Se trata de un sistema real y auténtico que tiene la gran ventaja de poder «vivir» en el aula para observar su evolución en directo. Además, sus componentes son fácilmente manipulables por los niños, lo que les permitirá validar sus hipótesis y contrastar sus soluciones empíricamente.
- Los diferentes estados de este sistema están determinados por diferentes cantidades de magnitudes discretas, es decir, por colecciones de objetos, cuya medida se puede expresar con números naturales.
- Se trata de un sistema dinámico: los gusanos de seda se convertirán, pasado cierto tiempo, en crisálidas y, finalmente, las mariposas saldrán de ellas y morirán. Esto significa que los niños deben controlar la evolución en el tiempo de al menos tres colecciones diferentes.

Este primer análisis en la caracterización del sistema constituye un *grado* 0, paso previo para comenzar el trabajo didáctico por medio del REI. Sin embargo, aún quedan muchas decisiones que tomar, lo que dará lugar a un *grado* 1.

El grado 1, que correspondió al equipo investigadores-maestra, se identifica con el momento de delimitar las magnitudes que se pondrán en juego y de formular la cuestión generatriz que lance el proceso de estudio del conjunto de praxeologías deseadas. En nuestro caso, para comenzar a articular el trabajo didáctico en el sistema «Gusanos de seda», el primer problema que se plantea es su alimentación, por lo que comenzamos a relacionar entre sí dos magnitudes discretas: gusanos de seda (G) y hojas de morera (H).

> ***Q_G*:** Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda; debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes ¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?

A partir de esta cuestión, y con objeto de provocar una actividad matemática adecuada a las condiciones del sistema didáctico en el que esta tiene que vivir, es necesario introducir ciertas restricciones [10] sobre el sistema:

– En primer lugar, se exige una hoja de morera por gusano y día.
– En segundo lugar, es preciso reponer todas las hojas cada día: sustituir las hojas viejas por nuevas.
– En tercer lugar, las hojas de morera hay que pedirlas por escrito al jardinero del colegio porque subir al árbol es peligroso.

El conjunto de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM) a construir depende de cómo se estructure el trabajo de modelización de la comunidad de estudio sobre el sistema «gusanos de seda». Considerando las condiciones en las que esta actividad matemática ha de *vivir*, hemos identificado, a priori, cuatro organizaciones matemáticas diferentes en torno a los *primeros conocimientos numéricos*. Antes de describirlas brevemente, es importante destacar que estas praxeologías se construyen de manera integrada a partir del trabajo sobre el sistema, en la medida en que nuevas cuestiones surgen, bien por la evolución del sistema, bien por la acción didáctica de la maestra, bien por ambos factores combinados.

Indicamos a continuación las organizaciones matemáticas mencionadas, con sus respectivos tipos de tareas y técnicas:

OM_1: Comparación, medida y producción de colecciones (en las familias de conjuntos G y H):

$G = \{Gi \mid G_i$ es una colección de gusanos de seda, para $i \in \mathbf{N}\}$

$H = \{H_i \mid H_i$ es una colección de hojas de morera, para $i \in \mathbf{N}\}$

10. En general este proceso de estructuración y delimitación del sistema forma parte de todo el trabajo de modelización. Sin embargo, las restricciones de la etapa educativa en la que nos encontramos (educación infantil) nos ha llevado a decidirlo a priori.

Tipos de tareas: Esta organización matemática surge como primera respuesta a la cuestión generatriz Q_G. Contiene tareas problemáticas relativas a la construcción de colecciones equipotentes (en ausencia de una de ellas), comparación de colecciones (diferentes o la misma en dos estados diferentes), cardinación de colecciones, codificación del cardinal de una colección, comparación de mensajes escritos con información cuantitativa, etc. Estas tareas, en el nivel educativo en el que nos ubicamos, constituyen verdaderamente cuestiones problemáticas, ya que los niños de Educación Infantil no utilizan espontáneamente la numeración ni emplean óptimamente las técnicas para cardinar (medir) colecciones (como el conteo o el cálculo aritmético, entre otras).

Técnicas: Técnicas para comparar y medir colecciones discretas, para codificar y comunicar su medida: correspondencia término a término; correspondencia grupo a grupo; estimación visual, «subitización»; conteo; conteo sobre el soporte «banda numérica» y conteo sobre el soporte «calendario».

OM$_2$: Gestión de un sistema dinámico. Comparación y medida de colecciones en las familias:[11]

$$G = \{G_i\}, H = \{H_i\}, C = \{C_i\} \text{ y } M = \{\mathrm{M}_i\}.$$

En un determinado momento de la evolución del sistema, la colección inicial de gusanos $G_0 = G(t_0)$ va transformándose en función del tiempo. El sistema, inicialmente estático, se ha convertido en un verdadero sistema dinámico. Desde el punto de vista matemático, la praxeología OM$_1$ en torno a la cuantificación ha evolucionado y se ha ampliado para incluir problemas de estructura aditiva (Vergnaud, 1991). En esta evolución temporal, la colección inicial de gusanos G_0 genera las colecciones $G_i = G(t_i)$, $C_i = C(t_i)$ y $M_i = M(t_i)$, de tal manera que hay intervalos temporales en los que coexisten colecciones que pertenecen a las tres magnitudes discretas señaladas, evidentemente, con modificaciones en sus respectivas medidas. Se debe controlar la evolución en el tiempo de, al menos, tres colecciones diferentes. En términos de un

11. Las letras de los conjuntos designan gusanos, hojas, crisálidas, mariposas (que posteriormente se subdividirán en dos colecciones: mariposas vivas y mariposas muertas).

sistema dinámico, cada estado del sistema se puede describir con el vector (t_i, g_i, c_i, m_i), siendo t el tiempo y g_i, c_i y m_i los cardinales de G_i, C_i y M_i respectivamente. Además, una ley conservativa regula el sistema: en cada instante t_i, la suma de las medidas de cada colección tiene que ser constante e igual a la medida inicial g_0 de gusanos.

Tipos de tareas: En OM_2 las tareas se agrupan en torno a la gestión de colecciones en situaciones aditivas (combinación, cambio, comparación). Por ejemplo, dadas dos o más colecciones (visibles o no simultáneamente), determinar cuál tiene más elementos, determinar la diferencia entre ellas, determinar el cardinal del conjunto unión ($G_i \cup C_i \cup M_i$); conocido el cardinal de G_0, C_i y M_i, determinar el cardinal de G_i, etc.

Técnicas: A parte de técnicas para comparar, medir y codificar el cardinal de colecciones discretas (OM_1), la actividad matemática se extiende a técnicas de cálculo aritmético: recuperar de la memoria resultados de combinaciones aditivas, técnicas basadas en el conteo (recuento, sobreconteo, descuento) y técnicas de cálculo.

OM_3: Registro de la evolución de diferentes estados del sistema. Construcción de tablas para integrar y gestionar la variación cantidades de las magnitudes: tiempo, gusanos, crisálidas, mariposas.

Esta organización matemática surge como respuesta a la cuestión problemática **Q_3:** ¿Cómo describir, registrar y gestionar la evolución de un sistema vivo y dinámico de gusanos de seda?

Tipos de tareas: En OM_3 el campo de tareas se amplía con la representación/lectura de datos en tablas y el trabajo sobre la magnitud tiempo: registrar la evolución temporal de diferentes estados del sistema, localizar en una tabla un estado del sistema, determinar la distancia temporal entre dos estados del sistema, determinar y denominar la posición de un estado del sistema dentro de una seriación lineal de estados, etc.

Técnicas: En torno a la estructuración de datos en tablas de doble entrada y, recíprocamente, sobre la lectura e interpretación de datos organizados en tabla. En esta situación, una de las razones de ser para la construcción y el trabajo sobre tablas es el registro y la cuantificación del tiempo. Este hecho introduce particularidades importantes al incorporar técnicas primitivas que los niños usan para cuantificar periodos temporales, basadas en la discretización del tiempo en días y en el empleo del conteo sobre ostensivos como la banda numérica y el calendario.

OM_4: Producir conocimiento sobre el sistema (cuando el sistema ya no existe) a partir de los datos del modelo tabular que ha recogido la evolución del sistema.

Esta organización matemática toma pleno sentido en un proceso de estudio como este, en el que la evolución del sistema conduce a su desaparición. Surge como respuesta a la cuestión problemática:

Q_4: Una vez que murieron todas las mariposas, ¿cómo podemos construir, entre todos los equipos de la clase, varios murales que muestren con precisión los gusanos, crisálidas, mariposas, que teníamos en una fecha determinada?

Tipos de tareas: Producir colecciones que representen al sistema en diferentes momentos de su evolución (estados) a partir de los datos que ofrece la tabla, medir cantidades de tiempo, resolver problemas de estructura aditiva relativos a distintos estados del sistema (combinar, cambiar, comparar), establecer relaciones de comparación entre las informaciones alfa-numéricas contenidas en la tabla…

Técnicas: Todas las anteriores.

Cabe observar que, en esta última OM, aunque durante todo el proceso de estudio los diferentes objetos matemáticos han ido surgiendo según eran necesarios para controlar la evolución del sistema, ahora toman un sentido muy diferente: en la medida en que el sistema no volverá a existir, los modelos construidos (en especial los modelos tabulares) se convierten en herramientas imprescindibles para aportar datos sobre el sistema.

Por último, consideramos muy importante destacar que el hecho de tomar «en serio» el estudio de una cuestión generatriz implica cierto grado de indeterminación en el proceso de estudio asociado. Por consiguiente, la descripción de tareas y técnicas previas (así como de las tecnologías asociadas, que hemos omitido en este artículo) no debe entenderse como un camino a recorrer por la maestra y los estudiantes, sino como la explicitación de las posibilidades que el estudio de un sistema como el de los «Gusanos de seda» ofrece.

2.2. Proceso de estudio: análisis de la praxeología didáctica

El proceso de estudio que aquí analizamos fue implementado por la maestra durante el curso 2008/09. Teniendo en cuenta la riqueza de la cuestión generatriz así como la *vida* del sistema, el estudio se alargó durante varias semanas por lo que resulta imposible describirlo y analizarlo en su totalidad. En este apartado hemos seleccionado algunos episodios relevantes de dicho proceso de estudio y hemos analizado la praxeología didáctica puesta en funcionamiento por la maestra.

En primer lugar, describiremos y analizaremos los elementos más importantes de la praxis de la maestra cuando estaba dirigiendo el proceso de estudio. En segundo lugar, describiremos y analizaremos los elementos más importantes de su logos didáctico, que explican y justifican su praxis durante el proceso de estudio.

2.2.1. Descripción y análisis de la praxis didáctica de Ana

Para analizar la *praxis didáctica* de Ana identificaremos:

- Las tareas didácticas en función de los momentos de estudio y de las tareas identificadas por Sensevy et al. (2000, 2002, 2005) asociadas a la estructura básica de la acción didáctica: *definir, regular, devolver* e *institucionalizar*.
- Las técnicas didácticas en función de su impacto sobre el *medio didáctico* (mesogenéticas), sobre el *topos didáctico* (topogenéticas) o sobre el *tiempo didáctico* (cronogenéticas).

Para describir los episodios, nos basaremos en el auto-relato del proceso de estudio escrito por la propia maestra, en el que recogió no solo la descripción de los acontecimientos, sino también diálogos entre los niños y la maestra, producciones de los niños y sus reflexiones sobre el proceso de estudio vivido (tabla 2).

EPISODIO 1

Ana: Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda, debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes.

Los niños, durante los días que llevan los gusanos en la clase, al ver que son muy voraces y se comen rápidamente todas las hojas de morera, muestran mucho interés por su alimentación y esto hace que aparezca nuestro primer problema: la gestión del alimento.

La maestra, para comenzar a trabajar con los niños en el sistema «Gusanos de seda», el primer problema que plantea es su alimentación, con el propósito de que los niños comiencen a relacionar entre sí cantidades de dos magnitudes discretas: gusanos de seda (G) y hojas de morera (H):

Q_G: ¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?

Ante la gran expectación despertada en los niños y el deseo de poner, sin ningún tipo de control, todos a la vez las hojas de morera en la caja, la maestra indica:

Se armó tal confusión, que tuve que mediar.
Entonces les dije:

Ana: Eh, chicos, ¿qué os parece si ponemos una hoja fresca cada día a cada gusano? Una y solo una para cada gusano. Así, cada uno tiene su comida y todos crecen sin problemas.

A todos les pareció una buena idea.

Ana: ¿Qué podemos hacer para que todos coman una y solo una hoja y no se nos quede ninguno sin su hoja fresquita diaria? ¿Cómo resolvemos este problema?

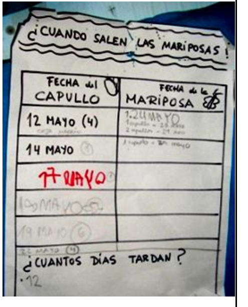
TAREAS DIDÁCTICAS	**TÉCNICAS DIDÁCTICAS**
Realizar el primer encuentro con OM_1: Definir la cuestión generatriz Q_G del proceso de estudio. Definir el medio: objetos y relaciones entre ellos (sistema de variación). Definir la relación de los alumnos (y la profesora) con el medio: contrato didáctico. Determinar la acción sobre el medio.	**Técnicas mesogenéticas:** Presentar y describir un medio: la maestra presenta un conjunto de objetos (*gusanos*) y de declaraciones (*cuidar los gusanos, alimentarlos, nuestra responsabilidad*…). Enunciar la cuestión problemática Q_G: iniciación del proceso de devolución. La maestra formula una cuestión muy pertinente con objeto de que los niños se involucren totalmente y «hagan suyo» el problema. Delimitar el sistema e introducir restricciones (*una hoja fresca cada día para cada gusano*…). Relanzar una nueva cuestión: (*¿Qué podemos hacer para que todos coman una y solo una hoja y no se nos*

Devolver el problema: la maestra debe proponer un problema a los niños con la intención de obtener su total adhesión por la gran relevancia y significación que tendrá para ellos resolverlo. Llevar a cabo el tránsito entre el primer encuentro y el momento exploratorio. Realizar el momento exploratorio (OM_1) Re-organizar el medio para la acción. Definir diferentes tipos de problemas. Regular la interacción de los alumnos con el medio.	*quede ninguno sin su hoja fresquita diaria?*) la maestra, con objeto de clarificar la situación, disminuye la incertidumbre de los alumnos y dota de sentido a la actividad matemática. La maestra cambia el «medio» inicial formulando una nueva cuestión con la intención de que los niños necesariamente modifiquen las técnicas de resolución primitivas del problema propuesto (coger sin el más mínimo control diferentes cantidades de hojas de morera). **Técnicas cronogenéticas:** Cambiar de momento de estudio: la maestra avanza cuestionamientos nuevos para provocar la emergencia, exploración y construcción de nuevas técnicas. «Esperar el momento propicio»: la maestra deja un tiempo para que «vivan» las técnicas iniciales (sin control numérico) y *espera el momento propicio* para volver a cambiar el medio, con objeto de provocar la emergencia de técnicas basadas en la cardinación de colecciones. **Técnicas topogenéticas:** «Fusión topogenética» inicial: la profesora se ubica en el mismo grupo de los alumnos y la disimetría de la relación didáctica es (ficticiamente) borrada (*todos debemos, es nuestra responsabilidad…*). En este caso realiza un desplazamiento topogenético mediante un «movimiento topogenético descendente». Provoca la organización cooperativa de la actividad en el grupo-clase (*«los gusanos están bajo nuestra responsabilidad»*). Al avanzar el episodio, la maestra ocupa una posición topogenética dual: por un lado, intenta mantenerse en el topos del alumno (*ponemos, debemos, resolvemos…*) pero, por otro lado, asume su responsabilidad en la gestión de la actividad del aula y reorganiza el medio cuando lo estima oportuno para hacer avanzar el trabajo matemático de los alumnos.

Tabla 2. Análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 1

EPISODIO 2

Cuando se inició la metamorfosis, hubo mucha expectación en toda la clase:



Ana: *¿Y cuándo saldrán las mariposas?*
Raquel: *Pues mañana.*
Mario: *No, tardan más días.*
Ana: *¿Sí?¿Cuántos?*
Dani: *Mi mamá me ha dicho que diez.*
Ana: *Pues yo no lo sé.*
María: *Pues los contamos y cuando salgan ya sabemos cuántos días son.*
Sobre la marcha la maestra prepara una tabla de doble entrada con la ayuda de los niños y niñas. Y, sin mediar palabra, clava la hoja en el corcho de la asamblea.
Mario: *¿Eso qué es?*
Raquel: *¿Para apuntar?*
Ana: *A ver, he pensado que vamos a apuntar el día de hoy para no olvidarnos, porque así cuando salgan los capullos, sabremos desde qué día empezar a contar…*
Ana: *Aquí apuntaremos la fecha cada vez que tengamos un capullo nuevo. Y cuando salga alguna mariposa, lo apuntamos también.*
Dani: *Eso, a ver si yo tenía razón, verás cómo son diez días.* (…)
Por suerte, la primera mariposa nació al día siguiente de que el último gusano se encerrara en el capullo. Entonces, la maestra pensó:
¿Cómo conseguir que los niños y niñas fueran autónomos para dar cuenta de la evolución sufrida por la colección de gusanos desde su inicio, señalando todas sus transformaciones? ¿Cómo han ido cambiando?
La primera cuestión fue anotar en nuestro cuadrante la fecha y averiguar los días que había tardado la metamorfosis. Para ello fue necesario contrastar las diferentes estrategias que unos y otros ofrecían:
Mario: *Son tres días.*
Dani: *No, dije yo que diez* —Dani seguía convencido de que eran diez días; ¿para qué contarlos?…
María: *Los días ya han pasado y no se pueden contar*.
Ana: *Sí que se puede, a ver, ¿cómo sabemos los días que hace que fue mi cumpleaños, que fue hace solo unos días y ya han pasado?*
Pedro: *Pues buscamos ese día en el almanaque y decimos uno, dos tres…* y unos cuantos se levantaron e iban señalando con el dedo hasta llegar a la fecha de hoy.
Ana: *Pues esto es igual. A ver, el responsable de hoy, Antonio, dinos tú. Primero tienes que buscar en el cuadro la fecha en que ese gusano hizo el capullo.*
Antonio: *Tiene que ser de los primeros, porque está en la caja marrón.*
Ana: *Muy bien, Antonio, ahora busca ese número en el almanaque y cuenta…*
Antonio: *Uno, dos, tres, cuatro… doce. ¡Doce días!*
Todos los niños aceptaron el procedimiento de Antonio para saber los días que tarda la crisálida en transformarse en mariposa.

TAREAS DIDÁCTICAS	TÉCNICAS DIDÁCTICAS
Adaptar la actividad matemática a un medio que evoluciona en el tiempo (sistema dinámico). Realizar los momentos del primer encuentro, exploratorio y de trabajo la técnica (OM_3). Regular el medio: Definir y organizar la acción en el medio (nuevas tareas, nuevas reglas, nuevas colecciones, nuevos objetos…) Institucionalizar técnicas. Redefinir el contrato didáctico. Obtener la adhesión de los alumnos a la nueva situación: mantener la devolución.	**Técnicas mesogenéticas:** El sistema, puesto que es dinámico, experimenta una evolución que transforma el medio en un doble sentido: Transformación de las colecciones (aparece una nueva colección: «crisálidas»). Emerge el tiempo como una nueva variable del sistema. Relanzar nuevas cuestiones: la maestra produce un nuevo medio caracterizado por: Cuestionamientos nuevos (¿cómo medir el tiempo?). Nuevos objetos (tabla de doble entrada como modelo de la evolución temporal del sistema). Introducción del calendario y banda numérica. En este episodio, la magnitud a cuantificar (tiempo) es intangible. La introducción en el medio de la tabla junto con el calendario y la banda numérica genera la *visibilidad* de las diferentes cantidades de tiempo y su discretización. De esta forma, la maestra adecua el medio para que el trabajo sobre la magnitud tiempo se pueda realizar a partir de técnicas basadas en el conteo. La maestra gestiona los ostensivos: tabla de doble entrada, banda numérica, calendario. **Técnicas cronogenéticas:** Cronogenéticamente, la maestra tiene que adaptar el tiempo didáctico a la evolución temporal de un sistema vivo cuyos cambios escapan a su control. Aceleración cronogenética: la maestra debe cambiar de organización matemática al ritmo impuesto por la metamorfosis. Para provocar en los niños la emergencia de una estrategia para medir el tiempo, la maestra procede mediante la técnica didáctica de la *resonancia* que consiste en provocar la reaparición de una técnica anteriormente utilizada en la clase: recupera una técnica ya conocida (conteo sobre el calendario), recoge de la memoria colectiva de la clase hechos vividos (*su cumpleaños*), con objeto de ayudar a los niños a disminuir su incertidumbre y reanudar su actividad en busca de estrategias apropiadas. Se trata de la gestión de la *memoria didáctica* de la clase. **Técnicas topogenéticas:** Movimiento topogenético ascendente: la maestra asume

	gran parte de la actividad matemática, con objeto de reducir la incertidumbre de los alumnos ante un nuevo medio o ante un nuevo cuestionamiento. Se ubica a gran distancia del topos del alumno, ocupando la posición hegemónica que tiene en el grupo clase, instaurando una diferenciación topogenética extrema. El topos del alumno queda prácticamente limitado a la reproducción de la técnica enunciada por la maestra. El nuevo contrato didáctico establecido deja de ser adidáctico. La maestra, mediante la técnica didáctica de *difusión dialógica*, retoma una técnica movilizada por un alumno (Antonio) para difundirla a toda la clase, integrándose así en el *medio* como una técnica institucionalizada (con efecto mesogenético). Sin embargo, observamos que la creación de la técnica por parte del alumno es solo aparente: es en realidad la maestra la que la construye y la presenta a la clase como proveniente de un alumno, minimizando artificialmente la distancia topogenética entre ambos.

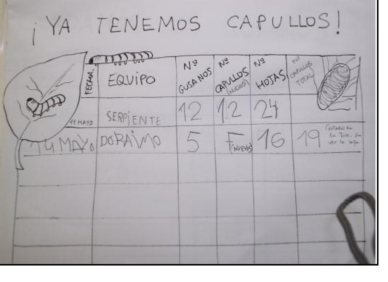
Tabla 3. Análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 2

EPISODIO 3

A medida que los gusanos se transformaban en crisálidas, y estas ya no las podíamos manipular, porque estaban sujetas con «hililillos» a las paredes de la caja, planteamos la necesidad de cambiar los gusanos a otra caja (de esta forma, conforme los días iban pasando, la colección de gusanos y crisálidas estaba dividida en varias cajas).

Ana: *¡Niños! Los capullos no los podemos tocar, no los podemos mover, porque se mueren y no pueden transformarse en mariposas.*

Cada día que aparecía uno o varios capullos nuevos, los contábamos todos de nuevo, empezando por la primera caja y siguiendo por la segunda, luego, contábamos todos los gusanos que nos quedaban, y escribíamos en una nueva tabla los resultados.



Un día hubo una novedad: que Pablo, cuando contaba los capullos, empezaba, sin abrir la primera caja, diciendo «cuatro» y partir de ahí

<table>
<tr><td colspan="2">seguía contando los de la otra caja. Conservaba el número de capullos de la primera pero no en la segunda, que era la variable. Otros niños y niñas aprendieron a utilizar esta estrategia, era mucho mejor que volver a empezar y… ¡salía el resultado bien!</td></tr>
<tr><th>TAREAS DIDÁCTICAS</th><th>TÉCNICAS DIDÁCTICAS</th></tr>
<tr><td>Adaptar la actividad matemática a un medio que evoluciona en el tiempo (sistema dinámico).

Realizar los momentos del primer encuentro, exploratorio y de trabajo la técnica (OM_2).

Regular el medio:
Definir y organizar la acción en el medio (nuevas tareas, nuevas reglas, nuevas colecciones, nuevos objetos…).

Institucionalizar conocimientos matemáticos (OM_1).

Institucionalizar técnicas matemáticas.</td><td>Técnicas mesogenéticas:
Con el fin de provocar el primer encuentro con OM_2, la maestra introduce:
Nuevos objetos en el medio (cajas, división de la colección).
Una nueva tabla en la que registrar los cardinales de las colecciones según la evolución del sistema.
Además, integrado en este nuevo medio, y en relación con el trabajo previo en OM_1, la maestra institucionaliza la escritura indoarábiga de los cardinales de las colecciones.
En el momento de trabajo de la técnica, un niño usa el sobreconteo. La maestra, mediante la técnica didáctica de difusión dialógica, la presenta al grupo-clase, para que la valide y la acepte. Esta técnica (sobreconteo) queda así institucionalizada (se integra en el medio).
Técnicas cronogenéticas:
Cronogenéticamente, la maestra tiene que adaptar el tiempo didáctico a la evolución temporal del sistema que escapa a su control.
Cambio de organización matemática.
La evolución temporal autónoma de este sistema provoca, en este caso, una aceleración cronogenética: la maestra fusiona el primer encuentro con el momento exploratorio, los reduce, asumiéndolos ella, situando directamente a los alumnos en el momento del trabajo de la técnica.
Técnicas topogenéticas:
Fusión topogenética: la profesora en algunos momentos de este episodio, se ubica como una alumna más en el grupo-alumnos con objeto de borrar (aunque ficticiamente) la disimetría de la relación didáctica («todos contámos», «todos escribimos»…). Esto conduce a que la maestra, en este episodio, intente llevar a cabo una técnica didáctica de construcción cooperativa de las técnicas matemáticas.</td></tr>
</table>

Tabla 4. Análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 3

EPISODIO 4

Ana: Cuando ya se murieron todas las mariposas, decidimos hacer murales gráficos de los diferentes estados de nuestra colección.

La maestra eligió cuatro momentos significativos:
Cuando solo teníamos gusanos.
Cuando comenzaron a hacer crisálidas.
Cuando solo teníamos crisálidas.
Cuando solo teníamos mariposas, incluidas las muertas que guardábamos para mirarlas después en el microscopio.

En su elaboración han intervenido todos los niños pero no todos a la vez, es decir, que han ido pasando por la actividad en grupos de seis o siete, de modo que el mural finalizaba cuando todos los niños de la clase habían aportado su trabajo al mismo.

Lo más interesante de este trabajo es que, cuando un grupo se iba porque acaba su tiempo y llegaba otro, el primer objetivo de este era ver en qué estado se encontraba la tarea, es decir, contar cuántos elementos teníamos ya dibujados, recortados y pegados y cuántos nos quedaban por hacer, por lo que las tablas en las que íbamos anotando las variaciones de la colección eran imprescindibles, una auténtica herramienta de trabajo.

TAREAS DIDÁCTICAS	TÉCNICAS DIDÁCTICAS
Realizar los momentos del primer encuentro, exploratorio y de trabajo de la técnica (OM_4).	**Técnicas mesogenéticas:** Construir un nuevo medio, relanzar nuevas cuestiones: una vez que ha desaparecido totalmente el sistema, la maestra tiene que construir un nuevo medio para permitir que siga avanzando la actividad matemática de los niños.
Organizar y regular el medio.	Las tablas, que hasta ahora han sido herramientas, se convierten en un auténtico medio a partir del cual la maestra introduce un nuevo problema: reconstruir el sistema en diferentes estados.
Llevar a cabo una nueva devolución del problema a los alumnos.	Integrar organizaciones matemáticas: la maestra articula entre sí OM_1, OM_2, OM_3 constituyendo una nueva praxeología OM_4 que amplía e integra entre sí a las anteriores.
Dotar de una nueva funcionalidad (razón de ser) a objetos matemáticos previamente construidos.	Reforzar el proceso de devolución: la maestra formula necesariamente nuevas cuestiones para que los niños aborden la tarea de producir colecciones y trata de asegurar la devolución del problema, aún cuando el sistema ya no existe.
Institucionalizar la tabla de doble entrada como modelo del sistema.	Gestión de ostensivos: la maestra debe gestionar el ostensivo tabla junto con los ostensivos banda numérica y almanaque.

	Técnicas cronogenéticas: Organiza la reconstrucción del sistema en sincronía con su evolución real en el tiempo pasado. En contraste con la aceleración del tiempo didáctico (aceleración cronogenética) que identificamos en el episodio anterior, ahora la maestra ralentiza el tiempo (ralentización cronogenética), ofreciendo a los niños grandes espacios para desarrollar la actividad matemática (ahora, la presión de la evolución real del sistema ha desaparecido). Promover la secuenciación y articulación progresiva de OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4. Cambiar de momento de estudio. **Técnicas topogenéticas:** Construcción cooperativa de las técnicas: la profesora, posicionada como un alumno más, involucra al grupo en la construcción de nuevas técnicas, trata de ponerlo en posición reflexiva e incluso lo hace partícipe en el reparto de tareas. Posición topogenética dual: por una parte la maestra se identifica con el grupo clase y por otra, asume la responsabilidad no compartida de la selección de los estados del sistema a reconstruir.

Tabla 5. Análisis de la *praxis didáctica* de la maestra en el episodio 4

2.2.2. Descripción y análisis del logos didáctico de Ana

En este apartado trataremos de describir y analizar la componente tecnológico/teórica —logos didáctico— que sustenta la praxis didáctica de Ana. Como afirma Chevallard (2002), las condiciones de la actividad del profesor y las restricciones que pesan sobre ella no se limitan a las que son inmediatamente perceptibles y visibles en la situación de clase, sino que se ubican en niveles anteriores.

Para realizar este análisis utilizaremos el modelo teórico presentado en la sección 3 de este trabajo. La base empírica de nuestro análisis está constituida por la crónica elaborada por la propia maestra y, principalmente, por las «reflexiones» que escribió al fin de las secuencias vividas en clase, en las que trata de justificar su proceder didáctico. Este análisis descendente del *logos didáctico* de Ana, nos permitirá aproximarnos a los niveles +3, +2, +1 identificados por Margolinas (2005) (el nivel 0, correspondiente a la situación didáctica vivida en clase, ya ha sido analizado en la sección anterior).

La maestra, al comienzo de sus reflexiones, expresa explícitamente sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular.

> «Que sea la propia situación vivida la que provoque que los niños y niñas necesiten la matemática nos parece más que importante, porque facilita un enfoque didáctico alejado del empirismo que tradicionalmente ha estado instalado en la escuela. Nuestros niños y niñas han ido construyendo sus saberes matemáticos para responder a necesidades vitales y utilizándolos para resolver problemas muy importantes para ellos. […]
> Debemos huir del empirismo que relaciona error con fracaso. Debemos atender no solo a los resultados, sino sobre todo a los procesos, a las estrategias que los niños y niñas han sido capaces de poner en juego […]
> Es muy importante que resuelvan los conflictos en grupo, que se escuchen unos a otros, que razonen en voz alta sus respuestas, que compartan estrategias. Solo así se producirá la mediación y validación entre iguales tan importantes en el enfoque constructivista.» (A, 2008, Anexo 1)

Tras la lectura de estas declaraciones, podemos identificar a la «maestra-noosferiana», Ana, en posición +3: hace explícitas dos tecnologías didácticas basadas en dos modelos diferentes y opuestos de aprendizaje: el modelo que denomina empirista y el modelo constructivista que presenta como óptimo. Si bien, este último no lo nombra explícitamente, sí lo describe, mostrando además, abiertamente, la necesidad de construir con sentido el conocimiento matemático. Tras estas tecnologías didácticas que justifican su praxis didáctica, podemos identificar el aprendizaje por adaptación al medio, bajo el marco teórico de la teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1998), la significación del proceso de devolución en la actividad matemática de los niños y la responsabilidad de la maestra en la generación de conflictos sociocognitivos entre los alumnos (y su posterior validación colectiva).

Es importante señalar que Ana determina explícitamente cuál debe ser la posición de la maestra en la regulación del contrato didáctico: identifica con precisión el «topos» del profesor y el «topos» de los alumnos, para hacer vivir en el aula una verdadera situación a-didáctica:

> «Es fundamental que la maestra parta de una "profunda ignorancia" ante los niños. Cuanto menos sabe la maestra, más capaces los hacemos a ellos para resolver situaciones problemáticas.»

Estas decisiones y exigencias didácticas revelan que Ana controla su acción didáctica a partir de la TSD y la usa como componente esencial de su *logos didáctico*. También muestran su determinada opción por el modelo de aprendizaje constructivista, muy valorado en la actualidad por la noosfera para este nivel educativo, lo que evidentemente condiciona su comportamiento y sus decisiones didácticas.

Si descendemos de nivel de análisis, el nivel +2 nos muestra por qué Ana, para que los niños construyan con sentido los conocimientos matemáticos relativos al dominio de los primeros conocimientos numéricos (en adelante, PCN), proyecta el estudio del sistema «Gusanos de seda» en su evolución temporal y quiere generar toda una serie de situaciones a-didácticas en torno a él.

> «Aprovechando que las mariposas ocupaban nuestro quehacer en clase durante estos días, se nos ocurrió llevar gusanos de seda para criarlos, y, en principio, ver "en directo" el ciclo de reproducción de la mariposa. Pero lo que comenzó siendo un tema "de ciencias", acabó ofreciéndonos un marco más que idóneo para trabajar el número, la numeración y la aritmética, a partir de los problemas que la crianza de los gusanos nos ofrecía, desde cómo gestionar el alimento hasta cómo llevar el control de los cambios ocurridos en la colección. […]
>
> La cardinación y la numeración han de tener un porqué, una razón precisa, una funcionalidad, tales como conservar los gusanos de seda, poder relatar adecuadamente sus cambios, comparar el número de gusanos con el número de hojas, repartir cantidades, ahorrarnos trabajo en la gestión del alimento de nuestros gusanos, disponer de información precisa sobre todo lo acaecido.» (A, 2008, Anexo 1)

Los conocimientos a los que se refiere Ana pertenecen al dominio de los PCN, considera que los niños los construirán con sentido, ya que responderán a problemas y necesidades vitales, reales y auténticas. Toma el sistema «Gusanos de seda» como base idónea para construir toda una familia de situaciones a-didácticas y, así, formar una verdadera *situación fundamental* en torno a problemas derivados de «criar, alimentar y cuidar gusanos de seda».[12]

Ana también hace explícita la necesidad de construir las situaciones a-didácticas en torno a dialécticas de acción, formulación y validación:

> «Es necesario que los alumnos actúen, hagan, tomen iniciativas, opinen sobre qué posibles maneras hay de resolver un problema: el aprendizaje matemático se basa en la acción, en la comunicación, en la formulación, en la validación.»

Y manifiesta la función del conocimiento matemático como útil de *anticipación*:

> «Hemos de conducir a nuestros niños y niñas desde la manipulación hacia la anticipación, es decir, no debemos solo constatar, o realizar acciones concretas sobre los objetos, sino que debemos usar la matemática para resolver situaciones en ausencia de los objetos: dibujar tantas mariposas como dice el número n del cuadrante sin necesidad de tocarlas, añadir los nuevos capullos a los ya existentes sin necesidad de volver a verlos en las cajas y contarlos otra vez, saber dar cuenta con precisión numérica de todo lo acaecido, cuando ya no existen los gusanos, ni las crisálidas, ni las mariposas.»

Tiene muy en cuenta la necesaria generación de sentido en la construcción los conocimientos numéricos que realicen los niños:

> «Tenemos que conseguir que los niños acudan al empleo del número y de la numeración porque lo necesiten para resolver un conflicto, una situación, un problema.»

Así como la adecuada gestión que ha de realizar la maestra de conflictos cognitivos:

---

12. Recordemos la situación fundamental que permite movilizar el número natural como cardinal: una persona debe ir a buscar, en una sola vez, una colección C2 equipotente a una colección de referencia C1. Las colecciones C1 y C2 son visibles y están disponibles simultáneamente en el momento de la validación, pero no en el momento de la construcción. Es decir, mientras la persona construye C2 no puede ver C1.

> «Hemos de diseñar situaciones en que las estrategias antiguas ya no les sirvan para que no tengan más remedio que buscar otras, que les plateen un conflicto cognitivo contra lo que ya saben o dominan, como por ejemplo que no es útil volver a contar los capullos ya contados.»

El análisis del nivel +2 evidencia la significación e influencia que tiene el nivel +3 en la configuración de la acción didáctica de esta maestra. Podríamos postular que Ana llevaría a cabo un proyecto de enseñanza con similares características con cualquier otro conocimiento matemático de este nivel educativo.

Si consideramos que la acción didáctica de la maestra está descrita por un par (OM, OD), confirmamos que Ana ha realizado un verdadero trabajo de transposición didáctica «interna» (Margolinas & Wozniak, 2009) con el fin de elaborar una OD que haga vivir la OM correspondiente a los PCN. Ha organizado sus sesiones concretas de clase, a partir del sistema «Gusanos», teniendo en cuenta su concepción del aprendizaje matemático (nivel +3) y sus conocimientos sobre la *situación fundamental* en torno a los PCN (nivel +2).

Si descendemos hasta el nivel +1, encontramos a Ana ante la necesidad de construir su «proyecto didáctico local». Lo inicia partir de una cuestión generatriz (Q_G) que permitirá a los niños establecer un primer encuentro con la organización matemática OM_1:

> $\boldsymbol{Q_G}$**:** Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda, debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes ¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?

Con la formulación de esta cuestión, Ana trata de acondicionar un «medio» que provoque en los niños un aprendizaje matemático por adaptación (TSD), para ello organizando toda una serie de tareas descritas en OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4 y en los episodios 1, 2, 3 y 4 descritos anteriormente.

Este conjunto de tareas muestran que Ana, en el nivel +1, pone en relación y hace funcionar los conocimientos matemáticos y didácticos que tiene a su disposición para organizar cada una de las situaciones a-didácticas de la *situación fundamental* prevista en +2. Además, con objeto de provocar una adecuada actividad matemática en los niños, Ana introduce restricciones sobre el sistema, es decir, gestiona adecuadamente las variables didácticas de cada situación, tratando así de que los alumnos las vivan con la máxima *adidacticidad* posible.

En suma, Ana ha construido un par (OM, OD) óptimo, ya que OM es una praxeología local relativamente completa (OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4); OD es un proceso de estudio que incluye y se desarrolla a partir de la razón de ser de OM, y, además, OD está diseñado de forma que las diferentes dimensiones o momentos del proceso de estudio están presentes y desempeñan su adecuada función a lo largo del mismo. Más aún, el par (OM, OD) representa un proceso de estudio que permite hacer vivir una verdadera actividad de modelización de un sistema dinámico de variación en la escuela infantil, en el que los alumnos han construido un conjunto de praxeologías matemáticas de complejidad creciente.[13]

Cabe señalar que Ana no hace referencia, en su crónica, a ningún tipo de documento curricular oficial, lo que se podría interpretar como un indicador del alto grado de libertad que tienen los maestros de este nivel educativo en relación con la organización y progresión de los conocimientos matemáticos, con la gestión del tiempo escolar, con la disponibilidad y flexibilidad de espacios físicos, con la división de los alumnos en grupos, etc. Esta circunstancia no es nada trivial, ya que ha permitido la «vida» del sistema dinámico «Gusanos de seda» en el aula, sin ninguna restricción institucional (que en otro nivel educativo lo hubiese podido condenar al fracaso). Además, desde la «noosfera», este alto grado de libertad y flexibilidad está legitimado, ya que la sociedad mantiene un contrato con la escuela infantil con cláusulas que no serían aceptables en otro nivel escolar. Por último, destacamos que en este nivel educativo se organizan las diferentes áreas curriculares bajo una perspectiva globalizadora, lo que implica que los alumnos puedan realizar recorridos de estudio e investigación sobre sistemas que, en otro nivel, forman parte de áreas desconectadas institucionalmente de las matemáticas. Toda esta ideología «noosferiana», de nivel +3, hace que sea posible realizar una

13. García (2005); García, Bosch, Gascón y Ruiz Higueras (2006).

verdadera actividad de modelización matemática en el aula de Educación Infantil, tal como lo ha mostrado Ana.

3. Conclusiones: la formación de maestros como una dialéctica de los «medios» y los «media»

El trabajo mediante el que Ana genera un proceso de estudio para los primeros conocimientos numéricos en torno al sistema «Gusanos de seda» puede ser reinterpretado a la luz de la dialéctica de los medios y los *media* (Chevallard, 2006). Como expresa la maestra en su crónica, el objetivo inicial del sistema era el estudio de la metamorfosis. Sin embargo, su *intuición* sobre las posibilidades (matemático-didácticas) del sistema rápidamente generaron una cuestión problemática crucial, que podemos reformular en los siguientes términos: ¿cómo diseñar un proceso de estudio en torno a los primeros conocimientos numéricos que dé lugar a una actividad matemática significativa a partir del estudio del sistema «Gusanos de seda»?

La maestra construye una *respuesta personal* $R^{\heartsuit}$, que hemos descrito ampliamente en los apartados precedentes, retomando y articulando respuestas previas $R^{\lozenge}$ generadas desde la didáctica de las matemáticas, a las que la maestra ha tenido acceso en su formación inicial y continua.[14] Desde el punto de vista del aprendizaje de la maestra, la situación escolar vivida genera un medio no-didáctico a partir del que la maestra ha construido un nuevo saber didáctico-matemático. Como indican Margolinas et al. (2002, 2005), el profesor puede transformar continuamente su saber en interacción con el medio escolar en el que desempeña su labor profesional. El carácter no-didáctico de este medio hace que las respuestas que genera sean normalmente espontáneas, circunscritas generalmente al nivel de la acción, adquiriendo un carácter implícito y raramente formulado o validado por el profesor, más allá de la mera validación empírica. Sin embargo, en nuestra investigación, el hecho de pedir a la maestra un informe en el que explique y justifique el proceso de

---

14. Usamos las notaciones $R^{\heartsuit}$ y $R^{\lozenge}$ en el ámbito de la formación de maestros de modo análogo al uso que figura en Chevallard (2007) en relación con los procesos de estudio de objetos matemáticos.

estudio diseñado y gestionado en el aula, ha permitido hacerlo explícito, tanto en el nivel de su *praxis didáctica* como de su *logos didáctico*.

Este análisis genera una consecuencia inmediata para la formación inicial de maestros: si no deseamos caer en un fenómeno de «monumentalismo», que en demasiadas ocasiones impregna la formación didáctico-matemática de los futuros maestros, es necesario hacer que estos saberes surjan con sentido, esto es, como respuestas a cuestiones cruciales para el maestro en formación. Si bien no tenemos una respuesta cerrada sobre cómo organizar las praxeologías de formación de maestros, el análisis precedente nos abre las puertas a dispositivos de formación en los que los maestros en formación construyan respuestas personales $R^{\heartsuit}$ como resultado de un estudio de respuestas previamente construidas $R^{\lozenge}$, en procesos análogos al vivido por Ana. No se trata solo de colocar a los maestros en formación ante la tarea de generar situaciones escolares nuevas sino, de la misma forma que Ana ha mostrado en su protocolo, generar pares (OM, OD) usando con sentido, de manera controlada e intencionada, saberes matemático-didácticos y respuestas previamente construidas.[15]

El análisis detallado de la *praxis didáctica* de Ana ha puesto asimismo de manifiesto la enorme complejidad de la tarea profesional de *concebir, expresar, poner en funcionamiento* y *evaluar* pares (OM, OD). La generación de una *praxis didáctica* coherente y explícitamente conectada con un *logos didáctico*, la sutileza de la gestión de las situaciones en el aula y, en particular, de las *técnicas meso-*, *crono-* y *topo-genéticas*, suponen sin duda un nuevo desafío para la formación inicial y continua de maestros.

Por un lado, resulta ingenuo pensar en poder dotar a priori a los futuros maestros de un repertorio suficientemente amplio de técnicas didácticas *meso-*, *crono-* y *topo-genéticas*. Pero, por otro lado, resultaría irresponsable dejar que ellos las construyan implícitamente (cuando esto sea posible) en su primeros años de ejercicio profesional (como muchos

15. En el caso analizado, tanto las respuestas previas sobre las que Ana ha construido su respuesta como la respuesta misma, están enmarcadas en el marco de la teoría de las situaciones didácticas. Sin embargo, consideramos que esta conclusión es generalizable a cualquier otro marco teórico que ofrezca respuestas previas y permita generar pares (OM, OD) optimizados.

maestros expresan años después de su paso por las Facultades de Ciencias de la Educación). ¿Cómo resolver este dilema?

Según hemos aprendido en el análisis del caso de Ana, de nuevo proponemos situar la dialéctica medio-media en el centro de la problemática de la formación de inicial del maestro, entendiendo por «media» documentos que recogen el saber que en la actualidad disponemos sobre la generación en el aula de pares (OM, OD) optimizados y por «medio» la generación controlada de situaciones en las que los maestros en formación tengan que estudiar las respuestas proporcionadas por estos «media» con el fin de producir su respuesta personal. Si bien, una vez más, no disponemos de respuestas definitivas sobre cómo llevar a cabo este proceso, consideramos que, análisis detallados de casos como el de Ana constituyen una media privilegiada. Sin embargo, en lo referente al desarrollo de la praxis didáctica de los maestros en formación, y sin intención de caer en un empirismo ingenuo, consideramos indispensables que estos «media» entren en dialéctica con verdaderos «medios escolares», no solo evocados, sino que los maestros en formación puedan vivir. Esto es, dispositivos de formación que integren el trabajo efectivo del maestro en formación dentro del aula escolar y que se conviertan para ellos en un medio antagonista (Margolinas et al., 2002). En este sentido, se podría cuestionar ampliamente la organización actual del *practicum* en la formación inicial de los maestros en España así como la concepción «pedagogista» del profesor reflexivo, lo que sin duda excede del propósito de este trabajo.

Este trabajo manifiesta, así mismo, cómo procesos de modelización sobre sistemas de variación complejos pueden vivir en la escuela infantil para que los alumnos de este nivel educativo construyan los primeros conocimientos numéricos. Muestra, además, que los procesos de modelización matemática, desde los primeros niveles escolares, se pueden construir como un proceso de integración y ampliación de praxeologías de complejidad creciente, y que es posible llevar a cabo procesos de estudio estructurados por pares (OM, OD) óptimos. Todo esto constituye, en sí mismo, una aportación significativa puesto que la literatura de investigación en educación matemática en torno a la modelización rara vez considera etapas educativas tan tempranas.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Artaud, M. (2007). La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 241-259). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 573-594). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (2007). Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques: Questions et perspectives. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 23-52). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 2-33). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropo-*

lógica de lo didáctico (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar*. *De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén.

García, F. J., Bosch, M., Gascón, J. & Ruiz Higueras, L. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *38* (3), 226-246.

García, F. J. & Ruiz Higueras, L. (2008). Exploring the use of theoretical frameworks for modelling-oriented instructional design. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2166-2175). Lyon, Francia: INRP. http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – analyse de l'activité du professeur. En J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^{e} école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 205-234.

Margolinas, C. & Wozniak, F. (2009). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur: Le cas d'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/review_ch13.doc

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, matemáticas y resolución de problemas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 677-704). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz Higueras, L. & García, F. J. (2007). Didáctica de las Matemáticas y Formación de Maestros. Respuestas y desafíos. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-213). Montpellier, Francia: IUFM.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la Course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*, 263-304.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M. L. (2002). A model for examining teachers' didactic action in mathematics, the case of the game "Race to 20". *Proceedings of the II Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 420-433). Mariánské Lázne, República Checa.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F. & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 153-181.

La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria

Alicia Ruiz Olarría
Universidad Autónoma de Madrid, España

Tomás Ángel Sierra
Universidad Complutense de Madrid, España

Abstract. The starting point of the research presented is the problematic nature of the mathematics to be taught when training teachers. An experiment carried out in the recently set up Master of Training Secondary School Teachers has enabled us to start measuring the kind of questions that arise in this respect as well as some of the restrictions that appear as difficulties in the development of the process.

Résumé. La recherche que nous présentons concerne la formation des professeurs et, plus particulièrement, la nature problématique des mathématiques à enseigner. Une expérimentation mise en œuvre avec les élèves professeurs dans le cadre du nouveau master de formation des maîtres du secondaire nous a permis de commencer à dégager à la fois les types de questions qui émergent à ce sujet et quelques-unes des contraintes qui limitent le développement de ce processus.

Resumen. La investigación que presentamos toma como punto de partida de la formación del profesorado el carácter problemático de las matemáticas a enseñar. Una experimentación llevada a cabo en el recién implantado máster de formación del profesorado de secundaria nos ha permitido empezar a calibrar el tipo de cuestiones que emergen al respecto y algunas de las restricciones que se alzan como dificultades en el desarrollo del proceso.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 465-483)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. El oficio de profesor de matemáticas

En esta comunicación presentamos el inicio de un trabajo de investigación sobre la formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria que se inscribe en la línea de investigación abierta por la tesis de Gisèle Cirade (2006) (Chevallard, 2005a; Chevallard & Cirade, 2006, 2009). Partimos así del principio según el cual el *oficio* de profesor no constituye todavía una verdadera *profesión* sino que tiene muchos rasgos de lo que el sociólogo estadounidense Amitai Etzioni (1969) denominó una «semiprofesión», entre los que podemos destacar, en primer lugar, el requerir una formación inicial muy breve y «práctica», con poco énfasis en el componente «teórico» y, en segundo lugar, el de desarrollarse bajo una supervisión más administrativa que profesional o científica.

A modo de ejemplo, podemos citar un episodio ocurrido recientemente, en un encuentro organizado por el Comité Español de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, centrado en analizar el papel de las prácticas en los actuales másters universitarios en Profesor de ESO y Bachillerato. Durante el encuentro, el profesor Tomás Recio, de la Universidad de Cantabria, planteó una pregunta provocativa que no tuvo respuesta por parte de los asistentes: «¿Es seguro que los futuros profesores de matemáticas necesiten una formación profesional específica para poder realizar el oficio de profesor? ¿Qué argumentos pueden darse a favor de la necesidad de dicha formación?» Es evidente que el mero hecho de poder plantear esta cuestión es, en sí mismo, una prueba de la débil existencia de un cuerpo profesional reconocido socialmente que englobe a los docentes de matemáticas de secundaria. Es muy probable que esta misma cuestión se haya planteado históricamente en el momento que un oficio se ha empezado a desarrollar y ha requerido de una formación profesional específica, sólida y emancipadora, como sería el caso de otras otrora «semiprofesiones» de enfermería, psicología, sociología, periodismo, etc.

En este contexto social, se postula desde la TAD que la profesión de profesor de matemáticas, como *profesión en construcción***,** debe dotarse de recursos propios de naturaleza didáctico-matemática, que constituyan la *infraestructura* necesaria para afrontar las dificultades, problemas y retos que surgen continuamente en el ejercicio de la docencia y que, por su complejidad, no puede —ni debe— abordar el o la docente en solitario. Para ello es necesario que el problema de la formación del profesorado se plantee como un aspecto de uno de los «grandes problemas» de la didáctica: el de los vínculos entre el *desarrollo de la ciencia didáctica*, el *desarrollo del sistema de enseñanza* y la *formación* de sus agentes. Es por esto que las deficiencias del sistema de enseñanza no deben ser achacadas únicamente a la responsabilidad del profesor como individuo ni, tampoco, a su nivel de formación.

2. La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria

Puesto que la TAD es uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes, la formación del profesorado aparece como una de las partes que lo constituyen. En consecuencia, esta debe analizarse en relación a todo el proceso, de manera sistémica, sin olvidar ninguna de las instituciones que intervienen en el mismo.

Para situar el problema general de la formación del profesorado de educación secundaria en esta perspectiva, tomaremos como punto de partida la hipótesis de la TAD según la cual toda actividad humana puede describirse en términos de praxeologías. Siguiendo el trabajo de G. Cirade (2006), podemos distinguir al menos tres tipos de praxeologías docentes directamente relacionadas con la formación del profesorado de matemáticas: las praxeologías matemáticas *a enseñar* (conocimientos matemáticos que hay que enseñar), las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* (conocimientos matemáticos necesarios para enseñar, que no pueden reducirse a las praxeologías *a enseñar*) y las praxeologías *didácticas* (necesarias para concebir, gestionar, analizar y evaluar la manera de realizar dicha enseñana). Entre las praxeologías necesarias para la enseñanza de las matemáticas se encuentran múltiples organizaciones matemáticas (es decir, tipos de tareas matemáticas, técnicas y discursos tecnológico-teóricos) institucionalmente *nuevos*, esto es, ausentes tanto de la enseñanza secundaria como de la universitaria en la que los futuros profesores han recibido su formación matemática previa.

Estas praxeologías contienen, aunque exceden ampliamente, el conjunto de saberes matemáticos que se tienen que enseñar, pero no son reducibles a aquellas organizaciones matemáticas «sabias» que aprenden los futuros profesores en la facultad. El trabajo de G. Cirade (2006) muestra la enorme *problematicidad* que encierran las matemáticas que se enseñan en la educación secundaria y cómo los recursos matemáticos que podrían permitir abordar esta problematicidad están todavía muy alejados de la cultura matemática tanto de los docentes como de un gran número de miembros de la comunidad matemática sabia.

Podemos entonces formular el problema general de la formación matemático-didáctica del profesorado en los términos siguientes:

> ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de tal o cual etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él?
>
> ¿Cómo se generan las cuestiones que están en el origen de las praxeologías matemáticas a enseñar y de las praxeologías matemáticas para la enseñanza?
>
> ¿Cuáles son los problemas que constituyen la razón de ser de las praxeologías didácticas que forman parte del necesario equipamiento praxeológico del profesor?

El trabajo de investigación que presentamos aquí toma como *punto de partida de la formación* el carácter problemático de las matemáticas *a enseñar.* Se propone entonces basar el proceso de formación del profesorado en el conjunto de cuestiones que explicitan este carácter problemático y permiten responder a las mismas mediante la construcción de *praxeologías matemáticas para la enseñanza*. Esta delimitación inicial en torno a las praxeologías matemáticas para la enseñanza no impedirá que tratemos cuestiones relativas a las *praxeologías matemáticas a enseñar* que constituyen una parte de las praxeologías matemáticas para la enseñanza. Es en este punto donde reaparece el problema del currículum de Secundaria. Tampoco nos evitará abordar problemas relacionadas con el *diseño* y puesta en marcha de las *praxeologías didácticas* que se requieren para llevar a cabo efectivamente la enseñanza en Secundaria.

Ni podremos evitar el problema fundamental de la elaboración, difusión, desarrollo y validación de estas praxeologías didácticas, ni el de las relaciones entre la *investigación* didáctica, la *formación del profesorado* y la propia *profesión docente*.

3. Objetivos, metodología y dificultades previstas del proyecto de investigación

Con el desarrollo y puesta en práctica de nuestra investigación pretendemos un doble objetivo. Por una parte, analizar en qué aspectos las matemáticas son problemáticas para el futuro docente y/o para el profesor en activo y poner de manifiesto que el origen de dicha problematicidad está en la ausencia (en todas las instituciones actuales de formación) de *infraestructuras matemáticas* necesarias para el desempeño de la profesión docente. Por otra parte, nos proponemos estudiar posibles maneras de responder a estas necesidades en el ámbito de la formación inicial y continua del profesorado, mediante la producción y difusión de «herramientas matemáticas de uso didáctico», dentro de lo que G. Cirade (2006) denomina «elaboraciones transpositivas intermedias».

Para llevar a cabo la investigación que aquí presentamos, se realizará una síntesis de las aportaciones previas al problema abordado (en particular el trabajo de G. Cirade (2006)) y una evaluación y descripción precisa de los avances realizados y de los problemas abiertos. Se detallarán las dificultades de origen matemático que plantean los profesores mediante una experimentación sistemática del dispositivo de las «preguntas de la semana» introducido por Yves Chevallard en el ámbito de la formación del profesorado (Chevallard, 2005a, 2007; Cirade, 2006; Bosch & Gascón, 2010). En nuestro caso, tomaremos como base empírica algunas de las instituciones en las que se impartirá el máster universitario en «Profesor de ESO y Bachillerato» y en las que participan investigadores en didáctica que trabajan en el ámbito de la TAD.

Durante el proceso de formación, se propone estudiar con el grupo de alumnos-profesores algunos de los *tipos de cuestiones* que pueden aparecer durante un trabajo cooperativo de *elaboración inicial* de «praxeologías matemáticas para la enseñanza». Debido a la novedad y complejidad de la tarea, prevemos experimentar, modificar y completar progresivamente dichas praxeologías en sucesivos cursos de formación inicial del profesorado, en el ámbito institucional del máster citado.

Entre las dificultades que hemos previsto que se nos pueden presentar, podemos mencionar las siguientes. En primer lugar, aparece el problema de cómo encajar el dispositivo de las «preguntas de la semana» en el proceso de formación actual que se establece a través de un máster con pautas pedagógicas y matemáticas muy marcadas. Prevemos que la dificultad se acrecentará enormemente si pretendemos que dicho dispositivo se generalice más allá de las situaciones de experimentación. En segundo lugar, surge la dificultad de organizar una formación basada en el estudio conjunto de estas cuestiones, mediante «recorridos de estudio e investigación» con un carácter abierto y donde el profesor actúa de director de estudio. Aparte de la tesis doctoral de Tomás Sierra (2006) y los materiales de formación del IUFM de Aix-Marsella, es muy poca la experiencia en este ámbito. Finalmente, aparece el problema de la *infraestructura matemática* a elaborar y su relación con los «modelos epistemológicos de referencia» (en adelante, MER). En efecto, estos MER no están siempre disponibles, suponen a veces un verdadero trabajo de creación matemática y plantean además un problema de legitimidad en la medida en que son elaborados por una institución poco dominante como es la investigación en didáctica de las matemáticas. La recepción por parte de los profesores de las producciones obtenidas en este ámbito de investigación es un verdadero problema que no se podrá obviar. Y, sobre todo, una de las mayores dificultades que encontraremos en nuestra investigación, en el momento que pretendamos que incida sobre la forma y el contenido de la formación del profesorado, tiene relación con lo que Y. Chevallard (2011) denomina el «silencio de la infraestructura»:

> […] je soulignerai surtout qu'il existe une forte propension, chez les personnes et dans les institutions, *à «oublier» l'infrastructure comme problème*, tout en l'exploitant de façon routinière comme moyen. Ce qui domine en ce cas est ce qu'on peut appeler le « silence de l'infrastructure ».
>
> De même qu'on a pu dire (à peu près) que la santé du corps, c'est le silence des organes (René Leriche), de même on peut dire que la santé

praxéologique d'une personne ou d'une institution, c'est (d'abord) le silence de l'infrastructure: la santé, c'est quand l'infrastructure se fait oublier […].

4. Una primera experimentación en el máster de la Universidad Complutense de Madrid

En el curso 2009-2010, la Universidad Complutense de Madrid ha iniciado la formación del profesorado de secundaria con un máster que ha sustituido a los cursos de formación del antiguo «Certificado de aptitud pedagógica». La especialidad de Matemáticas se compone de un módulo genérico de 12 créditos, un módulo específico de 30 créditos organizado en cuatro asignaturas y un módulo práctico de 18 créditos. Dentro de esta especialidad, la asignatura «Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas» del módulo específico se estructura en los cinco bloques siguientes:

Fundamentos de didáctica de las matemáticas,
Didáctica de los números decimales y de la medida de magnitudes,
Didáctica de la aritmética, el álgebra y la geometría,
Didáctica de la trigonometría y el análisis,
Didáctica de la probabilidad y estadística.

Aprovechando que uno de los autores de esta comunicación es profesor del bloque de «Didáctica de la aritmética, el álgebra y la geometría», hemos puesto en marcha una primera experimentación durante el mes de noviembre de 2009. Para ello, hemos propuesto un programa de formación matemático-didáctica para profesores en términos de «cuestiones a estudiar». Uno de los objetivos del curso se ha orientado a la elaboración dentro de la comunidad de estudio, de la que el profesor también forma parte, de respuestas a algunas de estas cuestiones que pueden considerarse como «cruciales» o «umbilicales» de la problemática matemático-didáctica del profesorado. No hay que olvidar que las respuestas serán parciales y las propias cuestiones umbilicales también deben ser *construidas* puesto que solo parcialmente están dadas de antemano.

Esta estructura responde a la convicción de que cualquier proceso de formación toma sentido a partir del estudio de un conjunto de *cuestiones problemáticas* a las que se necesita que los estudiantes (en este caso, profesores en formación) puedan dar respuesta. Postulamos que la dialéctica entre el planteamiento de *cuestiones problemáticas* y la *construcción de respuestas* constituye el fundamento de todo proceso de formación, aun en el caso en que los estudiantes, personalmente, no tengan la intención explícita de responder a dichas cuestiones e, incluso, cuando la institución responsable de la formación haya llegado a «olvidarlas».

Desafortunadamente, esta dialéctica está en gran medida ausente en la enseñanza escolar de las disciplinas tradicionales y, en particular, en la enseñanza de las matemáticas. Y. Chevallard (2005b) ha analizado el fenómeno del *olvido escolar de las cuestiones* y la consiguiente *veneración de las respuestas* que conlleva la presentación de obras inmotivadas como si se tratase de «monumentos» históricos sin ningún otro sentido ni función. En contraposición a ese *monumentalismo* imperante, hemos basado la formación matemático-didáctica del profesorado en el estudio de las cuestiones problemáticas que surgen no tanto como necesidades *personales* de los futuros profesores, sino como necesidades que, por ser inherentes al sistema de enseñanza, son propias de la *profesión de profesor de matemáticas*.

4.1. Organización del proceso de formación matemático-didáctica para profesores

Durante el curso, se pretende que los alumnos estudien dos organizaciones matemático-didácticas (en adelante OMD) que deberían surgir como respuestas a sendas cuestiones generatrices. Esto es, para cada OMD, se partiría de diversas cuestiones iniciales que constituyen la razón de ser de dicha OMD y a las que los alumnos en formación tendrían que buscar respuestas. Asimismo, deberían diseñar una «Actividad de estudio y de investigación» (en adelante, AEI) para poder ser desarrollada en un aula de Secundaria. Dicha AEI se generará a partir de una problemática inicial o *cuestión generatriz* que constituirá su razón de ser. Finalmente, los alumnos tendrán que realizar una *memoria* relativa a cada una de las OMD surgidas de las respectivas cuestiones generatrices.

Al principio del curso los 36 estudiantes se ordenaron en siete grupos de trabajo de modo que cada uno de los grupos se responsabilizaba de realizar las tareas arriba señaladas además de la de formular, cada semana, una pregunta relativa a cualquiera de los temas del curso.

Dichas preguntas ha sido recogidas cada semana, tratadas y comentadas en clase con el fin de hacerlas más comprensibles y de buscar elementos de respuesta (ver anexo).

Las dos cuestiones iniciales que se plantearon fueron las siguientes:

> **Q_{P1}** ¿Cómo se realiza el paso de la aritmética al álgebra en la ESO? ¿Qué papel pueden jugar los «programas de cálculo aritmético», esto es, la tematización de las cadenas de operaciones aritméticas que se realizan habitualmente (por ejemplo para calcular un área o un porcentaje) pero que no se toman nunca como objetos de estudio en sí mismos? ¿Cómo pueden relacionarse los «problemas aritméticos» resolubles mediante una cadena de operaciones aritméticas (esto es, mediante un programa de cálculo aritmético) y los «problemas de planteo algebraico» (o *word problems*)? ¿Qué papel puede jugar el clásico «patrón de análisis-síntesis» como técnica de resolución de los problemas aritméticos?

> **Q_{P2}** ¿Cómo determinar y construir figuras geométricas y cómo influye el cambio de forma, tamaño y posición? ¿Qué lugar debe ocupar la problemática de la determinación y construcción de figuras geométricas? ¿Qué se supone que es una «figura geométrica» en la Enseñanza secundaria? ¿Por qué no se estudian nunca los cambios de forma de las figuras? ¿Cómo podríamos estudiar los cambios de posición y tamaño de las figuras sin olvidar los cambios de forma? ¿Qué alternativas pueden proponerse a las clasificaciones escolares tradicionales de los cuadriláteros convexos?

Para que los alumnos busquen respuestas, el profesor les proporciona referencias donde pueden encontrar elementos para su elaboración. Aquí surge la cuestión de cómo y con qué criterios elaborar estas referencias, cuestión que no abordaremos en este artículo. Se espera que los alumnos, fuera del horario lectivo, y trabajando individualmente o en grupo, empiecen a buscar respuestas o elementos de respuesta a las cuestiones Q_{Pi} antes de su discusión en clase. Las «respuestas» se pueden encontrar en cualquiera de los «media» que la cultura pone a disposición de los alumnos (artículos, libros, sitios de Internet, conferencias, etc.) y que no siempre responden exactamente a $Q_{P,}$ por lo que los alumnos, trabajando en grupo, han tenido que adaptarlas adecuadamente. En la segunda sesión y dentro de cada grupo se discuten los resultados alcanzados para, así, poder ofrecer al resto de la comunidad de estudio una propuesta integrada. En la tercera sesión y bajo la coordinación del profesor, es el momento de empezar el diseño de una AEI para poder ser implementada en el aula con los alumnos de Secundaria. En la cuarta sesión en cada grupo se redacta el texto, definitivo por el momento, con las respuestas elaboradas, que se pondrán en común con el fin de provocar un debate y tratar de consensuar una respuesta del gran grupo a la cuestión generatriz Q_{P1}. El profesor ha moderado los debates y, como miembro de la comunidad de estudio, ha aportado también sus respuestas. Esta cuarta sesión se finaliza con la «pregunta de la semana», a cargo de cada grupo. Al inicio de la primera sesión de la semana siguiente, el profesor empleará un tiempo en tratar de dar las respuestas.

4.2. Estructura y dinámica de las sesiones presenciales

El desarrollo del curso a lo largo de las cuatro semanas, en sesiones de una hora y media, ha sido el siguiente:

Sesión 1: Presentación del curso y de la cuestión generatriz Q_{P1}. Entrega de materiales asociados a Q_{P1}.

Sesiones 2 y 3: Trabajo en grupos sobre Q_{P1} y sobre el diseño de la AEI, coordinados por el profesor.

Sesión 4: Primera puesta en común de posibles respuestas a Q_{P1} con aportaciones del profesor. Recogida de las preguntas de la semana de cada grupo (PSG) por escrito.

Sesiones 5 y 6: El profesor presenta algunos elementos de respuesta a Q_{P1}. Trabajo en grupos sobre Q_{P1} y sobre el diseño de la AEI, coordinados por el profesor

Sesión 6: Elaboración conjunta de una respuesta propia a Q_{P1}. Recogida de las PSG.

Sesión 7: El profesor presenta algunos elementos de respuesta a las preguntas de la semana y presenta la cuestión generatriz Q_{P2}. También entrega materiales asociados a Q_{P2}.

Sesiones 8 y 9: Trabajo en grupos sobre Q_{P2} y sobre el diseño de la AEI, coordinados por el profesor.

Sesión 10: Primera puesta en común de posibles respuestas a Q_{P2} con aportaciones del profesor y recogida de las PSG.

Sesión 11: El profesor presenta algunos elementos de respuesta a las preguntas de la semana y plantea nuevas cuestiones que ayudan a resolver Q_{P2}.

Sesiones 12 y 13: Trabajo en grupos sobre Q_{P2} y sobre el diseño de la AEI, coordinados por el profesor.

Sesión 14: Elaboración conjunta de una respuesta propia a Q_{P1}. Recogida de las PSG.

Sesión 15: El profesor presenta algunos elementos de respuesta a las preguntas de la semana y cierra el tema asociado a la Q_{P2}. Cierre del curso.

4.3. Dispositivos de evaluación

La evaluación se ha llevado a cabo del siguiente modo:

a) Asistencia al curso de modo habitual (no menos de un 85% del total de clases): 15%

b) Memoria del grupo por escrito, donde presentarán una síntesis de las respuestas elaboradas por la comunidad de estudio a las cuestiones Q_P planteadas: 50%

c) las preguntas de la semana dan lugar a una calificación global del grupo en función de la calidad y la pertinencia de las preguntas formuladas. La calidad, la riqueza y la relevancia de las cuestiones formuladas por cada grupo de estudiantes es un indicador de la calidad del aprendizaje del grupo: 10%

d) Prueba escrita que los estudiantes deberán realizar individualmente respondiendo a cuestiones que hagan referencia a la problemática estudiada a lo largo del curso: 25%

En el momento de presentar esta comunicación, todavía no disponemos de elementos suficientes para el análisis del desarrollo del curso.

5. Algunas conclusiones sobre la puesta en práctica de una formación de profesores

En la experiencia realizada se han propuesto varios dispositivos de formación del profesorado que se han desarrollado a partir de un proceso de estudio generado por varias cuestiones «umbilicales» para la formación de profesorado de Secundaria. Hemos partido del postulado que toda formación debe organizarse en torno al estudio de un conjunto de cuestiones problemáticas (que constituyen el corazón del proceso de estudio) y de la consiguiente dialéctica entre cuestiones y respuestas tentativas. Para llevar a cabo dichos dispositivos didácticos como los de la búsqueda de elementos de respuesta a las Q_{P1} y Q_{P2} y a las preguntas de la semana, los estudiantes no han dispuesto de un tiempo suficiente previsto en el curso para el trabajo en pequeños grupos. Ello ha originado que la mayor parte de las veces las posibles respuestas hayan sido aportadas por el profesor. Del mismo modo, debido a esta falta de infraestructura de trabajo en pequeños grupos, ha sido a menudo el mismo profesor quien ha debido proporcionar a los estudiantes una posible AEI, ya construida, para su análisis. El breve tiempo dedicado al trabajo en grupo ha sido dedicado fundamentalmente al análisis de las organizaciones didácticas de los textos escolares o de las elaboradas por la investigación didáctica.

Hemos realizado una encuesta a los estudiantes, una vez terminado el período lectivo del bloque de «Didáctica de la aritmética, el álgebra y la geometría», para valorar la calidad de la formación. En resumen, podemos decir que la mitad de los estudiantes han resaltado como positivo el haber tenido la posibilidad para trabajar en equipo y del mismo modo un 50% han señalado que es necesario adecuar el temario al tiempo para desarrollarlo y respetar las horas para el trabajo de los alumnos. En cuanto al dispositivo de las preguntas de la semana, los estudiantes lo han considerado positivo pero han echado en falta el tiempo necesario para construir una respuesta colectiva. Por lo tanto creemos que será necesario en el futuro tener más en cuenta la infraestructura necesaria para un desarrollo adecuado del trabajo que los estudiantes deben realizar tanto individualmente como en grupo.

En definitiva, la formación del profesor de Secundaria desvela una problemática docente que requiere de manera imperiosa no solo importantes esfuerzos de investigación en didáctica de las matemáticas, sino también que la propia *profesión* de profesor de Secundaria la tome en consideración y contribuya a hacerla evolucionar.

Para acabar, aunque en esta experimentación no hemos abordado explícitamente la importante problemática del papel que deberían jugar las *prácticas docentes* en la citada formación, propugnamos que estas deben constituir, en cierta forma, un ámbito privilegiado de la formación puesto que es en dicho ámbito en el que tomarán cuerpo las cuestiones docentes y en el que el profesor en formación debe ensayar las respuestas tentativas. Nuestra propuesta pretende superar la concepción «aplicacionista» de las prácticas (según la cual los profesores aprenderían en la clase de «teoría» y «aplicarían» sus conocimientos en las prácticas) fundamentando toda la formación en la dialéctica entre cuestiones (que surgen esencialmente en relación a la práctica docente) y elementos de respuesta que los profesores han de poder construir con las herramientas que se les proporciona (Gascón 2001).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En M. J. González & J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Chevallard, Y. (2005a). Didactique et formation des enseignants. En B. David (Ed.), *Impulsions 4* (pp. 215-231). Lyon, Francia: INRP. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=63

Chevallard, Y. (2005b). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). París: APMEP & Animath.

Chevallard, Y. (2007). *Journal du séminaire de formation de formateurs 2006-2007*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=92

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En C. Margolinas et al. (Coord.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. XV^{e} École d'été de didactique des mathématiques (pp. 81-198). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. En C.-M. Chiocca & I. Laurençot (Eds.), *De l'intégration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants*. Toulouse, Francia: ENFA & IUFM Midi-Pyrénées.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université : éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation*, *60*, 51-62.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). Université de Provence, Francia. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Etzioni, A. (1969). *The semi-professions and their organization: teachers, nurses, social workers*. Nueva York: Free Press.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Relime, 4*(2), 129-159.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas.* Madrid: Colección digital de tesis de la Universidad Complutense de Madrid. http://www.ucm.es/BUCM/2009.htm

ANEXO: Preguntas de la semana (2-8 de noviembre de 2009)

Semana 1 (2-8 de noviembre de 2009)

Grupo A. ¿Existe algún método parecido al de Al-Khwarizmi para resolver ecuaciones de segundo grado cuando el término independiente es negativo (es decir, $x^2 + ax = -b$ con b entero positivo)?

Grupo B. ¿Con qué obstáculos epistemológicos pueden encontrarse los alumnos de secundaria en el aprendizaje del álgebra?

Grupo C. ¿Cómo elaborar un entorno tecnológico-teórico para la justificación de una técnica general para las ecuaciones de grado mayor que 3? ¿Todo problema algebraico es resoluble aritméticamente?

Grupo D. Parece que el álgebra se presenta como una herramienta que viene a sustituir a la aritmética. A los estudiantes se les obliga a usar el álgebra, como si la aritmética ya no «valiera para nada», mientras que los problemas que se plantean se pueden resolver perfectamente en la mayoría de los casos aritméticamente. ¿Por qué tiene que desterrar el álgebra a la aritmética? ¿Podría enseñarse el álgebra de forma que conviva y/o se complemente con la aritmética?

Grupo E. En el aula, a menudo se identifica el álgebra con una serie de propiedades que cumplen las expresiones y ecuaciones algebraicas. Es posible por tanto, que un alumno pueda realizar perfectamente los ejercicios de evaluación que se le plantean (puesto que conoce las propiedades y las aplica correctamente), y sin embargo no saber en realidad lo que está haciendo. ¿Cómo poder comprobar que el aprendizaje está siendo significativo?

Grupo F. Teniendo en cuenta la necesidad de abstraerse intrínseca en el álgebra, nuestra pregunta viene relacionada con este proceso: ¿cuál sería el proceso más conveniente para enseñar a los alumnos a abstraerse? ¿Cuáles son los obstáculos que se encuentran los alumnos en este proceso? ¿Cuál es el entorno tecnológico-teórico que se genera en este proceso?

Grupo G. En las distintas clases que hemos recibido, se plantea como nefasto el método de la clase magistral (cosa con la que estoy de acuerdo). En contraposición, se postula el método del descubrimiento para presentar los distintos saberes, el problema que yo veo es que cuando un conocimiento es simple, es «fácil» buscar situaciones adecuadas, pero ¿cuál es el juego adecuado para introducir la lista de derivadas, por ejemplo, existe una edad a la que todo esto deje de funcionar bien por el desarrollo mental del alumno u otras causas? ¿Qué parámetros deben manejarse a la hora de dar una clase de una forma u otra, edad de los alumnos, gusto por la materia, quizás aspectos sociales? ¿No sería mejor buscar un término medio entre ambos métodos?

Semana 2 (9-15 de noviembre de 2009)

Grupo A. ¿Qué tipo de aplicaciones informáticas pueden ser buenas en la enseñanza del álgebra y/o la aritmética?

Grupo B. Durante las últimas clases se ha planteado el problema de cómo acercar a los chavales al álgebra de una forma más natural y necesaria. Aparte del problema planteado en clase, donde se veía la necesidad de las letras, ¿existe una colección de problemas que se hayan estudiado que son útiles para introducir el álgebra de una forma necesaria y significativa? Si no les propusiéramos nosotros los problemas, ¿existiría alguna situación en la que los alumnos pudiesen descubrir el álgebra o su necesidad por ellos mismos?

Grupo C. ¿A qué nivel (en cuanto a importancia) influyen los obstáculos de la enseñanza aritmética sobre la enseñanza algebraica? ¿Qué similitudes pedagógicas presentan la enseñanza del álgebra con la enseñanza de la aritmética?

Grupo D. En nuestro grupo hemos estado reflexionando sobre el aprendizaje significativo y, retornando al pasado, hemos caído en la cuenta de que en ocasiones no interiorizábamos los contenidos instantáneamente y necesitábamos semanas, meses e incluso años para llegar a comprenderlo al completo. ¿En qué temas de matemáticas no se puede dar un aprendizaje significativo instantáneo? ¿Tiene esto que ver con la recomendación de introducir el álgebra en 2º de ESO? ¿Existe algún estudio que confirme la existencia de dichas dificultades?

Grupo E. En algunas de las asignaturas se nos anima a utilizar el origen histórico de los contenidos (cómo surgieron) para contextualizarlos y así introducirlos de manera más sencilla en el aula. En el caso del álgebra, ¿sería esta una buena manera de introducir el tema? ¿Conocer la historia del origen del álgebra les ayudaría a comprenderla mejor? ¿Qué aspectos concretos del origen del álgebra podrían resultar motivadores para los alumnos?

Grupo F. ¿Cómo se puede fomentar que el alumno plantee él mismo un problema del cual se pueda extraer una técnica algebraica?

Grupo G. ¿Qué obstáculos epistemológicos supone la regla de tres al introducir otros conceptos matemáticos como el área o el volumen?

Semana 3 (16-22 de noviembre de 2009)

Grupo A. Al algebrizar los ejercicios, nos hemos dado cuenta de que lo que ocurre es que se complican los enunciados y la forma de resolverlos. ¿Esto no puede causar mayores dificultades a los alumnos a la hora de enfrentarse a los problemas? ¿No puede causarles bloqueos el hecho de que solo puedan enfrentarse de una única forma a un problema?

Grupo B. ¿Qué métodos de enseñanza del álgebra (y su relación con la aritmética) se realizan en los países de nuestro entorno? ¿Es similar al español? El motivo de investigación de estos nuevos métodos, ¿se debe de alguna manera al nivel de fracaso escolar? Si son usadas por otros países y con anterioridad, ¿se tiene información acerca de su éxito?

Grupo C. ¿Los obstáculos que genera el aprendizaje de la aritmética, a la hora de aprender álgebra, se incrementan o se reducen en función de la edad de los alumnos? ¿Se superarían con mayor facilidad si lo enseñamos antes o después en el currículum escolar? ¿O incluso si le dedicamos mucho más tiempo a lo largo de un curso concreto, por muy pronto que sea?

Grupo D. En la realización de los ejercicios de magia con números, en nuestro grupo surgieron distintas opiniones. Algunos de nosotros pensábamos que el alumno, en algún momento, introduciría un símbolo para representar a todos los números, mientras que otros creíamos que nunca lo haría. ¿Realmente se le ocurre a un niño introducir una letra que represente a todos los números? ¿Cómo actuamos en caso de que no ocurra esto? ¿Cómo le conducimos a ello sin decírselo literalmente?

Grupo E. Estudiamos el álgebra como instrumento de modelización, como método para introducirla en los primeros cursos de secundaria. Pero ¿se trata de un planteamiento válido para desarrollar el álgebra en su totalidad o en algún momento debe darse un salto cualitativo para poder seguir avanzando en esta parte de las matemáticas? Si resulta válido, parece que el grado de dificultad pasa a ser un problema de modelización más que de otro tipo; entonces, ¿cómo plantear una secuencia vertical a lo largo de los 4 cursos de secundaria? ¿Consistiría en aumentar progresivamente la dificultad de los sistemas a modelizar?

Grupo F. ¿Cómo se ha llegado al modelo de los programas de cálculo aritméticos? Nos gustaría entender la evolución que se ha producido hasta llegar a este modelo, qué tipo de trabajos, estudios y métodos de investigación se han realizado. También, cuáles han sido los modelos o teorías precursoras y si se apoya o difiere mucho con otros modelos/teorías.

Grupo G. Nos ha sorprendido un comentario que aparece en el libro *Estudiar matemáticas* que dice que «para el estudio de una obra matemática concreta y un grupo de alumnos determinado, lo más habitual es que no se conozca ninguna situación que permita hacer avanzar de manera óptima a los alumnos en el estudio de la obra considerada, lo cual significaría que el problema didáctico planteado no tiene una solución conocida». Entonces, salvo algunas obras concretas, en la mayoría de las obras matemáticas de estudio el profesor no va a ser capaz de crear un «laboratorio» para que los alumnos puedan avanzar en el estudio de la obra. La pregunta es: ¿Está de acuerdo con estas afirmaciones? ¿Tan difícil es crear una situación adaptada a cada obra matemática de estudio?

Semana 4 (23-30 de noviembre de 2009)

Grupo A. Hay profesores que piensan que los alumnos no saben geometría porque todos los años se empieza el temario con el mismo orden: números naturales, enteros, divisibilidad, etc., y después no da tiempo para trabajar la geometría. ¿Sería una buena medida cambiar este orden y empezar algún año con geometría?

Grupo B. Sabemos que la distinción entre los campos «espacio» y «geometría» no está clara, y que es objeto de estudio clarificar las relaciones de ambos campos. ¿Qué dificultades encuentran los alumnos de ESO en las tareas relativas a la geometría y el espacio? ¿Qué relación existe entre los conocimientos necesarios para la resolución de problemas espaciales y geométricos?

Grupo C. Las matemáticas escolares son muy distintas de las «matemáticas reales». ¿No sería mejor intentar cambiar las matemáticas escolares, lo cual implicaría un cambio en la manera de enseñar? En base a esto: ¿A partir de qué edad podemos suponer que los alumnos tienen suficiente destreza manual como para utilizar la papiroflexia como técnica de aprendizaje de la geometría? Los objetivos de las matemáticas escolares son muy difíciles de conseguir con los métodos que plantea la didáctica de las matemáticas. ¿Quizás habría que cambiar los objetivos para poder enseñar los contenidos mejor y de manera más significativa?

Grupo D. Hemos visto que el trabajo con materiales y manualidades es muy útil en geometría. Pero, ¿no sería también muy necesario fomentar la capacidad de abstracción de los alumnos?

Grupo E. Hemos estado viendo en clase las ventajas de introducir los conceptos a través de buenas cuestiones. Coincidimos en que esta manera de introducir el álgebra es bastante positiva para el aprendizaje de los alumnos, pero nos surgen algunas dudas sobre su aplicación en el instituto. ¿Cuántos docentes hay que conozcan esta teoría? ¿Se está formando a los profesores sobre estos métodos? ¿Hay experiencias de clases que desarrollen la mayor parte de su currículo a través de este método? ¿Sería necesaria una mayor infraestructura o apoyo por parte de los centros para su aplicación?

Grupo F. ¿Cómo guiar al alumno para que al iniciar un proceso de modelización en el álgebra no se utilice la aritmética generalizada?

Les « mathématiques comme problème professionnel » Apprendre à distinguer plusieurs niveaux praxéologiques

Maggy Schneider
Université de Liège, Belgique

Abstract. "Mathematics as a professional problem" is an expression borrowed from Gisèle Cirade, that I try to specify in the framework of future secondary school teachers training. First of all, I try to do so by illustrating that the conceptual look often enters in competition with the praxeological approach, which occurs in the design of didactic transpositions as well as in their analysis. I then distinguish praxeologies of two types: "modelling" and "deduction", by supporting the hypothesis that praxeologies of the first type are not easily identifiable. Transpositions inspired by standard deductive mathematical organizations then act as a shield at a level of rationality which one may argue is adapted to secondary school students. Finally, I describe and examine a training system for student-teachers related to mathematical analysis.

Resumen. Se intenta especificar la expresión tomada de Gisèle Cirade «las matemáticas como problema profesional» en el marco de la formación inicial de futuros profesores de bachillerato. Se hará, en primer lugar, ilustrando la manera cómo el punto de vista conceptual rivaliza con el enfoque praxeológico tanto en la concepción de transposiciones didácticas como en su análisis. Se hará en segundo lugar distinguiendo las praxeologías de tipo «modelización» de las de tipo «deducción», planteando la hipótesis según la cual las praxeologías del primer tipo son difíciles de identificar. Las transposiciones inspiradas por las organizaciones matemáticas deductivas estándar tapan cierto nivel de racionalidad que se puede considerar adaptado a los alumnos de secundaria. Finalmente, se describe y estudia un dispositivo de formación de los alumnos profesores relacionado con el análisis.

Résumé. Je tente de spécifier l'expression « les mathématiques comme problème professionnel », empruntée à Gisèle Cirade, dans le cadre de la formation initiale des professeurs de lycée. Tout d'abord en illustrant la façon dont le regard conceptuel concurrence l'approche praxéologique dans la conception de transpositions didactiques comme dans leur analyse. Ensuite en distinguant praxéologies de type « modélisation » et praxéologies de type « déduction » et en étayant l'hypothèse selon laquelle les praxéologies du premier type sont difficilement identifiables. Les transpositions inspirées d'organisations mathématiques déductives standard font alors écran à un niveau de rationalité dont on peut argumenter qu'il est adapté aux élèves du secondaire. Enfin, je décris et étudie un dispositif de formation d'élèves professeurs lié au domaine mathématique qu'est l'analyse.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 485-505)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction : le cadrage d'un dispositif de formation

Le présent article s'inscrit dans une réflexion plus globale sur la formation initiale des élèves professeurs, en particulier ceux qui seront amenés à enseigner au niveau du Lycée. Cette réflexion s'appuie sur un dispositif que je mets à l'épreuve et affine progressivement depuis une dizaine d'années. Par le biais de celui-ci, je cherche à outiller les élèves professeurs de référents visant à les affranchir d'une réception de mon propre discours sur le mode normatif et à leur faire voir que les pratiques enseignantes dominantes sont des choix parmi d'autres possibles. L'important est ici de montrer que l'espace de liberté est plus grand qu'on ne le pense a priori, même s'il existe des « non-négociables » liés à ce que la recherche a montré des conditions minimales de fonctionnement de certaines approches didactiques. Souvent, comme cela peut être modélisé dans le cadre de la TAD, l'assujettissement des professeurs ou des futurs professeurs à l'institution scolaire se solde par un champ de conscience où seules les pratiques connues ont droit de cité, soit parce que le manque d'imagination empêche d'en concevoir d'autres, soit par référence à certaines contraintes qui sont, elles, purement imaginaires. J'essaie de le faire réaliser à mes étudiants en leur proposant d'analyser des PER relevant de transpositions didactiques assez « orthogonales » à celles qu'ils connaissent sur un sujet donné. Par « analyser », j'entends surtout caractériser et, en particulier, déceler les variables didactiques par rapport auxquelles cette nouvelle transposition tranche sur les autres.

Mais éviter toute forme de normativité ou d'adhésion obtenue par contrat suppose au minimum un partage de référents entre formés et formateur. En ce qui concerne l'enseignement que je dispense, ces référents sont de nature didactique et épistémologique. Du côté de la didactique, je considère que la TAD forme avec la TSD, dans une solidarité à la fois conceptuelle et méthodologique, un réseau de concepts susceptible d'éclairer et de questionner de manière systémique des phénomènes d'apprentissage et d'enseignement en tenant compte conjointement de registres aussi différents que la spécificité épistémologique des savoirs enseignés et les contraintes institutionnelles qui déterminent leurs modalités d'enseignement. En particulier, la modélisation de l'activité en termes de praxéologies fait voir la relativité institutionnelle liée au choix des types de tâches, des techniques et du discours qui justifie les secondes en regard des premières. Au-delà du vocabulaire et du formalisme associés à la TAD qui demeurent modestes dans mon cours (Schneider, 2008), je cherche surtout à « briser l'illusion de naturalité des choix didactiques », comme le dit Yves Chevallard, et à favoriser chez les élèves professeurs un questionnement systématique inspiré d'une telle posture.

Cet objectif suppose d'ouvrir l'inventaire des possibles, et c'est là que jouent les référents épistémologiques susceptibles d'aider les élèves professeurs à problématiser à nouveau frais les contenus mathématiques enseignés et à leur faire travailler « les mathématiques élémentaires d'un point de vue approfondi » pour reprendre une expression de Félix Klein (1939). Je rejoins là Gisèle Cirade (2006) pour qui les mathématiques sont un « problème professionnel » majeur en ce sens qu'elles sont prises en compte par les futurs professeurs pour décrire des activités pour les élèves sans que les enjeux épistémologiques soient souvent questionnés : « rien, ici, ne semble problématique. La description est celle d'un univers évident, transparent, qui va de soi » (G. Cirade, 2006).

L'articulation entre les aspects didactiques et les dimensions épistémologiques suppose au minimum de se situer au « bon » niveau praxéologique au sens décrit ci-après. C'est ce que je compte illustrer ici à propos de l'enseignement des fonctions en début de Lycée en considérant la notion de fonction dans un champ conceptuel plus vaste recouvrant les principaux concepts de l'analyse mathématique.

2. Quelques caractéristiques de l'enseignement du concept de fonction

Je partirai d'une étude effectuée par Michèle Artaud et Gisèle Cirade (2008) sur « L'enseignement et la réception de la notion de PER dans la formation des professeurs stagiaires de mathématiques ». Les auteures font l'observation suivante : les élèves professeurs éprouvent beaucoup de difficultés à concevoir des activités pour les élèves, telles que préconisées par les programmes scolaires. Ces « AER », souvent de petite taille, conduisent à des organisations mathématiques ponctuelles juxtaposées et donc non articulées les unes aux autres. La notion de PER, née

« au chevet de la formation », a alors pour principale raison d'être de fédérer plusieurs AER isolées et de donner lieu à une organisation mathématique plus conséquente et englobante, locale voire régionale.

Parmi les exemples donnés, M. Artaud et G. Cirade (2008) prennent celui du concept de fonction tel qu'il se doit d'être enseigné dans la classe de 2de en France. Ces auteures décrivent le travail d'une élève professeure de l'IUFM d'Aix-Marseille composé de trois parties : les types de tâches et les techniques de l'organisation mathématique régionale correspondant au secteur, les raisons d'être de l'organisation mathématique à étudier et une analyse de l'organisation mathématique relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège. Elles commentent ce travail en y pointant « une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles – dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider –, leur articulation n'étant pas manifeste ». Et proposent enfin une recomposition de l'organisation mathématique régionale dont les types de tâches sont articulés à partir des deux raisons d'être identifiées par l'élève-professeure : optimiser une grandeur et étudier un phénomène auxquelles sont subordonnées des sous-types de tâches liés à la résolution d'équations ou d'inéquations. Cet exemple montre « la nécessité d'avoir une armature articulée au moins sectorielle de l'organisation mathématique étudiée » (Artaud, 2007), analyse à laquelle je souscris entièrement, ainsi que je pense l'illustrer ci-dessous.

En ce qui concerne l'enseignement des fonctions, les difficultés éprouvées par les élèves professeurs en Belgique sont comparables et les programmes scolaires le sont aussi, bien que se différenciant des programmes français par l'un ou l'autre aspect. Une préparation-type proposée spontanément par les élèves professeurs ressemble à ce qui suit. Quelques activités sont proposées d'entrée de jeu aux élèves et des aspects liés à la modélisation n'en sont pas absents : on leur demande de tirer des renseignements sur la température en un lieu donné à partir d'un graphique décrivant son évolution au cours de la journée et aussi de représenter, dans un système d'axes, des rectangles isosuperficiels tout en exprimant la relation entre leurs bases et leurs hauteurs respectives.

S'ensuit une institutionnalisation qui est déconnectée des activités initiales et dont voici les éléments majeurs : « définition » d'une relation d'un ensemble A vers un ensemble B comme « loi » qui, à certains éléments de A, associe un ou plusieurs éléments de B ; représentation par diagramme sagittal ; introduction d'un vocabulaire : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, antécédents, images ; définition d'une fonction comme une relation satisfaisant à une condition d'unicité de l'image. Sans contenir à proprement parler la définition de relation comme triplet $(A, B, G \subset A \times B)$, cette partie du cours présente des éléments emblématiques de l'approche ensembliste typique des mathématiques modernes.

Cette leçon introduit un chapitre de généralités sur les fonctions dont on peut montrer qu'il est inspiré par la démarche principale, si ce n'est exclusive, vers laquelle est orientée l'étude des fonctions dans les pratiques enseignantes belges, soit les exercices dits de variations de fonctions. Il s'agit de déterminer l'allure graphique d'une fonction dont on connaît l'expression analytique en se basant sur une étude complète qui tient, suivant les endroits, en 9 ou 12 étapes : racines et signe, parité, limites et asymptotes, dérivées, tableau des variations, etc. Il semble même que ce soit une telle démarche qui motive, aux yeux de certains professeurs, tout le cursus d'analyse au niveau secondaire.

Définitions relatives aux fonctions : concept de fonction, domaine de définition, notations ensemblistes, racines, ordonnée à l'origine, parité, symétrie, croissance, décroissance sur un intervalle, extremums	L'objectif est de généraliser les caractéristiques décrites dans le cadre ci-dessus pour reconnaître si l'expression analytique ou le graphique donné est ou non une fonction, repérer sur base du graphique d'une fonction donnée, le domaine, les racines, l'ordonnée à l'origine, la parité, la croissance, les extremums

Tableau 1. Extrait du programme du FESeC (2000)

Dans ce chapitre de généralités sur les fonctions, cela se traduit par une suite de sections portant sur le domaine de définition, les symétries graphiques, les racines et le signe, etc., dans lesquelles des exercices font vivre des acquis antérieurs relatifs, par exemple, aux équations du second degré, et où, en l'absence de toute recherche de fonctionnalité, on hypertrophie l'extrait du programme ci-dessus (tableau 1) par des exercices où il s'agit de déterminer, en voyant le graphique d'une fonction, si c'en est bien une et d'y lire son domaine, ses racines, etc.

Pourtant, les programmes scolaires tentent de moduler une telle perspective en un sens anticipé par des travaux de professeurs comme ceux du groupe AHA (1999a, 1999b) en mettant davantage l'accent sur une approche plus globale des fonctions, non plus une à une mais par classes paramétrées, ainsi que sur la modélisation fonctionnelle à travers les « transformées graphiques » de fonctions de références, soit les images des graphiques de fonctions telles que $y = x^2$, $y = 1/x$, etc. par des transformations ou affinités parallèles aux axes du repère. Mais, indépendamment des intentions visées, ce cursus officiel se solde généralement, dans les manuels et dans les classes, par des pratiques ostensives à propos des transformées graphiques, pratiques qui se caractérisent souvent par l'absence d'un quelconque discours technologique et une polarisation excessive sur des exercices techniques dont toute modélisation est absente.

Bien sûr, les élèves-professeurs ont un sentiment de naturalité vis-à-vis de ces pratiques qu'il s'agit donc de leur apprendre à questionner ou, à tout le moins, à regarder avec un certain recul : c'est là l'enjeu du dispositif de formation dont il est question dans cet article.

3. Une vision praxéologique de l'enseignement des fonctions, pensé à deux niveaux

Avant de décrire ce dispositif, je présenterai ma vision de l'approche des fonctions, plus praxéologique que conceptuelle, en illustrant ce que j'entends par niveau praxéologique. Je me suis déjà expliquée sur ce que j'entends par là dans plusieurs publications (Schneider, 2007, 2008 et 2011) et je m'en suis servie comme outil d'analyse avec des étudiants en thèse (Job & Schneider, 2007 ; Lebeau & Schneider, 2010). En gros, ce sont des niveaux correspondant à des processus génériques d'organisations mathématiques et relevant de projets mathématiques distincts : d'une part, modéliser des objets préconstruits au sens de la TAD jusqu'à leur donner un statut mathématique et, d'autre part, agencer les concepts ainsi construits et leurs propriétés en une organisation déductive. Ces niveaux sont illustrés ci-dessous dans le cadre de l'analyse mathématique.

Mes travaux antérieurs sur les obstacles d'apprentissage liés au champ conceptuel de cette discipline (Schneider, 1988) m'incitent, non pas à me polariser sur des aspects conceptuels des fonctions et de leurs constituants comme domaine, image ou variables en jeu, mais bien à adopter le regard praxéologique de la TAD, dans toute sa dimension dynamique, en cherchant à mettre en évidence l'économie de pensée (Ernst Mach, 1925) que les fonctions ont pu apporter dans le traitement de questions intra ou extramathématiques. Et cela m'amène, à un premier stade d'étude des fonctions, à privilégier le point de vue de la modélisation fonctionnelle outillée e.a. d'ostensifs algébriques, telle que je l'ai développée ailleurs (Schneider, 2008 et 2011). En bref, il s'agit de regarder les fonctions, ou plutôt les modèles fonctionnels paramétrés, comme des ostensifs permettant une classification de problèmes divers se posant en mathématiques ou dans d'autres disciplines et leur traitement par des techniques fédératrices et conviviales : le calcul des limites, celui des dérivées ou des primitives. Ainsi, dans le contexte du calcul intégral, le volume d'un paraboloïde de révolution se ramène à l'aire d'un triangle car il mobilise une fonction du premier degré alors que l'aire du disque, celle d'un « segment » de parabole, le volume du cône et celui de la pyramide sont unifiés par un intégrande appartenant au même modèle polynomial du second degré. Sans aller jusqu'au calcul intégral, pensons que le problème de la chute libre d'un corps dans le champ de la pesanteur et celui des aires de rectangles isopérimétriques mobilisent tous deux une fonction du second degré également. Ces exemples montrent l'intérêt d'une classification algébrique où des problèmes a priori différents sont fédérés en catégories selon le type de fonctions qu'ils mobilisent. Cette classification relève du 3^{e} degré d'algébrisation tel que le définissent Pilar Bolea, Marianna Bosch et Josep Gascón (2001) : il s'agit d'unifier et de réduire à quelques catégories les problèmes, les techniques qui permettent de les résoudre et les discours technologiques associés.

Ce point de vue algébrique que je souligne met en évidence un aspect unificateur du concept de fonction qui n'est pas celui auquel les chercheurs font habituellement allusion. Et ce point va me permettre de rappeler ce que j'appelle niveau praxéologique. En effet, le caractère unificateur du concept de fonction tel qu'évoqué dans la plupart des recherches renvoie plutôt à la perspective d'une recherche de fondements des mathématiques tels que pensés au milieu du XX[e] siècle et qui a conduit à la définition générale d'une relation fonctionnelle en termes de triplets englobant aussi bien des transformations géométriques que les fonctions de l'analyse mathématique ou des opérateurs qui agissent sur ces fonctions. C'est souvent ce point de vue conceptuel qui est implicitement en ligne de mire dans l'enseignement secondaire et qui conduit à des insistances fort peu motivées à l'adresse des élèves, en particulier sur l'unicité de l'image d'un élément. Mon point de vue est différent : il concerne essentiellement le registre algébrique et s'étend à des expressions qui ne sont pas fonctionnelles. Ainsi, une équation du second degré en x, y représente l'ensemble des coniques dont il permet des classifications projective, affine et métrique, ainsi que des techniques générales de détermination de tangentes par exemple. L'aspect unificateur auquel je m'intéresse se situe donc bien en amont d'un projet de fondement des mathématiques, dans un autre projet qui est celui d'une algébrisation des phénomènes étudiés au moyen d'ostensifs, lesquels vont permettre l'émergence de techniques permettant de les traiter tous. C'est donc essentiellement un projet de modélisation et non celui d'une construction déductive.

Même si je restreins ici l'ensemble des fonctions étudiées à celles qui sont représentables par des expressions analytiques, en réduisant ainsi le concept de fonction, je cherche surtout à montrer que le regard praxéologique met en évidence la « dimension ostensive de l'activité mathématique » (Bosch & Chevallard, 1999) et l'instrumentalité que les ostensifs permettent en termes d'élaboration de techniques pour réaliser des tâches données. M. Bosch (1994) l'avait montré à propos de la proportionnalité. Mais, en ce qui concerne les recherches sur les fonctions, qu'elles soient anciennes ou récentes, peu adoptent ce point de vue pour privilégier des aspects conceptuels. Ainsi que je l'ai analysé dans Schneider (2011), la thèse de Rossana Falcade (2006) en est une illustration : elle part d'obstacles épistémologiques ou supposés tels par Anna Sierpinska (1992) pour construire une ingénierie mêlant « problèmes donnant du sens aux objets en jeu » et « activités socialement significatives » exploitant des outils de médiation sémiotiques tels que le logiciel Cabri Géomètre. Et je montre en quoi le point de vue praxéologique peut conduire à des propositions bien éloignées de celles de R. Falcade au départ de mêmes référents épistémologiques.

La modélisation fonctionnelle au sens décrit plus haut, s'articule, à ce niveau d'étude, avec celui qui consiste à modéliser des grandeurs physiques et géométriques par le biais du concept de limite : vitesses, tangentes, aires et volumes. À ce stade, ces grandeurs sont des objets préconstruits, au sens d'Y. Chevallard (1985, 1991), qui n'existent que par le truchement d'une désignation et non pas encore par celui d'une définition mathématique. La notion de limite apparaît sous une forme embryonnaire caractérisée par la suppression de termes sans jeu de compensations algébriques. Et ce calcul qui conduit aux techniques de dérivation et d'intégration se doit d'être justifié par un discours technologique ne pouvant encore s'apparenter à un discours théorique standard. Ainsi, on se basera sur des intuitions liées aux aires de surfaces emboîtées pour justifier qu'un calcul de limite peut donner la valeur exacte d'une aire curviligne. Et on crédibilisera les premiers calculs de dérivées, à l'instar de Fermat, en montrant qu'ils permettent de retrouver des résultats relatifs à des vitesses, tangentes ou optimisation de grandeurs déjà prouvés par une autre méthode.

Ces considérations permettent de spécifier un premier niveau praxéologique que j'appelle praxéologie « modélisation » en le considérant, comme je l'ai dit plus haut, à la fois en tant que processus qui modélise une facette de l'activité mathématique et comme produit de ce processus en termes d'OM construites. À ce premier niveau doivent s'articuler une praxéologie « modélisation fonctionnelle » telle que décrite précédemment et une praxéologie « grandeurs » que je viens de préciser.

À un second niveau praxéologique que je nomme « praxéologie déduction », le concept de limite est construit comme un outil de preuve permettant un système de validation logiquement cohérent et une organisation déductive globale de l'analyse. Ce projet correspond à la constitution de l'analyse proprement dite, comme discipline autonome, épurée donc de toute intuition géométrique ou cinématique. C'est la praxéologie « analyse moderne » dont les historiens s'accordent à attribuer la paternité à Cauchy parce qu'il a construit le concept de limite, ou du moins une version discursive de celui-ci, comme outil permettant un nouveau mode de validation, en lui donnant donc le rôle de « *proof-generated concept* » au sens d'Imre Lakatos (1984). Et les grandeurs géométriques ou physiques sont alors définies par le biais de ce concept, leur étude étant reléguée au niveau des applications.

4. Un parcours qui initie les élèves-professeurs au regard praxéologique

Je décris ici un dispositif de formation qui se situe en amont d'un travail de description praxéologique et dont l'objectif est de faire comprendre aux étudiants non seulement en quoi consiste un regard praxéologique mais aussi qu'il peut être situé à plusieurs niveaux d'étude. Il me semble en effet utile de remonter aux sources de la TAD pour que ces étudiants puissent s'approprier l'approche qu'on attend d'eux.

4.1. Un premier travail sur les limites

Le point d'entrée d'un tel dispositif concerne le concept de limite enseigné au niveau de la classe de 1re en France. En effet, mon intention est de situer une réflexion sur les fonctions dans un questionnement plus global lié à l'analyse mathématique et aux deux niveaux praxéologiques, « modélisation » et « déduction », qui permettent d'en spécifier deux niveaux d'étude. En outre, il me paraît important de faire apparaître, conformément à la perspective défendue plus haut, que l'étude des fonctions n'est pas un but en soi qui justifierait le calcul des limites ou des dérivées mais que, a contrario, on peut considérer les fonctions algébrisées comme les ostensifs qui donnent prise au calcul des dérivées, à celui des primitives ou au calcul des limites.

Le dispositif de formation intègre donc un travail sur le concept de limite, qui est repris en annexe, et c'est dans ce travail et donc indirectement, dans un premier temps, que sont abordées des questions de transposition relatives aux fonctions.

Je passe rapidement ici sur les questions 3, 4 et 5 de l'annexe dont les enjeux sont les suivants :

- Comprendre que, en analyse standard, on définit, non la limite d'une variable, mais bien celle d'une fonction ;

- Percevoir que, à propos des limites, le discours et plus particulièrement le discours didactique en langage vernaculaire, comporte des connotations cinématiques ou géométriques, celles-là mêmes que Bolzano voudra évacuer de l'analyse mathématique ;
- Réaliser que de telles références implicites n'ont pas empêché Cauchy d'être le fondateur du mode de validation standard en analyse, sur un mode discursif dans lequel n'apparaît aucune écriture symbolisée de quantificateurs.

Le concept de fonction est abordé là comme l'élément qui donnera prise au calcul de limite. Mais c'est surtout sur les questions 1 et 2 de l'annexe que je me polariserai en ce qu'elles provoquent un débat mettant au jour les diverses praxéologies dont il a été question plus haut. On peut en effet observer trois stratégies didactiques proposées par les élèves professeurs pour débuter l'étude des limites. Certains commencent par le cas de la limite d'une fonction en une abscisse appartenant à son domaine de continuité, telle la limite de $y = x^2$ en $x = 1$. Et poursuivent souvent par des cas de non-continuité, relatifs en particulier à des graphiques interrompus par des « trous ». D'autres étudiants prennent comme point de départ des cas d'asymptotes verticales ou horizontales. Et d'autres encore, quoique plus rares, commencent par des exemples relatifs au calcul des grandeurs, souvent un exemple de vitesse calculée par le biais d'une telle limite. Ces réactions, que j'ai pu observer sur des travaux d'étudiants travaillant dans un premier temps sans référence, reflètent une diversité qu'ils trouvent ensuite dans les programmes scolaires et dans les manuels. Voici trois de ces références. Les deux premières sont extraites des programmes édités par deux réseaux publics d'enseignement, lesquels interprètent différemment un même texte travaillé conjointement quelques années auparavant.

> Construction de suites arithmétiques et géométriques. Somme de termes, limites associées / Limite aux infinis de fonctions, asymptotes horizontales / Limite infinie en un point, asymptotes verticales, limite à gauche et à droite / Limite infinie aux infinis, y compris les asymptotes obliques / Limites en un point / Limites de fonctions trigonométriques de base. (FESeC, 2008)

> Construction de suites arithmétiques et géométriques. Somme de termes, limites associées / Limite en un point, finies et infinies / Limites en plus ou moins l'infini / Limite à gauche et limite à droite / Asymptotes / Limites de fonctions trigonométriques de base. (CFWBE, 2000)

On voit que ces deux programmes ne privilégient pas la même entrée, le premier proposant de commencer par le cas des asymptotes horizontales, dans la foulée de l'étude de suites numériques, le second induisant un démarrage par des limites finies en un point. Quant au texte suivant, c'est une table des matières extraite d'un cours de « mathématiques générales » (Stewart, 2001) et qui montre, à l'évidence, une autre réponse à la question « A quel(s) type(s) de questions répond le calcul des limites ? » :

> Un aperçu du calcul différentiel et intégral
> Le problème de l'aire
> Le problème de la tangente
> La vitesse
> La limite d'une suite (paradoxe de Zénon)
> La somme d'une série
> Les limites et dérivées
> Les problèmes de tangente et de vitesse
> La limite d'une fonction

On y traite effectivement de calcul de grandeurs avant d'aborder le thème de la limite d'une fonction dans un chapitre dont, en outre, l'objet est double puisqu'il s'agit d'y étudier autant les dérivées que les limites.

Ces divers médias jouent le rôle de milieu en ce sens qu'ils enclenchent un débat sur ce qu'est un « cas simple » de limite pour initier des élèves du secondaire au calcul de limites. D'autres informations sont fournies aux élèves professeurs, toujours dans une perspective d'apport de médias. D'abord sur l'histoire du calcul infinitésimal et de l'analyse, en particulier sur les problématiques à l'origine de cette discipline qui se retrouvent, hormis l'optimisation, dans les points d'entrée proposés par Stewart (2001). Ensuite, sur des travaux tels ceux du groupe AHA (1999a, 1999b) qui permettent d'illustrer des formes embryonnaires de la notion de limite et des modes de validation plus pragmatiques tels ceux que j'ai évoqués plus haut. Enfin, je témoigne de quelques expériences vécues lors de stages où j'ai vu des élèves s'étonner qu'on puisse « faire tant d'embarras » pour travailler la limite et en discourir dans le cas d'une abscisse où il est plus facile de calculer une image. Il s'agit là d'un parti pris de ma part, assez provoquant, mais qui me permet aussi de justifier un non-negociable de ma formation, puisque non-négociables il y a.

La question 2 conduit à un travail plus mathématique que je provoque par des sous-questions pour amener deux aspects. D'abord, dans le cas d'une fraction rationnelle, il existe une technique commode pour « justifier » une asymptote horizontale : cette technique repose sur une mise en évidence « étrange » (du terme du dénominateur ayant le plus haut degré) qui fait apparaître des termes que l'on va négliger. Il convient alors de faire voir que le travail fait sur cette « bonne forme » de la fonction s'appuie les théorèmes de l'algèbre des limites, comme des théorèmes en acte, et sur un axiome qui permet d'enclencher le calcul et qui relève de l'axiome d'Archimède (par exemple, la propriété selon laquelle $1/x$ possède une limite nulle en l'infini positif). Ensuite, la question de l'existence d'une asymptote verticale d'une fonction quelconque ayant la forme d'une fraction met sur le tapis, par le biais de contre-exemples et d'un travail plus formel, des hypothèses plus sophistiquées telles la continuité (celle de la fonction du dénominateur là où elle s'annule). Le but est ici de distinguer ce qui relève d'un discours technologique qui peut laisser place à certaines évidences expérimentales ou non, numériques ou autres, de ce qui relève d'un discours mathématique standardisé.

Les trois praxéologies décrites plus haut sont alors présentées : un niveau « modélisation » se composant de la praxéologie « modélisation fonctionnelle » et de la praxéologie « grandeurs » et le niveau « déduction » de la praxéologie « analyse formalisée », poursuivant la réflexion sur une hiérarchisation des différents cas de limites et leur répartition entre ces différentes praxéologies dans la perspective d'en montrer des raisons d'être.

4.2. Un travail plus proprement lié aux fonctions

Ce premier travail relève du niveau de la classe de 1re en France. Il trouve un prolongement lors d'un autre travail sur le programme de terminale à l'occasion duquel les élèves professeurs prennent connaissance de la manière dont Isaac Newton est arrivé à penser, en termes fonctionnels, le problème des aires. L'enjeu est de montrer le rôle que peut jouer la métaphore du mouvement dans le signifié covariationnel du concept de fonction. R. Falcade (2006) en pointe l'importance à juste titre mais mon choix de médias signe, a contrario du sien, une approche praxéologique. En effet, si je peux penser comme elle que les fonctions géométriques de Cabri reposent sur une telle métaphore, cette dernière me paraît plus intéressante à travailler pour favoriser l'intuition de covariation là où le contexte à modéliser est a priori peu porteur de l'idée de variation. Ainsi, autant l'étude de l'évolution de grandeurs (taille d'un enfant…) dans le temps se pense spontanément en termes covariationnel (pour autant que le temps n'y soit pas une variable « transparente »), autant la covariation dans le contexte de détermination de mesures de surfaces curvilignes suppose un pas de côté important pour aller dans ce sens. En effet, remplir de telles surfaces de surfaces rectilignes de plus en plus nombreuses et petites est une idée à la portée du premier élève venu et même celle d'y mobiliser le concept de limite. Il n'en va pas de même pour le détour que constitue la recherche de la fonction « aire » dont la mesure cherchée initialement est une image. Ce détour peut en revanche être facilité par une représentation du problème en termes de mouvement. La lecture de textes illustrant l'imagerie cinématique de Newton, sa façon de voir les grandeurs comme variant dans le temps et celle qu'il a de se « débarrasser » ensuite du temps en l'assimilant à une variable indépendante quelconque variant uniformément montre aux étudiants en quoi ce regard cinématique donne accès à une nouvelle technique, celle de primitivation, qui permet d'éviter des sommations fastidieuses dans le calcul d'aires et de volumes. La métaphore du mouvement acquiert alors seulement une valence praxéologique.

Comme je l'ai dit plus haut, l'un des enjeux de la formation est d'apprendre aux étudiants à relativiser le sort fait habituellement à l'étude des fonctions qui constitue, dans la transposition habituelle, l'objet d'étude principal supposé motiver tout le reste alors que les limites, dérivées et primitives ont un champ d'application bien plus vaste dont l'ampleur s'appuie d'ailleurs sur la modélisation fonctionnelle des phénomènes. Et il est significatif de constater que M. Artaud et G. Cirade (2008) organisent l'étude des fonctions, en classe de seconde, autour de deux types de tâches majeurs : « optimiser une grandeur » et « étudier un phénomène » dont l'une relève de la praxéologie « grandeurs » et, l'autre, de la praxéologie « modélisation fonctionnelle ».

S'impose ensuite un retour sur le programme de seconde et sur les apprentissages qui pourraient être réalisés en amont. C'est l'objet d'un autre travail dont l'enjeu est de donner une réelle fonctionnalité aux transformées graphiques, mais aussi d'étudier les limites de leur champ d'opérationnalité. Et les tâches proposées aux élèves professeurs consistent à :

– Identifier a priori l'ensemble des classes paramétrées de fonctions dont l'étude peut être utile en argumentant leur portée pour la modélisation de types de phénomènes extra ou intra-mathématiques ;
– Sélectionner, pour chaque classe, les techniques les plus pertinentes pour obtenir les idéogrammes graphiques associés avec leurs caractéristiques les plus saillantes et ce, globalement à partir d'une fonction de référence c'est-à-dire sans passer par une étude exhaustive ;
– Lister des types de fonctions dont l'utilité est bien réelle mais dont l'étude échappe aux transformées graphiques et suppose des variations de fonctions plus classiques.

Il s'agira ensuite d'analyser avec les étudiants ce que les programmes scolaires permettent de réaliser de cette étude telle que pensée a priori et aussi les opportunités qu'ils ne prévoient pas. Ainsi, l'étude des progressions arithmétiques et géométriques est prévue en classe de 1re alors que les travaux de Mariza Krysinska (2007) montrent qu'une telle étude est envisageable en classe de 6^{e}. Cependant, elle peut être insérée, à ce niveau, dans une rubrique intitulée « problèmes de dénombrement ». Le but est de montrer aux élèves professeurs quelle est la marge de liberté dans un programme scolaire, marge que bien souvent ils ne perçoivent pas faute de pouvoir dénaturaliser les pratiques enseignantes qu'ils ont connues en tant qu'élèves.

5. Conclusion

Je reviens sur la nécessité soulignée par M. Artaud (2007) d'avoir une « armature articulée au moins sectorielle de l'organisation mathématique étudiée ». J'ai cherché ici à illustrer ce que recouvre, à mes yeux, une formation de professeurs sur le concept de fonction propre à leur faire construire cette armature. Cette formation s'inscrit délibérément dans une perspective plus praxéologique que conceptuelle et s'alimente considérablement de référents épistémologiques sans lesquels toute analyse praxéologique risque de tourner court, ainsi que de médias multiples (textes historiques, programmes scolaires, manuels, etc.) susceptibles de jouer un rôle de milieu. Et surtout, elle suppose, pour moi, de remonter à un niveau élevé dans l'échelle de codétermination didactique de Y. Chevallard, soit celui du domaine mathématique. À ce niveau, les concepts sont étudiés dans leur solidarité, celui de fonction ne pouvant être dissocié d'autres concepts du même champ : limite, dérivée, etc. En outre, à ce même niveau, l'étude doit tenir compte de deux processus praxéologiques qui correspondent à deux facettes majeures de l'activité mathématique : créer des modèles et les organiser dans un schéma déductif. Un tel travail de formation ne peut que déboucher sur des questions curriculaires relatives à une tranche ample de la scolarité, ainsi que je l'ai déjà illustré à propos de la géométrie enseignée au collège (Schneider, 2011).

Je ne me fais pas trop d'illusion sur l'impact d'un tel dispositif. Si l'on parvient à rendre des élèves professeurs quelque peu « noosphériens » durant leur formation initiale, ces derniers sont vite repris par l'institution scolaire où les praxéologies « modélisation » ne sont guère identifiées, ni a fortiori enseignées comme l'a montré Emmanuelle Rouy (2007). Ce qui n'empêche que certains retrouvent leur capacité de questionnement, une fois leurs « arrières » assurés. C'est pourquoi, je continue à considérer que l'intellectualisation de jeunes professeurs pourrait être un levier de changement, dans des conditions institutionnelles qu'il faut analyser.

Références

Artaud, M. (2010). Conditions de diffusion de la TAD dans le continent didactique. Les techniques d'analyse de praxéologies comme pierre de touche. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 233-253). Montpellier, France : IUFM.

Artaud, M. & Cirade, G. (2008). L'enseignement et la réception de la notion de PER dans la formation des professeurs stagiaires de mathématiques. Dans *Actes du Colloque international « Efficacité et Équité en Éducation » (Université de Rennes 2, 19, 20 et 21 novembre 2008).* CD Rom.

Bolea P., Bosch M. & Gascón J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bosch, M. (1994). Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 305-312). Grenoble, France : La Pensée sauvage

Bosch M. & Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

CFWBE (2000). *Enseignement secondaire général et technique de transition. Programme d'études du cours de Mathématiques. Troisième degré*. 40/2000/240.

Cirade G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, France.
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Job, P. & Schneider, M. (2010) Une situation fondamentale du concept de limite ? Question de langage, de culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question ? Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 233-253). Montpellier, France : IUFM.

Falcade, R. (2006). *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, France.

FESeC (2000). *Programme du Deuxième degré ; 4e Général et Technique de transition.* D/2000/7362/023.

FESeC (2008). *Programme du Troisième degré ; 5e Général et Technique de transition.* D/2008/7362/3/39.

Groupe AHA (1999a). *Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

Groupe AHA (1999b). *Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

Klein, F. (1939). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. New York: Dover Publications.

Krysinska, M. (2007). *Émergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques* (Thèse de doctorat). Université de Namur, Belgique.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.

Lebeau, C. & Schneider, M. (2010). Équations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(1), 11-46.

Mach, E. (1925). *La mécanique*. Paris : Hermann.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution universitaire et l'institution secondaire. Le cas éclairant des dérivées* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux 'aires' et 'volumes' au calcul des primitives* (Thèse de doctorat). Université Catholique de Louvain, Belgique.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? Dans J. Trgalová, G. Aldon, G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Ressources pour l'enseignement* *des mathématiques : conception, usage, partage* (pp. 21-36). Lyon, France : INRP. http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/BR062.pdf

Schneider, M. (2008). *Traité de Didactique des Mathématiques*. Liège, Belgique : Éditions de l'Université de Liège.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En Amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 175-205). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans H. Guershon & E. Dubinsky (Éds), *The Concept of Function* (pp. 25-58). Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, Volume 25.

Stewart, J. (2001). *Analyse : concepts et contextes ; Volume 1. Fonctions d'une variable*. Bruxelles : De Boeck Université.

Annexe

Didactique des mathématiques

Professeur : M. Schneider

Assistante : M. Ducarme

Moniteurs pédagogiques : J. Dewitte, E. Moitroux, C. Varlet, J. Wuidar

Didactique des mathématiques

Travail n° 1 : Les limites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Vous devez préparer quelques cours qui introduisent les limites de fonctions et vous cherchez à donner du sens aux concepts mathématiques en montrant d'emblée à quelles questions ou à quels projets ils répondent. Par quels cas de limites commencez-vous ? Envisagez-vous de les enseigner tous dans une première approche et dans quel ordre ? Pourquoi ? Renseignez-vous sur ce que les programmes et divers manuels proposent. Caractérisez leurs choix et analysez leurs avantages et leurs inconvénients.
2. Comment expliquez-vous aux élèves l'existence d'asymptotes horizontales ou verticales à partir de certains calculs de limites ?
3. Dans un manuel récent « Espace math 56 », destiné aux élèves du secondaire, on trouve la définition suivante :

   Une variable p se rapproche de plus en plus du réel constant k ou p tend vers k ssi la valeur absolue de la différence entre p et k peut être rendue plus petite que n'importe quel réel strictement positif ou encore $|p - k| < a$ où a est un réel strictement positif arbitrairement choisi.

   Est-il possible de formaliser cette définition en termes d'inégalités et de quantificateurs ? Comment ? Pourquoi ?
4. Voici deux autres définitions relatives à la notion de limite. En quoi rejoignent-elles ou s'écartent-elles de la définition rencontrée dans vos cours universitaires ?

   Soit x une quantité variable ; on dit que x tend vers une limite déterminée si les valeurs successives de x se rapprochent d'un nombre fixé a, de sorte que la différence $x - a$ finisse par devenir et rester, en valeur absolue, inférieure à tout nombre positif donné ε, si petit qu'il soit. On dit alors que x a pour limite a et l'on écrit $\lim x = a$ (G. Verriest, UCL, 1956, cours pour docteurs en sciences).

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus [...] (Cauchy, 1789-1857).

5. Comment évaluez-vous cette copie d'étudiant qui démontre, dans un cas particulier, le théorème relatif à la limite d'une somme de deux fonctions ?

On prend $\varepsilon > 0$. On sait que $\lim_a (f_1) = b_1$ et $\lim_a (f_2) = b_2$. Donc on peut prendre $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $|f_1(x) - b_1| < \varepsilon/2$ dès que $0 < |x - a| < \delta_1$ et $|f_2(x) - b_2| < \varepsilon/2$ dès que $0 < |x - a| < \delta_2$. En prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, on est assuré que

$$|(f_1 + f_2)(x) - (b_1 + b_2)| \leq |f_1(x) - b_1| + |f_2(x) - b_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

dès que $0 < |x - a| < \delta$.

La relación del profesor de matemáticas al saber matemático: el caso de la ecuación cuadrática

Antonino Viviano
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela

Abstract. This work describes the interpretation of an experience in Mathematics Education from the point of view of the Anthropological Theory of the Didactic. The experience revolves around a diagnostic activity carried out with mathematic teachers. It has enabled the characterization of the available MO and the elaboration of conjectures related to their teaching practice.

Résumé. Ce travail présente l'interprétation d'une expérience menée dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, en se plaçant du point de vue de la théorie anthropologique du didactique. L'expérience considérée s'appuie sur une activité de diagnostic réalisée avec des professeurs de mathématiques. Cela a permis de dégager les organisations mathématiques disponibles pour ces professeurs et d'élaborer des conjectures relativement à leurs pratiques enseignantes.

Resumen. Este trabajo describe la interpretación de una experiencia en educación matemática desde el punto de vista de la teoría antropológica de lo didáctico. La experiencia gira en torno a una actividad de diagnóstico realizada con profesores de matemática que permitió la caracterización de la OM disponible en ellos y la elaboración de conjeturas relativas a su práctica docente.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 507-529)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 2. *Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

Una de las cuestiones sobre la que actualmente se discute e investiga en didáctica de la matemática tiene que ver con la visión que se tiene del profesor y de sus responsabilidades en la práctica docente. En algunos enfoques se sustenta la idea según la cual el profesor de matemática es el responsable directo de la actividad docente; por tanto, su pensamiento y concepciones individuales son factores fundamentales para comprender y explicar los fenómenos didácticos (Tall, 1991; D'Amore & Godino, 2007). Otros enfoques se posicionan en el nivel institucional y conciben al docente como un representante de la institución escolar (Gascón, 1998; Bosch, Espinoza & Gascón, 2003). Este segundo punto de vista privilegia lo institucional de la práctica docente y la asume como una práctica común a todos los docentes; en consecuencia, a partir de ella es posible comprender y explicar los fenómenos didácticos relativos al pensamiento y las acciones de los docentes individuales.

Esta cuasi inversión del centro de atención en el estudio de la práctica docente tiene diversas implicaciones para la actividad investigadora en didáctica de la matemática, particularmente en lo relativo a las interpretaciones y explicaciones de los fenómenos didáctico-matemáticos; así que, de cara a la claridad, sesgos, generalizaciones y campo de validez de todo el argumento teórico y metodológico, se hace indispensable para el investigador explicitar con la mayor precisión posible el modelo teórico [1] desde el cual estudia cada problemática particular. Para el caso de la experiencia y de la actividad investigadora que dio lugar al trabajo presentado en este artículo, se describen: la experiencia didáctica puesta en juego; el modelo teórico seleccionado; las interrogantes a las que dio lugar; el procedimiento desarrollado para recaudar información que permitiera responderlas y el análisis didáctico correspondiente.

La experiencia consistió en una actividad de diagnóstico, habitual en cursos relativos a la didáctica de la matemática que se dictan en los programas de maestría, dirigidos a profesores de matemática de diferentes niveles del sistema educativo. Inicialmente se solicitó a los

1. Siempre es posible uno, aun cuando sea como germen de un entorno teórico por construir.

alumnos-profesores que respondiesen un cuestionario con preguntas tipo ensayo, relativas a la dinámica de clase y a la justificación de las actividades que ellos, como docentes, proponían. Por ejemplo, se les pedía que elaborasen un plan de clase para enseñar alguna noción matemática (que ellos estuviesen enseñando o cualquier otra de su preferencia) justificando las estrategias o las actividades planificadas. La revisión continua de las respuestas aportadas por los participantes de los cursos y la observación y análisis de los procesos desarrollados en estas clases permitieron apreciar que algunos de ellos no tenían un dominio apropiado de los objetos matemáticos que pretendían enseñar y, al mismo tiempo, tenían dificultades para justificar sus decisiones didácticas. Para estudiar más de cerca estos dos hechos, se llevó a cabo una observación exploratoria guiada por la conjetura que se deriva de una respuesta negativa a las preguntas: (1) ¿Los profesores participantes de estos cursos tienen un dominio razonablemente aceptable de los objetos matemáticos que enseñan?; (2) ¿Pueden ellos justificar en forma razonada sus decisiones didácticas?

De este proceso exploratorio surgieron las siguientes tres cuestiones relevantes que debían ser atendidas prioritariamente, a fin de poder dar continuidad al estudio. La primera fue la necesidad de replantear las interrogantes; así que, en virtud de su carácter general y de la visión espontánea con la que fueron expresadas, se decidió reformularlas tratando de afinar su especificidad así como de mejorar su base teórica. Finalmente, se formularon así: ¿Cuál es el dominio que los profesores de matemática tienen del objeto matemático que enseñan? ¿Cómo justifican ellos las estrategias de enseñanza que ponen en práctica? ¿Existe alguna relación entre el dominio de lo matemático y el tipo de argumentación con el que justifican la estrategia de enseñanza correspondiente?

La segunda cuestión estuvo vinculada con los instrumentos de observación, a los que sucesivamente se hicieron algunas modificaciones. Una consistió en centrar la atención en un objeto matemático específico: la ecuación cuadrática. Es oportuno precisar que tales instrumentos son cuestionarios similares a las pruebas que elaboran habitualmente los profesores.

La tercera cuestión corresponde a la interpretación de los resultados. Nos condujo a la necesidad de asumir un modelo teórico en didáctica de la matemática, conscientes de que tal selección afectaría tanto las interrogantes (formulación y contenido) como la metodología y, en particular, los instrumentos. Se seleccionó el modelo que propone la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 2001; Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

2. Elementos de la TAD y nueva formulación de las interrogantes

Tal como se planteó en la introducción, el asumir un modelo teórico particular en la actividad investigadora tiene implicaciones directas en todas las dimensiones de esta última, comenzando por los problemas a investigar (Gascón, Bosch & Bolea, 2001) hasta las alternativas de solución, pasando por la metodología y la interpretación de los resultados. Con la firme convicción de que una tal relación entre el modelo teórico y la actividad de investigación debe ser tomada en cuenta, esbozaremos, a continuación, algunos aspectos teóricos de la TAD y la consecuente reformulación de las interrogantes consideradas.

2.1. Elementos teóricos de la TAD

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) reconoce el carácter humano y social de la actividad matemática y asume, de acuerdo con Guy Brousseau (1972), la matemática como base del análisis didáctico. Ello significa que la descripción y análisis de la actividad didáctica, entendida como construcción o reconstrucción, utilización, difusión y transposición del conocimiento matemático, se hace, prioritariamente, en función de la actividad matemática institucional.

Es así como, en la TAD, el objeto primario de investigación es esta última actividad, ratificando que tanto la misma como el propio conocimiento matemático son construcciones sociales. Esto, a su vez, plantea la necesidad de contar con un modelo epistemológico de la actividad matemática que ponga en correspondencia el saber matemático y su funcionamiento bajo ciertas condiciones (Bosch, 2000), y que permita explicar y analizar tanto las actividades matemáticas en particular como las actividades didácticas en general. La TAD ha desarrollado dicho modelo en términos de praxeologías matemáticas (PM) u organizaciones matemáticas (OM), las cuales están constituidas por cuatro elementos diferenciados en dos niveles. En el primero se ubican el tipo de tareas o de problemas y las técnicas con las que abordar los problemas o realitzar las tareas, mientras que el segundo nivel lo constituyen la tecnología que permite explicar, justificar o interpretar las técnicas y la teoría que explica, justifica o interpreta la tecnología. Los tipos de tareas y las técnicas representan el componente práctico-técnico de la praxeología, esto es, el saber hacer; mientras que la tecnología y la teoría representan el componente discursivo sobre la práctica. Esta diferenciación de saberes no implica un predominio de uno sobre otro, dado que no hay discurso sin práctica y no hay práctica sin discurso.

A partir de la noción de praxeología es posible definir la actividad matemática como el proceso del que emerge la OM, la cual, a su vez, inicia o da lugar a la actividad matemática, constituyéndose así lo «matemático». En este sentido, tal como lo refiere Antonino Viviano (1986), la matemática es simultáneamente un producto (resultado) y una actividad (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003). Por otra parte, en la TAD se denomina proceso de estudio aquel mediante el cual se manipulan organizaciones matemáticas construidas (o en fase de construcción o reconstrucción) con ciertos fines y condiciones particulares. Del estudio de este proceso se ocupa la didáctica de la matemática. Pero, ¿cómo se desarrolla este proceso de estudio o proceso de construcción o reconstrucción? La TAD responde esta pregunta con la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997; Chevallard, 1999; Gascón, 1998; Bosch, Espinoza & Gascón, 2003); estos momentos son invariantes del proceso de estudio que describen el proceso de construcción o reconstrucción, pero no necesariamente secuenciales en términos cronológicos. Se denominan: momento del primer encuentro, momento exploratorio, momento tecnológico-teórico, momento del trabajo de la técnica, momento de la institucionalización y momento de la evaluación. Este proceso de estudio cuyo desarrollo tiene lugar a través de los momentos didácticos es, a su vez, modelizado por una praxeología denominada «praxeología didáctica» u «organización didáctica» que dispone, en forma análoga a la OM, de cuatro componentes: tipo de tareas, técnicas, tecnología y teoría. La interrelación entre ambas praxeologías puede ser definida por las siguientes proposiciones: Toda OM genera o lleva asociada una OD que la contiene y toda OD lo es de una OM.

Una de las características de las OM es su mayor o menor completitud, noción asociada al grado de complejidad de la OM, que depende, a su vez, de los niveles de codeterminación didáctica descritos por Yves Chevallard (2001, 2005) y citados por Marianna Bosch y Josep Gascón (2007). La OM menos compleja es la organización matemática puntual (OMP) (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004), mientras que la OM mínima de análisis es la OM local (OML) (Bosch & Gascón, 2005a).

Para finalizar este esbozo teórico se hará referencia a la noción de «relación al objeto». Como ha sido señalado con anterioridad, el conocimiento matemático al que se hace referencia en la TAD tiene carácter institucional. No es el conocimiento matemático de un individuo particular, sino aquel que una comunidad de individuos comparte, usa y difunde de acuerdo con un conjunto de intereses y necesidades. Se trata del saber matemático que vive en una institución y, por lo tanto, de un saber matemático relativo a esa institución. Tanto el conocer como su negación es posible solo en relación con la opinión de una institución, no en forma absoluta (Arsac, 1992). Esta relatividad institucional del conocimiento matemático responde al ámbito antropológico en el cual Chevallard (1991) inserta la matemática (la antropología matemática) y la instrumentaliza a través de la noción: «relación al saber matemático» y que, siguiendo a Andrea Araya (2007), podría ser interpretada como la base para modelizar la dimensión cognitiva en la TAD. Esta autora, interpretando la definición dada por Chevallard (2003), puntualiza la noción de relación al objeto: a) la *relación personal* de un individuo a un objeto es el sistema de todas las interacciones del individuo con el objeto; y b) la *relación institucional* a un objeto es la relación de las personas dentro de una posición al objeto. (Una persona forma parte de una institución si está sujeta a la institución; dentro de esta existen posiciones diferentes, pero legitimadas todas; por ejemplo, las de los estudiantes y los profesores.)

En síntesis, en el marco de la TAD, el conocimiento matemático no solo se caracteriza por una dualidad dialéctica (es resultado y proceso al mismo tiempo), sino también por su relatividad institucional.

2.2. Nueva reformulación del problema

Si se consideran los planteamientos teóricos de la TAD, con anterioridad resumidos, como modelo para estudiar la aparente debilidad matemática y didáctica de los profesores estudiantes de matemática, entonces se hace necesario repensar y reformular las interrogantes que han de guiar el proceso de observación. En primer lugar se hace necesario precisar que la expresión «profesor de matemática» se utilizará en sentido institucional, es decir, para referirse a la institución docente matemática. De cara a la interrogante *¿cuál es el dominio que los profesores estudiantes tienen del objeto matemático que enseñan?*, parece razonable interpretar el término «dominio» como una relación o, más precisamente, como «la calidad de cierta relación» y la expresión «objeto matemático que enseñan» como «el saber matemático disponible en ellos y potencialmente enseñable». Pero esta interpretación implica las nociones de praxeología u organización matemática y organización didáctica, dado que el saber matemático puede ser interpretado como la OM, y la disponibilidad para la enseñanza tiene que ver con la OD para llevar a cabo el proceso de estudio o reconstrucción de la OM señalada.

Esta manera de ver la cuestión antes referida (en función de OM y de OD) es extensiva a las otras dos interrogantes por cuanto, por una parte, la justificación (en torno a la cual se interroga) es inherente a la praxeología didáctica (más precisamente, se refiere al componente tecnológico-teórico de la praxeología) y, por la otra, la relación entre lo matemático y la estrategia de enseñanza no es otra que la relación entre la OM y la OD. Si, además, tomamos en cuenta la codeterminación didáctica entre la OM y la OD correspondiente (Bosch & Gascón, 2001), podemos caracterizar en forma más exhaustiva la relación del profesor de matemática al saber matemático.

En correspondencia con esta interpretación y considerando a la ecuación cuadrática como objeto matemático, se puede reformular la interrogante de investigación en los siguientes términos: *¿En qué consiste* *y cómo se describe la relación del profesor de matemática al saber matemático (caso de la ecuación cuadrática)?*

Pero como, en la TAD, la unidad de análisis es la OM, la relación a la que se hace referencia en la pregunta anterior debe ser descrita en términos de OM y sus características. Por otra parte, considerando la relatividad del conocimiento matemático, tal como se describió en líneas precedentes, un estudio para la interrogante precedente requiere de una organización matemática de referencia (OMR) con la cual comparar las OM a analizar. En consecuencia, consideramos plausibles las siguientes interrogantes: *¿Cuáles son las características de la OM en torno a la ecuación cuadrática disponible para la enseñanza en la institución docente matemática? ¿Cuáles son las características de la OD en torno a la ecuación cuadrática puesta en juego por escrito por los profesores de matemática? ¿Qué relaciones, entre la OM y la OD antes señaladas, es posible conjeturar? ¿Cuál es la relación del profesor de matemática al saber matemático?*

2.3. Objetivos

Como ya se ha comentado, el objetivo general de este trabajo es explorar la relación del profesor de matemática al saber matemático en la escuela secundaria. Como objetivos específicos, podemos mencionar los cuatro siguientes. En primer lugar, nos proponemos llevar a cabo una aproximación a la caracterización de la OM en torno a la ecuación cuadrática disponible en la institución docente. En segundo lugar, queremos determinar las características de la OD en torno a la ecuación cuadrática puesta en juego por escrito por los profesores de matemática. En tercer lugar, queremos analizar las relaciones entre la OM y la OD antes referidas antes de formular, en cuarto y último lugar, algunas conjeturas en torno a la relación del profesor de matemática al saber matemático relativo a la ecuación cuadrática.

2.4. Metodología

Con relación a la metodología es necesario aclarar, en primer lugar, que esta no se llevó a cabo en forma secuencial o siguiendo un plan rigurosamente estructurado. El plan se fue desarrollando a medida que se iban realizando tareas que surgían en forma espontánea a lo largo de las experiencias didácticas de uno o dos periodos académicos de duración. Así, formuladas las primeras conjeturas en relación a lo que se llamó, inicialmente, el conocimiento matemático del profesor, se fueron realizando actividades de indagación y desarrollando pequeños planes que afectaban y eran afectados por las tareas realizadas, las reflexiones teóricas y las producciones elaboradas. En este sentido, las actividades previas realizadas que condujeron a la planificación y desarrollo de aquellas señaladas en este informe fueron, en forma muy resumida, las siguientes:

(a) formulación inicial y espontánea de las primeras conjeturas en relación al conocimiento matemático de los estudiantes-profesores;
(b) elaboración inicial y espontánea de una prueba de conocimiento en torno a la ecuación cuadrática, dirigida a profesores de matemática participantes de los cursos de maestría en Enseñanza de la Matemática;
(c) aplicación de la prueba al grupo de participantes del momento;
(d) reelaboración de la prueba antes señalada considerando la estructura de la ecuación cuadrática en el nivel secundario de enseñanza y algunos elementos diversos de la TAD (cuestionario A);
(e) elaboración de un cuestionario con ítems abiertos en torno a la enseñanza de la ecuación cuadrática en noveno grado de la educación básica (cuestionario B);
(f) aplicación de los dos cuestionarios, A y B, a los sujetos objeto de este estudio;
(g) decisión de informar la experiencia.

Con esta aclaración previa, a continuación se describen las actividades realizadas para intentar dar respuestas a las interrogantes anteriormente señaladas.

Actividad 1. Elaboración de una aproximación a una organización matemática que sirviese como marco de referencia para la OM empírica a estudiar. Nos referimos a la organización matemática de referencia (OMR), que fue constituida con 9 tipos de tareas, 11 técnicas y 28 propiedades del componente tecnológico teórico. (Se omite por falta de espacio.)

Actividad 2. La aproximación a la OM disponible para la enseñanza en la institución docente se llevó a cabo a través de un cuestionario que llamamos «cuestionario A» cuya elaboración fue previa a la de la OMR. Este cuestionario consta de 40 ítems cuyas tareas, técnicas y elementos tecnológico-teóricos implícitos representan la OM institucional implícita, a su vez, en la OMR. El cuestionario A es del tipo prueba y ensayo, muy similar a las pruebas que se usan en nuestro sistema de enseñanza en el nivel de educación secundaria. Fue elaborado tomando en cuenta el objeto matemático en cuestión en combinación con algunos elementos teóricos de la TAD y considerando los sujetos a quienes está dirigido (solo en lo que se refiere al número de ítems). Este cuestionario se propuso a los profesores de matemática en los diferentes cursos de la maestría en educación matemática en los que el autor se ha desempeñado como profesor. La muestra considerada en este informe corresponde a 18 profesores de matemática del año 2007, todos ellos responsables de, al menos, un curso de matemática en noveno grado de la escuela básica en donde, por primera vez, está previsto el estudio de la ecuación cuadrática. El tiempo disponible para cumplimentar el cuestionario fue de una hora y media. Las respuestas se clasificaban como: correctas (c); parcialmente correctas (pc); incorrectas (nc); no respondidas (nr). Se analizaron cuantitativa y cualitativamente.

Actividad 3. Análisis y categorización de los ítems del cuestionario A considerando la OMR. Tomando en cuenta la OMR y la definición de tipo de tareas o tipo de problemas, se identificaron cuatro tipos de tareas, no rigurosamente excluyentes debido a la naturaleza de los objetos:

- Resolver ecuaciones cuadráticas (T_1)
- Construir ecuaciones cuadráticas (T_2)
- Modelizar y resolver problemas a través de la ecuación cuadrática (T_3)
- Justificar e interpretar técnicas y resultados relacionados con la ecuación cuadrática (T_4)

Actividad 4. Análisis y clasificación de las tareas constituyentes de cada tipo de tareas tomando en cuenta la mayor o menor necesidad de recurrir a consideraciones tecnológico-teóricas para su realización. De acuerdo con este criterio, se identificaron tareas con énfasis en la técnica y tareas con énfasis en la tecnología en los tipos de tareas T_1 y T_2, mientras que se consideró que en T_3 y T_4 las tareas enfatizaban la tecnología.

Actividad 5. Aproximación a la organización matemática efectivamente enseñada y a la organización didáctica (OD) que la incluye y que los profesores reconstruyen y ponen en juego por escrito. Para ello se usó el cuestionario B señalado en las actividades previas. En este cuestionario se pide que describan, lo más detalladamente posible (en forma concreta: preguntas, ejemplos, problemas, etc.), un número de clases (para un tiempo total mínimo de tres horas) para enseñar la ecuación cuadrática, tal como lo hacen usualmente o piensan que debe hacerse, argumentando por qué lo hacen así y no de otra forma. Esta tarea tenía que ser realizada fuera del ámbito de nuestras reuniones y, para ello, disponían de una semana. Podían consultar cualquier bibliografía.

Actividad 6. Identificación de relaciones entre la OM disponible en la institución docente, la OM efectivamente enseñada por escrito y la OD correspondiente. Para ello se compararon ambas OM entre sí tomando en cuenta las características de cada una y estas se relacionaron con la OD reconstruida por escrito considerando la determinación mutua entre OM y OD.

Actividad 7. Elaboración de conjeturas relativas a la relación del profesor de matemáticas al saber matemático (ecuación cuadrática). Estas se fundamentaron en las características de las OM y de la OD referida**.**

3. Análisis y discusión de los resultados relativos a la organización matemática disponible en la institución docente

Se llevaron a cabo dos tipos de análisis: uno cuantitativo y otro cualitativo. Las respuestas a los ítems del cuestionario tipo A fueron analizadas cuantitativa y cualitativamente, mientras que las respuestas al cuestionario tipo B fueron objeto de un análisis solo cualitativo. En este informe solo se analizan y discuten los resultados a partir de los datos obtenidos a través del cuestionario tipo A con el propósito de aproximarnos a una caracterización de la OM disponible en la institución docente aun cuando faltaría incorporar los datos obtenidos por el cuestionario tipo B en lo que concierne a la OM presente en la OD elaborada por escrito. Los datos de este segundo cuestionario no hacen otra cosa que corroborar con creces los resultados obtenidos a partir del cuestionario tipo A. Las respuestas a este último cuestionario fueron, por una parte, tabuladas de acuerdo a las categorías establecidas usando porcentaje, y, por la otra, fueron analizadas y discutidas cualitativamente. Se elaboraron cinco tipos de tablas. El análisis del contenido de las tablas se centró en los aspectos siguientes:

a) Comparación de las respuestas en forma global: considerando el total de respuestas posibles del cuestionario tipo A (720), las respuestas incorrectas (27%) exceden a las correctas (16%), pero ambas están muy por debajo de las no respondidas (43,6%), casi la mitad del total.
b) Comparación de respuestas por tipo de tareas:
   b1) Considerando cada tipo de tareas, las incorrectas siguen excediendo a las correctas con excepción del tipo de tareas T_2 (Construir una ecuación cuadrática), en el cual la relación se invierte. Sin embargo, en T_2 las no respondidas alcanzan el máximo (62,6% de un total de respuestas posibles de 126), mientras que en T_1 (Resolver una ecuación cuadrática) se alcanza el mínimo (28,4% de 342 posibles). Nótese que el total de respuestas posibles de T_1 representan casi la mitad del total de respuestas posibles del cuestionario (720).
   b2) Con respecto a los tipos de tareas T_3 (Resolver problemas relativos a la ecuación cuadrática) y T_4 (Justificar proposiciones relativas a la ecuación cuadrática), en los cuales solo se pudo observar el elemento «tecnología», las incorrectas exceden a las correctas con 44% versus 31% en T_3 y 36% versus 3% en T_4 con un porcentaje de no respondidas de 54,4% y 53,7% respectivamente.
c) Con respecto a los elementos praxeológicos técnica y tecnología, las respuestas correctas se concentran en torno a la técnica con 24% para el tipo de tareas T_1 y 22% para T_2 versus 24% y 7,7% de las incorrectas respectivamente, mientras que las incorrectas se concentran en torno a la tecnología con 42% para T_1 y 16,6% para T_2 versus 9% y 0% de las correctas respectivamente. Al pasar de técnica a tecnología las correctas disminuyen mientras que las incorrectas aumentan. Si se considera solo el nivel tecnológico, la concentración de las incorrectas en torno a este elemento de la praxeología es total.
d) Técnicas enfatizadas: en el caso del tipo de tareas T_1 (resolver una ecuación cuadrática) se enfatizó el uso de la resolvente con 64% versus

36% de otras técnicas diferentes a la resolvente de un total de 119 casos, mientras que en el caso de T_2 se observó un cuasi equilibrio entre la técnica que usa la suma y el producto de las raíces (14,4%) y la forma factorizada de la ecuación cuadrática (12,2%) de un total de 90 casos.

e) Relación técnica-tecnología: si bien las tareas realizadas correctamente se concentraron en torno al elemento técnico de la praxeología, las tareas relativas a su justificación (elemento tecnológico-teórico) no fueron realizadas con éxito. Tal es el caso, por ejemplo, en el tipo de tareas T_1, de la resolvente que, habiendo sido el instrumento de resolución principal de la ecuación cuadrática, no encontró apoyo tecnológico-teórico en las tareas relativas a su justificación, tareas tales como: «Resolver, sin usar la resolvente, la ecuación: $5b^2 + 7b - 13 = 0$» con 5,5% de respuestas correctas, 44,4% de incorrectas y 44,4% no respondidas, o «Deducir la resolvente para la ecuación: $ta^2 + qa + r = 0$ con $t \neq 0$» con 5,5% de correctas, 27,5% incorrectas y 66,5% no respondidas. En este mismo orden de ideas, los tipos de tareas T_3 (resolver problemas relativos a la ecuación cuadrática) y T_4 (justificar proposiciones relativas a la ecuación cuadrática), las cuales fueron asignadas al nivel tecnológico-teórico, fueron realizados con éxito en un 16,6%, sin éxito 24,4% y no realizadas 54,4% en el caso del primer tipo, mientras que para el segundo tipo se obtuvieron los siguientes resultados: 2,7% correctas, 33,3% incorrectas y 53,7% no respondidas.

A partir de estos resultados es posible formular algunas interrogantes a responder o algunas conjeturas en espera del análisis cualitativo. A saber:

(1) ¿Por qué las respuestas incorrectas exceden a las correctas, no solo en los resultados globales, sino también en, al menos, tres de los tipos de tareas, tratándose de profesores de matemática egresados de una universidad? ¿Por qué hay un porcentaje tan elevado (casi la mitad del total) de tareas no realizadas?

(2) ¿Cómo interpretar los datos del punto c) relativo a la concentración de las respuestas correctas e incorrectas en cada tipo de tareas? Una respuesta a manera de conjetura provisional en espera del análisis cualitativo es la siguiente: la OM disponible para los profesores de matemática para efectos de enseñanza presenta una fuerte debilidad del componente tecnológico-teórico, sin que esto signifique fortaleza alguna

del elemento técnico. Las respuestas correctas en torno a este elemento apenas alcanzan valores pequeños del 24% y 20%.

(3) ¿Qué significado se puede atribuir a los datos d) que informan que la resolvente fue la técnica mayormente utilizada para resolver ecuaciones cuadráticas? Los datos muestran la existencia de una OM en torno al tipo de tareas T_1 que dispone esencialmente de una sola técnica para abordar las tareas de ese tipo y esto la hace muy poco flexible, más bien rígida y al mismo tiempo muy poco eficiente.

(4) ¿Cómo interpretar la relación técnica-tecnología de acuerdo a los datos referidos en e)? Estos datos ratifican la conjetura formulada anteriormente que se refiere a la fuerte debilidad del componente tecnológico-teórico en la OM disponible en la institución docente. Si la OM correspondiente dispone de una técnica cuasi única (el caso de la resolvente) y no dispone de los elementos tecnológicos que permiten justificarla o explicarla, tal OM es rígida e incompleta por ausencia del componente tecnológico teórico.

Para llevar a cabo el análisis cualitativo, que a continuación resumiremos, nos hemos apoyado en las interrogantes y conjeturas provisionales formuladas a partir del análisis precedente, pero sin seguir un orden específico. Además, recurriremos, con más frecuencia, a los protocolos provenientes del tipo de tareas T_1 por ser esta la que mayor número de respuestas aporta y ser, cualitativamente, la razón de ser fundamental de la ecuación cuadrática.

El análisis cuantitativo nos condujo a conjeturar la tendencia de las respuestas correctas a concentrarse en torno a la técnica, mientras las incorrectas lo hacen en torno a la tecnología. Además, parece existir un reduccionismo técnico, al menos muy notable en el tipo de tareas T_1: la técnica con la cual se aborda la resolución de la casi totalidad de las ecuaciones es la resolvente independientemente del tipo de ecuación cuadrática. Este es el caso de ecuaciones tales como:

$$(2q + 1)(3q - 4) = 0;\ (5 - x)(3 + x) = (5x - 2)(x + 3);\ (3a + 2)^2 = (5a - 6)^2.$$

La tarea de resolver estas ecuaciones fue realizada, en su casi totalidad, transformándolas a la forma general y luego aplicando la resolvente y, en aquellos pocos casos en que se abordaron con técnicas diferentes, al menos la segunda y la tercera, la tarea no fue realizada exitosamente. Las técnicas usadas en estos pocos casos fueron: la simplificación en la segunda y la extracción de la raíz cuadrada en ambos miembros en la tercera obteniendo y aceptando una sola solución para cada ecuación. La situación aquí descrita es tan solo un ejemplo revelador de:

(a) La ausencia o debilidad del componente tecnológico-teórico de la OM disponible en la institución docente de matemática. No se consideró en la técnica la modificación proveniente del componente tecnológico-teórico que determina las dos condiciones de existencia de la ecuación: $x + 3 \neq 0$ (permite dividir por $x + 3$) o $x + 3 = 0$ (aporta la otra solución). Tampoco se utilizó la técnica que consiste en extraer raíz cuadrada a ambos miembros y resolver una única ecuación: $3a + 2 = 5a - 6$ dejando fuera la otra posibilidad: $3a + 2 = -(5a - 6)$, que aporta la otra solución.

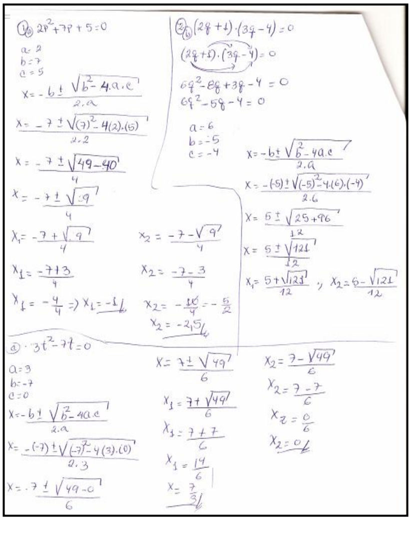
(b) La tendencia a un reduccionismo técnico privilegiando, tal como se señaló con anterioridad, el uso indiscriminado de la resolvente independientemente del costo y de la flexibilidad.

(c) La tendencia de las respuestas correctas a concentrarse en torno a la técnica. El reduccionismo técnico, antes señalado, tiene que ver con la disponibilidad en la OM de una única técnica o un número muy reducido de ellas para abordar un tipo de tarea determinado, limitando, en consecuencia, la posibilidad de seleccionar y la flexibilidad de la OM, a la vez que incrementando su rigidez. Sin embargo, hay que tener presente que la disponibilidad de esta técnica hace posible, al menos, cierto éxito parcial en la realización de las tareas relativas a la resolución de ecuaciones cuadráticas. En nuestro estudio, tal como muestran los datos, esta técnica es la resolvente, técnica esta de alcance ilimitado, que conduce a obtener respuestas correctas.

(d) Tendencia de las respuestas incorrectas a concentrarse en torno al elemento tecnológico: no todas las tareas relativas a la técnica fueron abordadas vía resolvente. Tal como muestra el ejemplo arriba señalado, la OM tiene vestigios de técnicas diferentes a la resolvente. Es el caso de la técnica de la raíz cuadrada y de la simplificación, como también de la regla de Ruffini y de la factorización ambas usadas en otros casos. Dado su limitado alcance, estas técnicas tienen mayor dificultad en desarrollarse en ausencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico y, en consecuencia, de elementos tecnológico-teóricos y aparecen en la OM en forma ambigua, confusa, mutiladas, aisladas, desarticuladas o sin identidad específica. Algo así como desperdicios residuales que interfieren en la operatividad de forma tal que su uso conduce a resultados incorrectos. Si, además, agregamos que la ausencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico afecta también a la resolvente, adquiere sentido la afirmación siguiente: Las respuestas incorrectas son consecuencia de la presencia en la OM de técnicas no suficientemente desarrolladas o no apropiadas y de la ausencia de tecnología que permita su desarrollo, la gestación o justificación de otras. Esta es la causa por la cual las respuestas incorrectas exceden a las correctas y se concentran en torno al elemento tecnológico-teórico.

(e) Alto porcentaje de tareas no realizadas (respuestas en blanco: casi la mitad del total). Disponer solo de la resolvente para abordar ecuaciones como la que estamos señalando implica un alto costo en tiempo y en consecuencia no poder abordar todas las tareas aun cuando fuesen todas abordables con la misma técnica.

A continuación se muestran algunos protocolos que respaldan los análisis precedentes:



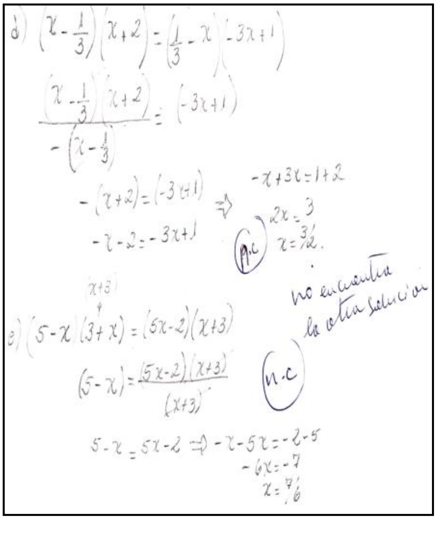
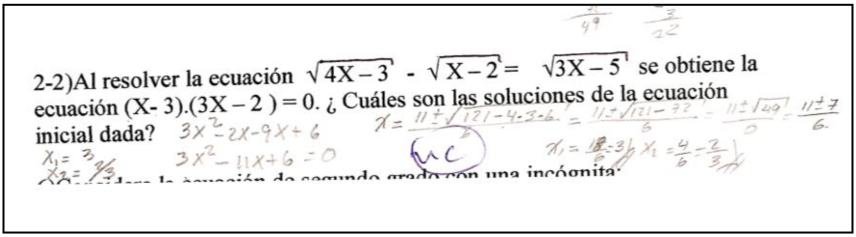


Figura 1. Técnicas de resolución de la ecuación cuadrática



2-2)Al resolver la ecuación $\sqrt{4X-3}$ - $\sqrt{X-2}$ = $\sqrt{3X-5}$ se obtiene la ecuación (X- 3).(3X – 2) = 0. ¿ Cuáles son las soluciones de la ecuación inicial dada?

$3x^2 - 2x - 9x + 6$

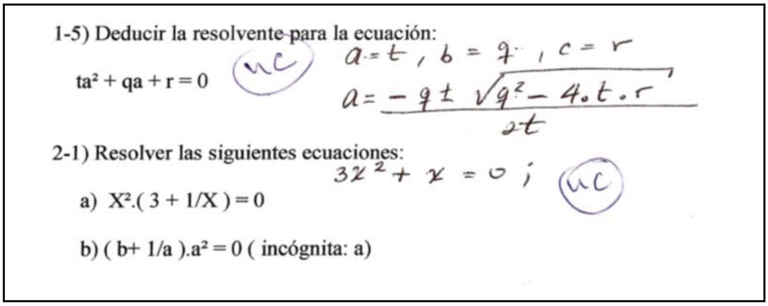
$3x^2 - 11x + 6 = 0$

$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4.3.6}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6}$

$x_1 = 3$ $x_2 = 2/3$

uc

Figura 2. Técnica de resolución de la ecuación cuadrática



1-5) Deducir la resolvente para la ecuación:

ta² + qa + r = 0

uc

$a = t$, $b = q$, $c = r$

$a = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.t.r}}{2t}$

2-1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) X².(3 + 1/X) = 0

$3x^2 + x = 0$;

uc

b) (b+ 1/a).a² = 0 (incógnita: a)

Figura 3. Interpretación de la tarea a realizar

4. Conjeturas

Los análisis precedentes en torno a los resultados permiten formular algunas conjeturas respecto de la relación del profesor de matemática al saber matemático en el caso de la ecuación cuadrática. Dado que esta relación viene definida por las características de la OM disponible en la institución docente, los siguientes enunciados, a manera de conjeturas, definen la relación en cuestión:

(C_1) La OM en torno a la ecuación cuadrática disponible en la institución docente está constituida por cuatro tipos de tareas, al menos, y, en consecuencia, por cuatro OMP.

(C_2) Las OM puntuales referidas en C_1 tienen las siguientes características:

(a) Son incompletas: tanto por ausencia, casi absoluta, del elemento tecnológico-teórico, como por una disponibilidad muy reducida de técnicas y de ausencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

(b) Presentan un alto grado de rigidez: disponen de una o dos técnicas para realizar las tareas de un mismo tipo y están imposibilitadas de generar otras por ausencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

(d) Presencia de vestigios de técnicas mutiladas, aisladas y desarticuladas. (Ejemplos: técnica de la simplificación en T_1 y técnica de la suma y producto de las raíces en T_2.)

(e) Las OMP aparecen aisladas y desarticuladas por el reduccionismo técnico y por ausencia de un componente tecnológico-teórico. Imposibilidad de constituir una OML.

(f) La presencia, en la OM disponible, de una técnica excesivamente dominante (el caso de la resolvente en T_1) genera un decrecimiento, no despreciable, de la potencia de la OM (potencia entendida como flexibilidad y efectividad con el menor costo posible y máxima estética.)

Ahora bien, si partimos de estas conjeturas y, además, nos apoyamos en algunos elementos de la TAD, es posible formular algunas interrogantes cuyas respuestas dejamos a manera de conjeturas adicionales.

¿Cuáles serán las características de la OM efectivamente enseñada y de la OM aprendida por los estudiantes? O, de otra forma: ¿Qué enseñan los profesores de matemática y qué aprenden los alumnos? Con una OM disponible como la señalada en C_1 y C_2, la OM efectivamente enseñada y la aprendida presentarán características similares, dado que sobre ellas pesan las restricciones provenientes de la OM disponible en los profesores (institución docente) y de la OD correspondiente.

¿Cuáles son las características de la organización didáctica (OD) asociada a la OM ya referida? La OD asociada a la OM disponible en la institución profesoral se nutre de las características propias del modelo docente «tecnicista» con vestigios del «teoricismo» (Gascón, 2001), con el agravante de que el modelo epistemológico que le sirve de sustento es un «euclidianismo mutilado». La cuasi ausencia del bloque tecnológico-teórico y la restricción a una sola técnica, con uno o que otro vestigio de otras, muestra una actividad matemática en torno a la ecuación cuadrática básicamente práctico-técnica y un desarrollo inexistente del trabajo de la técnica.

¿Qué diferencias o semejanzas existen entre los errores que cometen los alumnos y los que cometen los profesores? Las respuestas incorrectas dadas por los profesores en este estudio son muy similares a las que suelen dar los alumnos, en particular las referidas a la interpretación y justificación de resultados o de técnicas. Sin embargo dejamos esta interrogante abierta para estudios más puntuales, pero sin dejar de destacar que los errores pueden ser consecuencias de las restricciones que, provenientes de las características de las OM institucionales (docentes) a enseñar, pesan sobre las OD puestas en juego y sobre las OM efectivamente enseñadas (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003).

¿Cómo explicar este alto grado de incompletitud y poca flexibilidad de la OM en torno a la ecuación cuadrática en profesores de matemática que la enseñan? Si tomamos en cuenta que los profesores de matemática son todos egresados universitarios en educación matemática, con excepción de algunos ingenieros, y que el currículo para estas carreras está estructurado con cursos de matemática superior en una proporción cercana al 70% del currículo, la respuesta a la interrogante se hace compleja. Sin embargo, se vislumbra un camino delineado por los planteamientos de G. Brousseau (1972), en los cuales se postula la existencia de un fenómeno que no depende de las características personales de los profesores. Interpretando a la TAD, podemos afirmar que la explicación hay que buscarla en torno a la OM y OD institucionales. No se trata de un problema de más o menos cursos de matemática o de las características personales de los docentes: se trata esencialmente de la manera como se estructuran las OM y las OD en las instituciones de estudio de la matemática, sean estas las instituciones de formación docentes o las instituciones donde se realiza la práctica docente. Se requieren OML relativamente completas que emerjan de un proceso de estudio en el cual los momentos didácticos den vida a la obra matemática en construcción o reconstrucción. En este sentido se puede recurrir a las organizaciones matemáticas y didácticas «ideales» propuestas por M. Bosch y J. Gascón (2001) como herramientas de estudio tanto para el análisis como para la construcción de OM y OD relativamente completas y flexibles.

Resultados coincidentes con estos, al menos en aquellos aspectos comunes con esta investigación, fueron obtenidos por M. Bosch, Cecilio

Fonseca y J. Gascón (2004) en una investigación en la cual, abordando el problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad, formulan y contrastan empíricamente cinco conjeturas elaboradas con apoyo en la TAD. Este estudio permite concluir, entre otros, que las OM que se estudian en Secundaria, al presentar una fuerte debilidad del bloque tecnológico-teórico, se caracterizan por ser puntuales, rígidas y poco articuladas entre sí, al mismo tiempo que las OM a enseñar son muy similares a aquellas reconstruidas por los estudiantes, lo que revela el peso de las restricciones institucionales. Es interesante destacar que el estudio en cuestión obtuvo los indicadores empíricos a partir de una muestra de estudiantes que recién inician la universidad y de una muestra de textos de estudio que representa el saber matemático a enseñar, mientras que en nuestro estudio el saber a enseñar está representado por una muestra de profesores de matemática de la institución docente. Ambos estudios, a pesar de las diferencias estructurales y metodológicas, revelan también la tendencia tecnicista de la OD asociadas a la OM en consideración.

5. Aproximación a algunas conclusiones y recomendaciones

Tal como se señaló con anterioridad, en este trabajo se exponen, además de los aspectos generales de la investigación (interrogantes, objetivos, modelo teórico y metodología), la parte del proceso de elaboración de conjeturas que se fundamentan en el análisis y discusión de los resultados parciales referentes a la OM presente en el docente como institución. De acuerdo a esto, podemos afirmar que se ha realizado una caracterización aproximada de una OM conformada por cuatro OMP aisladas, en base a la cual ha sido posible elaborar algunas conjeturas que nos aproximan, por un lado a una descripción de la OM disponible en la institución profesoral de matemática y, en consecuencia, a una descripción de la relación del profesor de matemática al saber matemático en el caso de la ecuación cuadrática, y por el otro, a una panorámica global e hipotética de la práctica docente que se realiza en la institución docente de matemática.

La relación del profesor de matemática al saber matemático está dada por una OM rígida e incompleta conformada por OMP aisladas y mutiladas del componente técnológico-teórico. Se conjetura que este tipo de OM debe estar asociada a una práctica docente centrada en una actividad matemática esencialmente rígida y de carácter práctico-técnico. Aun cuando no se presenta en este artículo, podemos adelantar que los resultados referidos a la otra parte de esta investigación, aquella referida a la OM efectivamente enseñada por escrito, ratifican con creces los resultados aquí expuestos. Considerando las limitaciones de este estudio, recomendamos se realicen otros estudios en torno a otros temas matemáticos y a este mismo tema, mejorando la sistematización de la actividad. Recomendamos particularmente el diseño de los cuestionarios en base a la OMR y a la TAD.

Referencias

Araya, A. (2007). Gestión de la memoria didáctica en secundaria: estudio del micro-marco institucional de la memoria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 267-287). Montpellier, Francia: IUFM.

Arsac, G. (1992). The evolution of a theory in didactics: the example of didactic transposition. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics. Selected Papers*. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: La evolución de los «instrumentos de representación» en la actividad matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent & M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva: Universidad de Huelva.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro & M. Gómez (Eds.), *Análisis de currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 135-160). Madrid: Edebé.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La miseria del generalismo pedagógico ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas.*

Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (pp. 201-240). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director del proceso de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(1), 79-136

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *Actas del XVII Seminario Interuniversitario de Investigación en Educación Matemática (Almería, septiembre 2011).* http://ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.pdf

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'école elémentaire* (pp. 428-457). París: APMEP.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. En S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). París: Fabert.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

D'Amore, B. & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191-218.

Gascón, J., Bosch, M. & Bolea, P. (2001). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, *13*(3), 23-63.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159.

Tall, D. (1991). Psychology of Advanced Mathematic Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematic Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Viviano, A. (1986). La concepción de la matemática y el problema de su enseñanza. *Paradigma*, *7*(1-2), 7-16.

Eje 3
Teoría y práctica de las actividades y los recorridos de estudio e investigación (AEI y REI)

Axe 3
Théorie et pratique des activités et des parcours d’étude et de recherche (AER et PER)

Axis 3
Theory and practice of study and research activities and courses (SRA and SRC)

Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria

Bernat Ancochea
IES Serra de Marina, Premià de Mar, España

Abstract. We present a research project centred on the role of symbolic calculators in linking synthetic geometry and analytic geometry. This project includes the design of a study and research course for first year upper secondary school students (16-17 years old). It aims at introducing analytic geometry as an answer to the problems that cannot be solved in ruler and compass geometry.

Résumé. Nous présentons un projet de recherche centré dans le rôle des calculatrices symboliques comme instrument pour articuler la géométrie synthétique et la géométrie analytique. Pour cela nous proposons un parcours d'étude et de recherche pour les élèves de la première année du baccalauréat (16-17 ans) qui vise à introduire la géométrie analytique comme réponse aux problèmes que pose la géométrie à la règle et au compas.

Resumen. Presentamos un proyecto de investigación centrado en el papel de las calculadoras simbólicas como instrumento para articular la geometría sintética y la analítica. Para ello proponemos un recorrido de estudio e investigación para alumnos de primer curso de bachillerato (16-17 años), con el que se pretende introducir la geometría analítica como respuesta a los problemas que plantea la geometría con regla y compás.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 533-551)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. La geometría en la enseñanza secundaria española actual

Nuestra investigación toma como punto de partida la enseñanza de la geometría en la educación secundaria española [1] y, más en particular, las relaciones que se pueden establecer entre la geometría sintética de las construcciones con regla y compás —que se estudian generalmente en la educación secundaria obligatoria (alumnos de 12-16 años)— y la geometría analítica que nace del proceso de algebrización de la geometría sintética.

Partiremos del postulado que, en la enseñanza secundaria obligatoria (ESO), las cuestiones *umbilicales* que dan sentido al estudio de la geometría, esto es, su «razón de ser», tienen relación con la *determinación de figuras* (conjunto de elementos que determinan cada una de las figuras que se toman en consideración) y con la *construcción de figuras* que cumplen ciertas restricciones. Pero, en estas cuestiones, subyace la ambigüedad de la noción misma de «figura» puesto que, en secundaria, esta es una noción transparente o, mejor dicho, *paramatemática*. En el paso de la ESO al bachillerato (alumnos de 16-18 años), esta ambigüedad que se acaba extendiendo a la problemática general del estudio de la geometría sintética conduce a una introducción de la geometría analítica totalmente desarticulada de las técnicas de construcción de figuras, lo que provoca, como veremos, una fuerte tendencia a la «algoritmización» de los contenidos enseñados.

Presentamos aquí algunos elementos de la fase exploratoria de nuestra investigación, empezando por un breve análisis de la ecología actual de la enseñanza de la geometría en la secundaria española que nos permitirá formular con mayor precisión el problema de investigación que pretendemos abordar. Acabaremos con una propuesta de diseño de un recorrido de estudio e investigación que estamos experimentando en la actualidad, cuyo objetivo es articular las técnicas de construcción y estudio de figuras de la geometría sintética con la introducción de las técnicas analíticas,

1. En España la educación secundaria no profesional comprende dos etapas: la educación secundaria obligatoria (12-16 años), abreviada por ESO, y el bachillerato (16-18) o educación secundaria post-obligatoria. Ambas se imparten en los mismos centros (institutos de enseñanza secundaria) y por un mismo cuerpo de profesores.

utilizando para ello el soporte de programas de geometría dinámica como Geogebra y la calculadora simbólica Wiris.

1.1. La geometría sintética en la educación secundaria obligatoria

El currículo de matemáticas para la educación secundaria obligatoria (Real Decreto 1631/2006) no ha introducido modificaciones sustanciales en lo que afecta a la geometría del currículo vigente desde 1990. La geometría se sitúa en el bloque de «medida y estudio del espacio» junto a otros cuatro bloques o áreas de contenido: proporcionalidad, descripciones funcionales y estadísticas, azar y cálculo.

Como objetivos relacionados específicamente con la geometría se citan los siguientes:

– Definir conceptos geométricos elementales (incidencia, paralelismo, perpendicularidad, ángulos, movimientos y semejanza), incorporarlos a su expresión y a su razonamiento y enunciar relaciones entre ellos y propiedades sencillas.

– Utilizar correctamente instrumentos de dibujo y de medida (regla, transportador, escuadra, compás) y programas informáticos para hacer construcciones geométricas planas.

En cuanto a los procedimientos, no aparece ninguna referencia a los lugares geométricos ni a construcciones específicas con regla y compás, aparte de la «construcción y medida de figuras planas» como repaso del trabajo realizado en la educación primaria. Sí se citan, en cambio, visualizaciones en el espacio y proyecciones de objetos en el plano (con la ayuda de programas informáticos que permiten hacer proyecciones de cuerpos) con la idea de «obtener diferentes visualizaciones de la misma realidad». El concepto de semejanza aparece a partir del segundo curso, relacionándolo con la proporcionalidad, y se repite en cursos sucesivos (en el último, concretamente, para introducir las razones trigonométricas).

En el tercer curso de la ESO se habla del uso de programas informáticos de geometría dinámica aplicados a la geometría del plano. La expresión «geometría sintética» que utilizamos aquí no aparece en el texto (de hecho, la palabra geometría solo aparece ocho veces en el documento). En cuarto curso se hace una breve introducción a la geometría analítica formalizando algunos de los aspectos tratados más simples, sin más indicaciones.

Muchos profesores de matemáticas dan por supuesto que las construcciones con regla y compás se tratan en el área de Educación visual y plástica. Cuando se introducen los puntos y las rectas notables del triángulo también se supone que han aparecido en dicha área en algún momento de la etapa. Sin embargo, la propuesta curricular para el área de Educación visual y plástica aborda la geometría de manera superficial y, en particular, no hace referencia alguna a los temas anteriormente citados.

En lo que se refiere al uso de programas de geometría dinámica, algunas editoriales incorporan propuestas de ejercicios con calculadoras simbólicas. Pero estas aparecen más bien como una herramienta para el profesor, sin integrarlas propiamente en los tipos de problemas propuestos para el alumno. La calculadora sirve como soporte de ejercicios interactivos pero no como instrumento para resolver problemas. Los principales tipos de problemas que se proponen para ser estudiados tratan de simetrías y transformaciones en el plano, por un lado, y sobre poliedros regulares y volúmenes de cuerpos geométricos, por otro. Es curioso observar la importancia que se da a algunas aplicaciones prácticas como los mosaicos y las cenefas.

1.2. La geometría analítica en el bachillerato

El programa de estudios de la geometría analítica en el bachillerato se organiza en cuatro temas: los vectores en el plano; las ecuaciones de la recta; las propiedades afines y propiedades métricas y los lugares geométricos, que incluyen el estudio de las cónicas. Un manual al uso en bachillerato que introduce la trigonometría con anterioridad a la geometría propone una posible justificación de esta estructura (Arias, Maza & Mercadé, 2002):

> Gracias al estudio de la trigonometría iniciamos la geometría analítica con el estudio de los vectores que proporcionan, por un lado, una estructura lógica y geométrica a los contenidos y, por otro, la posibilidad de trabajar de una forma interdisciplinar sus aplicaciones a la Física.

¿Qué tipos de problemas aparecen en el bachillerato? En primer lugar nos encontramos con problemas relativos a la estructura de los vectores y operaciones (cálculo de sus componentes, de su módulo, suma y resta, producto por un escalar, combinación lineal, vector unitario). También aparecen problemas relativos al cálculo de proyecciones, determinación de vértices de un paralelogramo y alineación de puntos. En este primer tema, las únicas razones que justifican la introducción de los vectores como nuevos objetos matemáticos son las aplicaciones del producto escalar para determinar ángulos, paralelismo y perpendicularidad.

En el segundo tema, *Ecuaciones de la recta*, se plantean problemas relativos a la obtención de las ecuaciones de una recta en todas sus variantes (sin analizar la funcionalidad de cada una de ellas), a la transformación de un tipo de ecuación en otra y al cálculo de los elementos de una recta (un punto y el vector director) a partir de alguna de sus ecuaciones. Finalmente, aparecen los problemas de posiciones relativas de rectas, cálculo de ángulos, ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares. Los problemas de aplicaciones a la Física a los que se hacía referencia en el manual citado anteriormente se limitan a una presencia testimonial (en este caso concreto, dos problemas de un total de 62).

El tercer tipo de problemas corresponde a los lugares geométricos, encontrándonos, en este caso, con cinco ejercicios de introducción sobre los lugares geométricos (mediatriz, bisectriz, puntos del plano con una relación dada entre sus coordenadas y un paralelogramo articulado con un enunciado muy confuso de difícil interpretación para los alumnos) y, en el bloque general, un primer ejercicio consistente en determinar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados y la figura geométrica que se obtiene. Se continúa con ejercicios de cálculo de la ecuación de la circunferencia y el correspondiente problema inverso. Las tareas se repiten entonces con el resto de las cónicas. En el apartado de problemas existen algunos casos de aplicaciones prácticas (jardines circulares mutuamente tangentes, cálculo del radio de la Tierra en Barcelona y ejercicios de varillas).

1.3. La «algoritmización» de la geometría analítica

Actualmente, existe lo que podríamos designar como una «algoritmización» de la geometría en el bachillerato. Como hemos visto anteriormente, los vectores se utilizan como herramienta para poder obtener las ecuaciones de la recta, como soporte matemático del concepto de «dirección» y, posteriormente, con la introducción del producto escalar, para poder medir ángulos y distancias. Cabe analizar si los vectores desempeñan una función crucial en el estudio de la geometría analítica y si sería posible abordar este estudio desde una perspectiva que no incluyera su uso. La cuestión a dilucidar es si la introducción de los vectores como técnica sin «razón de ser» es justificable y si no actúa como un elemento que desorienta a los alumnos y les hace perder de vista lo que realmente se quiere hacer. Hay que tener en cuenta, además, que los vectores se introducen casi simultáneamente en la asignatura de Física, en un contexto totalmente diferente y sin que se establezca una relación con el uso que se hace de ellos en Matemáticas, con lo que se produce una confusión notable en los alumnos.

Para la resolución de los problemas de geometría analítica que se plantean en el bachillerato, el alumno recurre, en general, a lo que podríamos denominar el recurso del «catálogo»: compara el ejercicio que se le propone con los ejercicios resueltos, sin plantearse ninguna pregunta previa sobre el tipo de problema, su ubicación en el recorrido de estudio y, desde luego, en el caso que nos ocupa, sin hacer la construcción con regla y compás o con un dibujo esquemático del problema.

2. Formulación del problema didáctico

Delimitaremos inicialmente la geometría sintética como aquella que utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores (hasta Descartes) para abordar problemas de construcción geométrica con regla y compás. La determinación de los lugares geométricos aparece como una técnica básica de estas construcciones, al lado de las transformaciones del plano.

La geometría analítica se entiende como el estudio de figuras y transformaciones dadas por ecuaciones algebraicas con ayuda del método de coordenadas y usando las herramientas del álgebra. Siguiendo el trabajo de Josep Gascón (2002) sobre el tipo de geometría que se estudia en la enseñanza secundaria española que acabamos de describir sucintamente, podemos destacar los rasgos siguientes:

– No hay ninguna propuesta curricular de articulación de la geometría (sintética) que se estudia en la ESO con la geometría analítica del bachillerato.
– La falta de conexión impide que la geometría analítica se introduzca como una «algebrización» de la geometría, en la que la herramienta algebraica permite superar muchas de las limitaciones de las técnicas sintéticas. En estas circunstancias, no se trabaja en ningún momento la relación entre modelos gráficos y modelos analíticos.
– Mientras que en la ESO la geometría sintética se desarrolla tan poco que ni siquiera se pueden vislumbrar sus limitaciones, en el bachillerato se trabaja directamente con problemas formulados en términos del álgebra lineal y es difícil poner en evidencia la potencia y utilidad de las técnicas analíticas para abordar la problemática geométrica previamente estudiada.

El estudio de las praxeologías matemáticas en secundaria se centra esencialmente en el bloque técnico-práctico [T/τ], siendo muy escasa la incidencia del bloque tecnológico-teórico [θ/Θ] sobre la actividad matemática que se realiza efectivamente. Tal y como ha observado Cecilio Fonseca en su tesis doctoral (Fonseca, 2004), hay una ausencia de todo tipo de cuestionamiento tecnológico sobre los tipos de tareas y las técnicas matemáticas en la secundaria. En nuestro caso, no podemos hablar realmente de discontinuidad entre la geometría de la secundaria obligatoria y el bachillerato porque, como ya hemos señalado, prácticamente no hay geometría sintética en la ESO. Esto implica que la articulación entre las dos geometrías se tiene que hacer sin contar con uno de sus elementos, el cual debe introducirse de forma casi subrepticia en el proceso de estudio para poder dar así una razón de ser a la geometría analítica. El mismo C. Fonseca (2004) escribe:

> Así, por ejemplo, la organización matemática que se constituye en Secundaria en torno a la geometría analítica responde a cuestiones problemáticas que surgen más allá, no solo del tema en que se la sitúa en el currículum de Secundaria, sino incluso más allá del área y hasta del sector en que dicha organización se sitúa dentro del diseño curricular. En efecto, las cuestiones problemáticas a las que responde en última instancia la geometría analítica no son precisamente las que se proponen en

> Secundaria (intersección de dos rectas, intersección de una parábola y una recta o de dos parábolas, cambio de sistemas de referencia, cálculo del punto medio de dos puntos dados, perpendicularidad y paralelismo de rectas, etc.). Como se muestra en Gascón (2002), las verdaderas «razones de ser», esto es, las cuestiones a las que responde la geometría analítica, son cuestiones umbilicales de la geometría elemental relativas a la *determinación* y *construcción*, con ciertas restricciones, de *figuras* geométricas. Dichas cuestiones están relacionadas con limitaciones de las técnicas de la geometría sintética y, en particular, con limitaciones de las técnicas de construcción geométrica con regla y compás. Estas cuestiones solo aparecen tímidamente en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) pero desaparecen precisamente en el Bachillerato (16-18 años) y no vuelven a aparecer en la geometría que se estudia en la enseñanza universitaria. (p. 53)

Los tipos de tareas que se plantean en la geometría analítica del bachillerato (que hemos visto más arriba) se pueden relacionar con diferentes organizaciones matemáticas puntuales (OMP), que deben integrarse en una organización matemática local (OML) caracterizada por una tecnología θ que sirva para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las OMP que se incluyen en la misma. En este sentido, las calculadoras simbólicas pueden desempeñar un papel importante en el diseño del recorrido de estudio que podríamos definir, en nuestro caso, como un «taller de prácticas de geometría». La OML permite plantear y resolver problemas que en las OMP iniciales no podían formularse adecuadamente. Estas nuevas cuestiones problemáticas deberán constituir la razón de ser que dé sentido a la OML.

3. Programas de geometría dinámica y calculadoras simbólicas para secundaria

Las herramientas matemáticas disponibles hoy en día en la enseñanza ofrecen un marco extraordinario para el desarrollo de las actividades geométricas, ya que, además de influir en la manera de representar y interactuar con la geometría, también condicionan las formas de razonar, sostener y presentar relaciones o propiedades matemáticas.

3.1. La calculadora simbólica Wiris

La calculadora Wiris es una plataforma para cálculos matemáticos que dispone también de una versión autónoma que no requiere conexión a Internet (Wiris, 2007). Está específicamente diseñada para la enseñanza de las matemáticas. Se trata de un CAS (*computer algebra system*) que incluye un DGS (*dynamic geometry system*). En una página HTML convencional, se puede tener acceso a una potente barra de herramientas que permite calcular integrales y límites, representar funciones en 2D y 3D, así como manipular matrices, por citar algunos ejemplos. Wiris cubre todos los temas de matemáticas desde la escuela elemental a la universidad.

En lo referente a la geometría, dispone de las siguientes herramientas:

– Creación de figuras geométricas: puntos, segmentos, rectas, planos, circunferencias, arcos, cónicas, triángulos, poligonales, curvas, superficies.
– Operaciones con figuras geométricas: intersección, transformación afín, distancia,etc.
– Conversión automática de ecuaciones a objetos geométricos.
– Conversiones entre las diferentes ecuaciones de la recta: explícita, implícita, punto-pendiente, etc.

3.2. La geometría dinámica de GeoGebra

GeoGebra es un software de Matemáticas para la enseñanza secundaria que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009, http://www.geogebra.org).

GeoGebra permite, por una parte, realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que, *a posteriori*, pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, permite introducir ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra permite manejar cálculos con variables vinculadas a números, vectores y puntos, hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propio del análisis matemático para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. En este sentido Geogebra es más práctico para trabajar en un taller de geometría que Wiris. Con esta última, la interrelación entre la ventana de cálculos y la ventana gráfica no es muy ágil: por ejemplo, al mover un objeto en la ventana gráfica no se modifica su expresión en la ventana de cálculo. Es necesario añadir una instrucción que haga que se escriba la expresión en la ventana gráfica. Además, Geogebra incluye una opción de «punto deslizante» que aparece en la ventana gráfica y que permite modificar fácilmente el valor de un determinado parámetro mientras que Wiris requiere la escritura de un pequeño programa (aunque este puede incluirse en una librería).

En cualquier caso, creemos que los dos programas se pueden complementar, sin necesidad de optar por uno o por el otro, puesto que como herramienta matemática Wiris es más potente que GeoGebra.

3.3. El uso de las calculadoras simbólicas en la geometría

Las calculadoras simbólicas desempeñan un papel fundamental en la serie de técnicas que pretendemos utilizar en nuestra propuesta de articulación. Nos encontramos, en el desarrollo de estas técnicas, con las siguientes dificultades:

- La idea de «discusión de casos» no está enraizada: se produce una «explosión de técnicas que se quedan en estado artesanal».
- Se presentan algunas dificultades para moverse en el entorno de las calculadoras simbólicas (desconocimiento de las instrucciones): se produce un «atasco técnico».
- El manejo de listas con la calculadora es complejo (comprensión de los subíndices). Los alumnos copian directamente los datos obtenidos en los cálculos para utilizarlos en la instrucción siguiente.
- Una de las limitaciones más importantes de las calculadoras simbólicas es el hecho de que no hacen geometría simbólica: no aceptan expresiones simbólicas como datos de un problema geométrico. Existe, sin embargo, la posibilidad de proponer a los autores modificaciones del programa que permitan resolver estas limitaciones. En algunos casos se pueden evitar recurriendo a artificios de escritura de las instrucciones del programa.

4. La continuidad entre las geometrías sintética y analítica

Una vez constatada empíricamente la separación entre la geometría sintética y la analítica en la matemática escolar, sería preciso analizar los fenómenos transpositivos que han dado origen a este hecho. En definitiva, se plantea un problema de ecología praxeológica que no podemos abordar aquí en toda su extensión.

A partir de trabajos anteriores de Josep Gascón (2002, 2003), postulamos la tesis de la continuidad entre las dos geometrías:

> A partir de un grupo de problemas considerados como representantes «genuinos» de la geometría sintética, puede demostrarse que las técnicas analíticas, características de la geometría cartesiana, aparecen como un desarrollo de las técnicas con regla y compás (paralelo a la ampliación progresiva del campo de problemas). Se trata de articular las dos geometrías, no de subordinar la una a la otra.
>
> No tiene ninguna justificación hacer aparecer la geometría analítica en el bachillerato sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética estudiada (o que tendría que haber sido estudiada) en la ESO, dado que son precisamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las «razones de ser») a las técnicas analíticas.

Para probar esta tesis, diseñaremos un proceso de estudio, donde estableceremos conexiones progresivas entre las técnicas sintéticas y las analíticas. Entre dichas conexiones locales, podemos citar las siguientes:

- Enunciar problemas del tipo de los que se plantean en la geometría de la ESO y no son resolubles con las técnicas sintéticas disponibles en dicha etapa educativa.
- Proponer problemas geométricos en el bachillerato que admitan una resolución mucho más sencilla y natural con técnicas sintéticas que con las analíticas.
- Proponer problemas que, si bien exigen técnicas analíticas, requieren casi ineludiblemente la utilización previa de técnicas sintéticas para diseñar una estrategia de resolución.

Partiendo de los problemas de geometría analítica que podemos encontrar actualmente en el currículo de bachillerato, proponemos un proceso de estudio a través de distintas etapas, que ilustramos con un ejemplo concreto:

– Enunciado analítico particular.

  Hallar las circunferencias de radio 3 cm que sean tangentes en el punto (0, 4) a la recta $4x + 3y – 12 = 0$.

– Traducción a un enunciado de geometría sintética general.

  Construir las circunferencias de radio dado que sean tangentes a una recta dada en un punto dado de dicha recta.

– Resolución del problema de geometría sintética mediante una construcción con regla y compás.

  En primer lugar, dibujamos la recta y sobre ella señalamos el punto. Desde este punto trazamos la recta perpendicular a la recta dada. Como la distancia entre el punto dado y el centro de las circunferencias tiene que ser igual al radio, dibujamos una circunferencia de radio igual al dado con centro en dicho punto. Las intersecciones de la recta perpendicular dibujada anteriormente con esta circunferencia determinarán los centros de la circunferencia tangentes a la recta en el punto dado (figura 1).

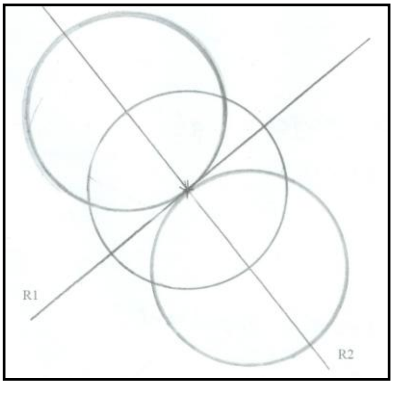


Figura 1. Dibujo con regla y compás del problema

– Estudio y discusión intuitiva de casos: analizar qué relaciones deben darse entre los datos para que el problema tenga solución y, en este caso, caracterizar cuándo la solución es única.

  En este ejemplo, no procede el estudio de casos.

- Exploración empírica, con ayuda de Wiris o GeoGebra, de la construcción con regla y compás. Discusión con simulación de las diferentes opciones, convirtiendo el gráfico con la calculadora simbólica en interactivo. Se trata de hacer un estudio de los diferentes casos posibles. Esta etapa puede preceder a la anterior o llevarse a cabo de forma simultánea.
- Resolución de la versión analítica particular del problema, utilizando como guía la construcción sintética y el correspondiente estudio de casos, para plantear el sistema de ecuaciones.

En primer lugar definiremos el punto (0, 4) y la recta $4x + 3y - 12 = 0$:

$$\mathrm{A}=\mathrm{punt}(0,4) \rightarrow (0,4)$$
$$\mathrm{R1}=\mathrm{recta}\left(y==\frac{-4x+12}{3}\right) \rightarrow y=-\frac{4}{3}\cdot x+4$$

Definimos la circunferencia de centro en A y radio 3:

$$\mathrm{C1}=\mathrm{circumferència}(\mathrm{A},3) \rightarrow x^2+(y-4)^2=9$$

y, a continuación, la recta perpendicular a la recta dada por el enunciado. Esta recta se puede definir directamente por su ecuación o bien utilizar la instrucción que da la recta perpendicular. Calculamos después la intersección entre esta recta y la circunferencia para hallar los centros de las circunferencias que nos pide el problema.

$$\mathrm{R2}=\mathrm{recta}\left(y==\frac{-3x-16}{-4}\right) \rightarrow y=\frac{3}{4}\cdot x+4$$
$$\mathrm{I}=\mathrm{R1}\cap\mathrm{C1} \rightarrow \left\{\left(-\frac{9}{5},\frac{32}{5}\right),\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)\right\}$$

Una vez hallados los centros, podemos pasar a definir las dos circunferencias:

$$\mathrm{C2}=\mathrm{circumferència}(\mathrm{I}_1,3) \rightarrow \left(x+\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{32}{5}\right)^2=9$$
$$\mathrm{C3}=\mathrm{circumferència}(\mathrm{I}_2,3) \rightarrow \left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=9$$

Finalmente, ya solo nos queda dibujar todo lo que hemos introducido:

```
dibuixa({A,I},{color=verd}) → tauler1
dibuixa({R1,R2}) → tauler1
dibuixa({C1},{color=vermell}) → tauler1
dibuixa({C2},{color=verd}) → tauler1
dibuixa({C3},{color=blau}) → tauler1
```

De esta forma obtenemos la solución del problema a partir de la exploración empírica con la calculadora (figura 2).

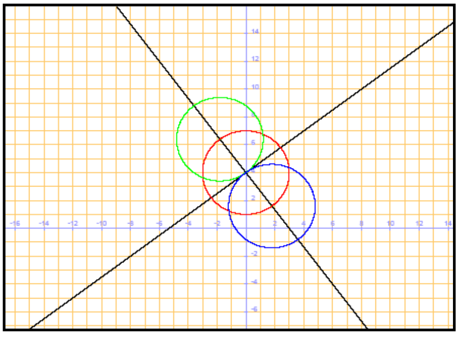


Figura 2. Dibujo con Wiris del problema

Con Geogebra obtendríamos el mismo resultado (figura 3):

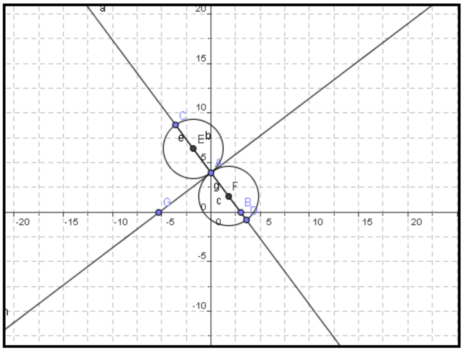


Figura 3. Dibujo con GeoGebra del problema

– Resolución analítica general, con parámetros, escogiendo adecuadamente el sistema de referencia. Se trata de encontrar el «andamio» más adecuado para el problema planteado. Tendremos así un estudio analítico de casos.

Consideramos el sistema de referencia con origen en el punto dado, la recta dada y la recta perpendicular a la misma en el punto. Dado un radio cualquiera R, el centro de la circunferencia buscada es la intersección de $x^2 + y^2 = R^2$ con $y = 0$, que tiene dos soluciones: $(0, R)$ y $(0, -R)$. Las circunferencias buscadas son $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ y $x^2 + (y + R)^2 = R^2$ respectivamente.

– Comprobación de la coherencia entre los casos obtenidos mediante las técnicas sintéticas y las analíticas.

A partir de este punto podemos utilizar la interactividad que proporcionan las calculadoras para proceder a la discusión de casos. Con Wiris se utiliza el símbolo =, que permite desplazar los elementos del dibujo definidos con este símbolo. Con Geogebra, el puntero situado sobre el elemento permite desplazarlo y la ecuación modificada aparece en la ventana algebraica. Si queremos utilizar parámetros en la discusión, Wiris requiere introducir algunas instrucciones para modificar el valor del parámetro directamente en el tablero donde aparecen los dibujos. Con Geogebra, el denominado «punto deslizante» aparece como un apartado de uno de los menús del programa. Como ya hemos comentado, Wiris es más potente con el cálculo simbólico que Geogebra, aunque esta resulta más ágil para ser usada por alumnos de bachillerato. Un objetivo de nuestro proyecto será determinar la forma de complementar las características de las dos calculadoras sin tener que renunciar a ninguna de ellas.

Otra característica interesante a destacar de las calculadoras es la posibilidad de dibujar o no en la ventana gráfica los ejes de coordenadas y la malla. Esto permite alternar entre la figura «analítica» y la figura «sintética» con mucha facilidad y poder buscar así lo que hemos denominado el «andamio» más adecuado para el problema.

5. Un «taller de prácticas matemáticas» en el ámbito de la geometría

El *Taller de prácticas matemáticas,* introducido por Marianna Bosch y Josep Gascón (1994), es un dispositivo didáctico donde el estudiante puede aprender a hacer el tipo de trabajo necesario para profundizar en el estudio de un campo de problemas. Así, el conjunto de partida es un tipo de problemas que se amplía progresivamente a medida que avanza el proceso de estudio gracias al desarrollo de las técnicas matemáticas y a la emergencia de nuevas necesidades tecnológico-teóricas. La función principal del taller de prácticas es hacer vivir el *momento de la técnica* dentro del horario lectivo, con el mismo rango que los demás momentos del proceso didáctico que ya tienen dispositivos institucionalizados propios.

Cada taller se estructura en tres o cuatro sesiones, con un subobjetivo propio. Al principio de cada sesión se distribuye a los estudiantes el «material de prácticas» del taller. Este material debe dirigir la marcha del trabajo, aunque se puede ver complementado con algunas intervenciones del profesor. En dicho taller aparecen algunos problemas que los estudiantes pueden resolver inicialmente mediante la utilización de una técnica conocida y progresar paulatinamente con técnicas originadas por una *variación de la técnica inicial.* El principal objetivo del taller no es tanto la resolución de cada problema, ni tampoco el dominio de las técnicas utilizadas, sino que los alumnos consigan desarrollar y modificar las técnicas a lo largo del estudio hasta convertirse en pequeños expertos en la actividad.

En el diseño del taller tiene una importancia capital la elaboración del «material de prácticas», ya que debe describir el *modelo específico* del ámbito matemático que se pretende generar: con la explicitación y descripción del tipo de problemas, de las técnicas, de los desarrollos y variaciones de las técnicas, y del entorno teórico necesario.

5.1. Descripción del taller de prácticas propuesto

En este apartado mostramos cómo las sucesivas etapas descritas en el apartado 4 pueden fundamentar el diseño del taller de prácticas matemáticas en el ámbito de la geometría.

El objetivo principal del taller es que los alumnos de primer curso de bachillerato lleven a cabo el estudio profundizado de un campo de problemas situado en el campo de la geometría analítica del plano. El segundo objetivo consiste en posibilitar la articulación de las técnicas sintéticas con las analíticas, utilizando programas de geometría dinámica a disposición del alumnado.

Comprobaremos que muchos de los problemas propuestos en este ámbito presentan su mayor dificultad en la inadecuación del sistema de referencia elegido y mostraremos cómo, elegido otro sistema de referencia, el problema inicial resulta trivial.

Al principio de la primera sesión, el profesor presenta a los estudiantes el campo de problemas y las tareas a realizar. También se facilita el patrón sintético-analítico de construcción de figuras determinadas por lugares geométricos en el plano y un resumen de las instrucciones necesarias de los programas de geometría dinámica que pueden usar.

La figura 4 muestra las etapas que lo integran y que detallamos a continuación:

– *1.ª algebrización:* En la sesión inicial, los alumnos deben completar las tres primeras etapas del proceso, es decir, a partir de un enunciado típico de geometría analítica que aparece en los libros de texto, deben traducirlo a un enunciado sintético general y resolverlo con regla y compás usando el patrón de los lugares geométricos. En esta resolución debe aparecer la discusión de casos del estudio sintético y la identificación del problema inicial como caso particular de uno de ellos. Una vez resuelto sintéticamente, los alumnos recuperan la versión analítica y la resuelven planteando un sistema de ecuaciones.
– *2.ª algebrización:* En la segunda sesión, se plantea la generalización del problema analítico, con la elección de un sistema de referencia adecuado y la introducción de parámetros. Utilizando como modelo el caso particular, se plantea la resolución de un sistema de ecuaciones. Los distintos parámetros introducidos, así como sus ataduras, dan lugar a una discusión de casos. En esta sesión, el uso de los programas dinámicos resulta clave, ya que permite una exploración intuitiva de los casos.
– *Identificación de casos*: En la última sesión, los alumnos deben analizar los distintos casos que han aparecido, fruto del planteamiento analítico general, e identificarlos con los distintos casos del estudio sintético.

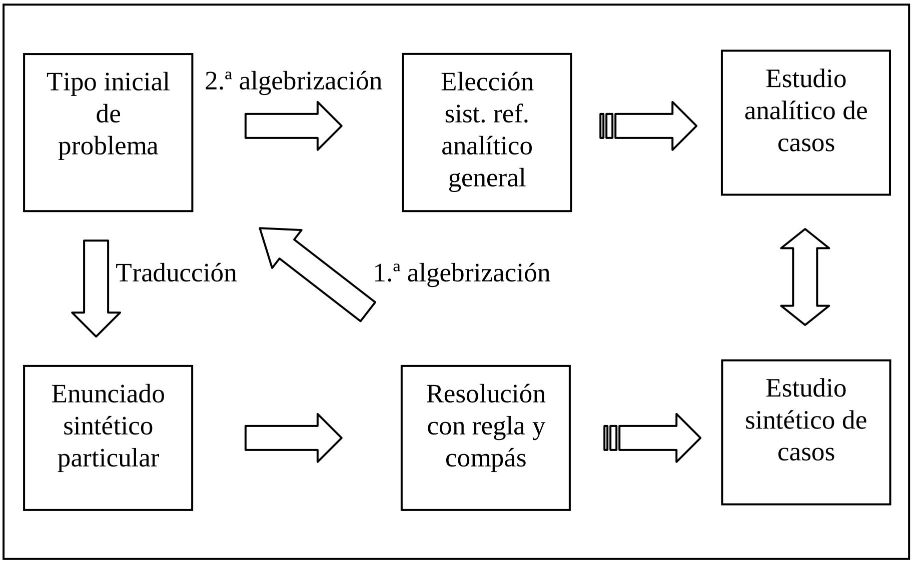


Figura 4. Etapas del Taller de prácticas en geometría

A partir de este diseño a priori del taller, nos proponemos en la actualidad llevar a cabo una experimentación en el aula con alumnos de primer curso de bachillerato. Este trabajo empírico resulta necesario para concretar el diseño de las actividades que deben realizar los alumnos, lo que nos debería permitir empezar a analizar los dispositivos matemáticos y didácticos que se requieren para llevarlo a cabo, así como las restricciones —especialmente en términos de cambios en el contrato didáctico— que podrían impedir su desarrollo normalizado en el aula.

Referencias

Arias, J. M., Maza, I. & Mercadé, J. (2002). *Matemáticas: ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología*. Barcelona: Editorial Casals.

Bosch, M. & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *12*(3), 314-332.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Vigo.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del «autismo temático» sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, *44*, 25-34.

Hohenwarter, M. & Hohenwarter, J. (2009). *Documento de ayuda de Geogebra*. *Manual oficial de la versión 3.2*. http://www.geogebra.org

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf

Wiris (2007). *Manual del usuario.* http://www.wiris.com/wiris/manual/es/

Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación

Berta Barquero
Dept. Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona, España

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. This paper focuses on the study of the ecology of mathematical modelling in the teaching of mathematics at university level. We introduce the notion of "study and research courses" (SRC) as the "ideal" didactic organization for integrating mathematical modelling in current university teaching systems. Focusing on the local ecology of SRC, we explore the constraints coming from the dominant epistemological and educational models of the scientific university community.

Résumé. Ce travail est centré sur l'étude de l'écologie de la modélisation mathématique dans l'enseignement universitaire des mathématiques. Nous proposons d'utiliser les parcours d'étude et de recherche (PER) comme nouveau type d'organisation didactique, qui permet l'intégration de la modélisation mathématique dans les systèmes d'enseignement universitaire. Pour approcher le problème de l'écologie « locale » des PER, nous étudions les contraintes qui émanent des modèles épistémologique et pédagogique dominants dans les institutions universitaires.

Resumen. Este trabajo se centra en el estudio de la ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Se proponen los recorridos de estudio e investigación (REI) como un nuevo tipo de organización didáctica que permite la integración modelización matemática en los sistemas de enseñanza universitarios. Para abordar el problema de la ecología «local» requerida por los REI, estudiamos las restricciones que provienen de los modelos epistemológico y pedagógico imperantes en las instituciones universitarias.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. El problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en la enseñanza de las matemáticas en las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) y se centra, más concretamente, en el estudio de la *ecología de la modelización matemática* en este ámbito institucional, es decir, el estudio de las *restricciones* que dificultan y de las *condiciones* que se requieren para que la actividad de modelización matemática pueda vivir con normalidad en los actuales sistemas en enseñanza universitarios.

En los trabajos de Berta Barquero, Marianna Bosch y Josep Gascón (2007 y 2011) se introduce la respuesta vastamente extendida que dan los actuales sistemas de enseñanza universitarios al problema docente de la enseñanza de las matemáticas en CCEE. En ella se observa que el propósito de integrar la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que raramente llega a realizarse en la realidad de las aulas.

Situándonos en el ámbito de la TAD, cuestionaremos la concepción común de los procesos de modelización y los situaremos dentro del modelo general de las matemáticas y de la difusión de los conocimientos matemáticos que propone este marco teórico en términos de praxeologías matemáticas y didácticas. Esta reformulación nos permitirá formular el problema didáctico de la modelización matemática en términos del enfoque ecológico y nos conducirá a la búsqueda de dispositivos didácticos que favorezcan la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria.

La concepción de la modelización que propone la TAD implica que la enseñanza de la modelización matemática se convierta en «sinónimo» de la enseñanza funcional de las matemáticas en contraposición a una enseñanza meramente formal. Por lo tanto, desde esta perspectiva, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de matemáticas. Esta integración constituye un aspecto esencial del problema de investigación que trataremos aquí y permite postular que no tiene sentido pensar en la enseñanza de la modelización matemática independientemente de la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* posibilitarían una integración global (más allá de una experimentación local) de la modelización matemática (interpretada como la TAD propone) en los citados sistemas de enseñanza?

Como respuesta a este problema, introduciremos la noción de *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2005 y 2006) como nuevo tipo de organización didáctica que, en contra del punto de vista «monumentalista» que pone en primer plano el estudio o «visita» de los saberes cristalizados, apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que debería reemplazar el *paradigma escolar de «inventariar» los saberes* por un paradigma de *cuestionamiento del mundo*. En cierta manera, los REI representan, como veremos, la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza «funcional» de las matemáticas.

En el trabajo citado de Barquero et al. (2007) se encuentra descrito el «diseño matemático» de un posible REI. En él se exponían los distintos tratamientos que se pueden dar al estudio de una cuestión generatriz sobre el estudio de la dinámica de poblaciones (de animales, organismos, personas, etc.) según el tipo de hipótesis sobre la población y su crecimiento. Estos tratamientos consisten básicamente en la construcción de modelos matemáticos que, tomando en cuenta las hipótesis formuladas, permiten elaborar elementos de respuesta a la cuestión generatriz y a sus derivadas. En efecto, el uso de cada modelo, si bien aporta soluciones parciales a los problemas que se plantean, también muestra limitaciones que se superan mediante la ampliación del modelo y la modificación de las hipótesis de partida. Se obtienen así distintas ampliaciones sucesivas de los modelos matemáticos considerados y distintas bifurcaciones según el tipo de población considerado, lo que da lugar a un «mapa de posibles trayectorias» para el estudio de la cuestión inicial. Este mapa de recorridos, elaborado desde la investigación didáctica, ha funcionado entonces como un modelo de referencia para el diseño, la gestión y la evaluación de las cuatro experimentaciones que hemos realizado. En dichas experimentaciones hemos puesto en práctica tres REI centrados en la cuestión inicial del estudio de la dinámica de poblaciones, considerando en cada caso un tipo de población o de dimensión temporal distinto: poblaciones con generaciones separadas o mezcladas y evolución en tiempo discreto o continuo (Barquero, 2009).

Al margen de esta variabilidad en parte circunstancial y en parte debida a la evolución misma del trabajo experimental, las cuatro experimentaciones realizadas hasta el momento[1] han puesto de manifiesto un conjunto de regularidades o invariantes que nos permiten describir en, una primera aproximación, la «ecología didáctica» de los REI, esto es, al conjunto de condiciones que posibilitan su desarrollo como organización de los procesos de estudio universitarios y el conjunto de restricciones que limitan dicho desarrollo y podrían, a la larga, poner en peligro su viabilidad. Más concretamente, el problema didáctico que nos proponemos indagar puede formularse en los términos siguientes:

¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan o impiden que las matemáticas se enseñen, se aprendan, estudien y utilicen como herramientas de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE? ¿En qué niveles de la escala de codeterminación matemático-didáctica aparecen estas restricciones y en qué nivel deberíamos situarnos en cada caso para poder considerarlas como condiciones «modificables»?

En trabajos anteriores centrados en la implantación «local» de los REI, se han analizado algunas de estas restricciones que provienen principalmente del contrato didáctico institucional y de la organización tradicional de las matemáticas, que podemos situar entre el nivel pedagógico y los niveles específicos de la disciplina matemática (área, sector, tema y cuestión). En este trabajo se aborda el problema de la «ecología global» de los REI como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática, centrándose en el análisis de restricciones que aparecen en los niveles más genéricos de codeterminación matemático-didáctica, aquellos que se sitúan más allá de la propia disciplina matemática: los niveles de la *pedagogía*, *escuela*, *sociedad* y *civilización*. Más concreta-

1. En Barquero (2006 y 2009) se encuentran descritas las cuatro experimentaciones desarrolladas durante los cursos académicos 2005/06, 2006/07, 2007/08 y 2008/09.

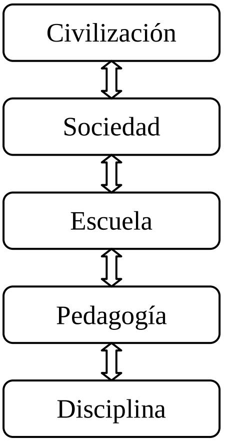


Figura 1. Niveles superiores de codeterminación

mente, nos centraremos en describir las restricciones que provienen de la epistemología y de la ideología pedagógica dominante en la comunidad científica universitaria.

Así, en primer lugar, situándonos en los niveles de *sociedad* y *escuela*, nos proponemos indagar sobre la *epistemología dominante*[2] en la institución docente considerada, la universidad, y sobre su incidencia en las posibles prácticas de enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE. Postulamos que la respuesta que prevalece en la cultura científica universitaria se puede caracterizar como «aplicacionista» en el sentido siguiente: se establece, de entrada, una separación rígida entre las matemáticas y las demás ciencias (en particular, las experimentales como la biología o la geología) de tal forma que las primeras, una vez construidas, «se aplican» a las segundas sin «contaminarse» por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática de las CCEE a cuyo estudio contribuyen. Así, por ejemplo, en la mayoría de las asignaturas de matemáticas en universidades españolas que hemos examinado, el tema del estudio de la dinámica de poblaciones se propone como un ejemplo de las «aplicaciones» del sector de las ecuaciones diferenciales, como si esta dinámica pudiera existir sin la herramienta matemática que permite describirla y como si, al mismo tiempo, las ecuaciones diferenciales pudiesen existir independientemente de cualquier problema extramatemático. Así, bajo la influencia del «aplicacionismo», la actividad de modelización es entendida e identificada como una mera aplicación de conocimientos previamente construidos o, en el caso extremo, como una simple «ejemplificación» de

2. Entendemos por «epistemología dominante» (de las matemáticas) la forma concreta en la que las universidades como instituciones docentes y, más concretamente, la comunidad de agentes que intervienen en los procesos de estudio de las matemáticas, los profesores universitarios (y los estudiantes), interpretan qué son las matemáticas y cuál es su relación con las CCEE.

herramientas matemáticas a algún contexto extramatemático construido con anterioridad para encajar con dichas herramientas.

Más concretamente, las principales características del aplicacionismo pueden describirse a partir de los siguientes indicadores que han sido utilizados para contrastar empíricamente en qué grado el aplicacionismo prevalece en las instituciones universitarias. Hasta el momento se han analizado los principales materiales de enseñanza (programas de las asignaturas de matemáticas, prefacios de libros de referencia, materiales curriculares, etc.), además de las respuestas a un cuestionario y entrevistas al profesorado universitario de departamentos de CCEE de la Universitat Autònoma de Barcelona.

I_1: *Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas* («*purificación epistemológica*»). Las matemáticas no se mezclan con los sistemas que modelizan ni se modifican al «aplicarse» y, en consecuencia, son consideradas independientes de dichos sistemas y se aplican en todos los casos de la misma manera.

I_2: *Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática básica común para todos los científicos*. No se concibe ningún tipo de especificidad ni en las nociones matemáticas ni, tampoco, en el tipo de técnicas y tecnologías matemáticas integrantes de dichas formación matemáticas básica.

I_3: *La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista* (*lógica de los modelos*). Tratándose de un indicador global de la «independencia» entre matemáticas y CCEE a las que se aplican, viene a reforzar a nivel disciplinar lo que el anterior indicador ponía de manifiesto a niveles más específicos.

I_4: Dado que las «aplicaciones» vienen después de una formación matemática básica, se destaca una proliferación de cuestiones aisladas con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas. Viene a destacar el progresivo desvanecimiento de una problemática general relativamente unificada que constituye, en primera instancia, la razón de ser y el motor del proceso de estudio de un tema científico.

I_5: *La enseñanza de las herramientas matemáticas básicas siempre es anterior a su aplicación*. Se asume que lo primero es aprender a manipular los componentes de los modelos matemáticos más importantes y después ya se aprenderá a utilizarlos en cada ámbito particular del trabajo.

I_6: Se podrían enseñar los sistemas (de las CCEE) sin los modelos (matemáticos), es decir, se podrían enseñar CCEE sin matemáticas. Como indicador extremo de la independencia entre las matemáticas y las CCEE se basa en la creencia de que, en última instancia, podría prescindirse de estas en la enseñanza de las CCEE o reservarlas solo para ejemplificar los aspectos cuantitativos de ciertos fenómenos científicos.

En segundo lugar, situándonos en el nivel de la *pedagogía*, indagaremos los principales rasgos de la «pedagógica dominante» en la comunidad científica universitaria, esto es, la forma concreta y generalizada como se interpreta el aprender y enseñar matemáticas en los actuales sistemas de enseñanza universitarios.

Ambas caracterizaciones que sustentan al modelo docente que actualmente «vive» en las instituciones universitarias nos proporcionarán la base para poder precisar en los próximos apartados las restricciones que dificultan (y hasta impiden) la posible integración de la modelización matemática en las instituciones universitarias. Dada la consistencia institucional de dichas restricciones y el hecho, innegable, de que responden a cierta «economía didáctica», hemos de reconocer que no serán fácilmente modificables.

2. Restricciones debidas a la epistemología dominante en la comunidad científica universitaria

Una vez mostrado el grado de influencia e impacto que tiene el aplicacionismo en la comunidad científica universitaria (Barquero et al., 2007; Barquero, 2009), su caracterización nos sirve para describir y analizar las *restricciones* a la vida de la modelización matemática que se derivan de la interpretación «aplicacionista» de la modelización matemática y del papel que esta toma en la enseñanza de las matemáticas para las CCEE.

Uno de los principales rasgos del aplicacionismo, y que supone una de las restricciones más fuertes a la vida «normal» de la modelización matemática, proviene de la distinción neta entre las matemáticas y el resto de CCEE. En general, las matemáticas enseñadas presentan una estructura muy estereotipada y cristalizada que no se mezcla con los sistemas que se modelizan y, además, las matemáticas enseñadas nunca se modifican como consecuencia de ser aplicadas. Se supone además que ambos mundos evolucionan con lógicas independientes y sin ninguna interacción. Este hecho, que se ha contrastado experimentalmente con los tres primeros indicadores del aplicacionismo, lleva a reducir enormemente el posible papel de las matemáticas como instrumento de modelización de los sistemas científicos e incluso niega el papel de las matemáticas como herramienta clave para el estudio de problemas que aparecen en los sistemas extramatemáticos.

Esta separación radical entre matemáticas y CCEE impide considerar las matemáticas como una herramienta constitutiva de las CCEE (Koyré, 2000). Podemos considerar esta característica extrema del aplicacionismo como una de las restricciones más genéricas que, apareciendo en los niveles de la *sociedad* y de la *escuela*, se basa en no considerar las matemáticas como una herramienta fundamental para la búsqueda de respuestas y la elaboración de cuestiones problemáticas que pueden aparecer en distintos ámbitos de la realidad.

En contraposición al aplicacionismo y al modelo epistemológico que lo sustenta, debemos hacer referencia al modelo epistemológico propuesto por la TAD y a la forma como se integra la modelización matemática en dicho modelo. En este modelo se concluye que no se puede considerar que los procesos de modelización matemática sean independientes del resto de la actividad matemática y se explica por qué la actividad matemática no puede interpretarse como un «añadido» para unir ambos mundos, el matemático y el de las CCEE. En el ámbito de la TAD, las matemáticas son consideradas la herramienta clave de modelización de todo tipo de sistemas, esto es, de búsqueda de respuesta a cuestiones problemáticas y, por lo tanto, constitutiva de la construcción de todo conocimiento científico. Esto significa que determinados fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc. *se construyen* en el proceso de modelización matemática (no antes ni de forma independiente).

Esto nos conduce a pensar en una primera condición necesaria para que la modelización matemática pueda desempeñar en la actividad científica escolar el pleno papel constitutivo que la TAD le otorga. En este sentido, las cuestiones problemáticas «vivas» deben (re)situarse en el origen y núcleo de la actividad matemática cuyo estudio va a requerir iniciar un proceso de modelización matemática para poder aportar una respuesta. En este primer proceso se pueden generar nuevas cuestiones, de naturaleza matemática o extramatemática, que darán lugar a nuevos procesos de modelización. En esta dinámica deja de tener sentido pensar en dos lógicas distintas e independientes que rigen ambos mundos, el matemático y el del resto de disciplinas científicas. Se impone pensar en un único mundo, el de la actividad científica del que la modelización matemática forma parte de manera indisoluble.

Estrechamente relacionado con lo anterior, y más allá de la ausencia de la razón de ser de la matemática escolar, aparecen nuevas restricciones a la vida escolar (aquí universitaria) de la modelización matemática relacionadas con el aplicacionismo. Por ejemplo, el suponer que los modelos matemáticos preexisten a los sistemas científicos y que las dos realidades, las matemáticas que fabrican modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas, mantiene una relación unidireccional (en tiempo y modo): primero se construye el modelo matemático y luego «se aplica» a los sistemas extramatemáticos que se modelizan. Con ello se supone, además, que ni los modelos ni los sistemas evolucionan; ambas entidades, modelos y sistemas, son consideradas estáticas a lo largo del proceso de estudio: ni la problemática planteada en los sistemas científicos evoluciona ni los modelos se modifican lo más mínimo para poder ser utilizados.

A diferencia de estos presupuestos comunes, en la conceptualización de los procesos de modelización matemática que propone la TAD, las cuestiones problemáticas se sitúan en el punto de partida de la actividad. La búsqueda constante de respuestas a dichas cuestiones va a conducir a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas que raramente pueden estar fijadas de antemano. Por lo tanto, no tiene sentido limitar a priori la utilización de ciertas herramientas matemáticas preestablecidas, si no se quiere limitar a su vez la actividad de modelización matemática.

Otra de las restricciones del aplicacionismo sobre la vida de la modelización matemática se pone de manifiesto en la organización habitual de los programas de matemáticas que se imparten en los estudios de CCEE.

En efecto, ni la estructura que se da a los contenidos ni la forma de desarrollarlos en clase dan la posibilidad de llevar a cabo un trabajo de construcción de modelos matemáticos en relación al estudio de cuestiones problemáticas que surgen en ámbitos científicos cercanos a la especialidad escogida por los estudiantes. La razón de ser (matemática o extramatemática) de los contenidos, que forman parte de esta formación matemática básica que deben adquirir los estudiantes, no forma parte del programa de estudio. La actividad de modelización se restringe y limita a la simple ilustración o ejemplificación puntual y anecdótica de ciertos modelos preestablecidos a sistemas dotados de una problemática fijada de antemano.

Este conjunto de restricciones, que limita enormemente la naturaleza y estructura de las posibles matemáticas a enseñar y, sobre todo, el papel de dichas matemáticas en el estudio de las CCEE, pueden considerarse en primera instancia como restricciones que surgen en los niveles de la *pedagogía* y de la *disciplina* pero sin dejar de mencionar el gran impacto que tienen estas restricciones en los niveles específicos de codeterminación matemático-didácticos, esto es, en la forma concreta como se organiza la matemática enseñadas en *áreas*, *sectores*, *temas* y *cuestiones*.

Todas estas restricciones provenientes del aplicacionismo dificultan fuertemente (y casi impiden) que la modelización matemática juegue el papel que se le otorga en el modelo epistemológico que propone la TAD. En particular podemos decir que las actividades (aisladas y puntuales) que tienen relación con algunos aspectos del proceso de modelización matemática y que aparecen en los actuales sistemas universitarios de enseñanza de las CCEE no pueden constituirse de ninguna manera en el instrumento de articulación de la actividad científica que la TAD le adjudica.

3. Restricciones debidas a la pedagogía dominante en las instituciones universitarias

El análisis de las condiciones que se requieren para la vida normal de la modelización matemática en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no solo la epistemología «aplicacionista» imperante, sino también las restricciones que impone la pedagógica dominante en el sistema de enseñanza universitaria, esto es, la forma concreta y generalizada que tiene la comunidad universitaria de interpretar qué es aprender y enseñar matemáticas.

Nos centraremos en este apartado en presentar de forma muy esquemática algunos de los rasgos destacados de la pedagogía dominante, que requerirán, en futuras investigaciones, de un estudio más sistemático. Postulamos que, en la medida que el modelo docente vigente en los sistemas de enseñanza universitaria de CCEE participe de dicha pedagogía, existirán serias restricciones sobre la vida de la modelización matemática. Las principales características de la pedagogía dominante pueden ser brevemente descritas en los términos siguientes:[3]

Las cuestiones problemáticas Q, esto es, las razones de ser de las posibles praxeologías, no son centrales en los procesos de estudio y tienden a desaparecer. Esta dificultad para centrar el proceso didáctico en el estudio de cuestiones es una clara restricción a una enseñanza de las matemáticas como actividad de modelización.

El objetivo de los procesos de enseñanza está establecido de antemano y formulado en términos de contenidos del saber a enseñar. Con esta característica, que supone una fuerte restricción para la modelización matemática, se elimina prácticamente el posible papel de las sucesivas respuestas provisionales que se generarían y que constituyen el núcleo de todo proceso de modelización. Se da a los conocimientos previamente disponibles un papel decisivo.

Durante el estudio de cuestiones problemáticas no se considera la existencia de posibles respuestas preestablecidas que sean diferentes a las que aporta el profesor y cuya validez y pertinencia estarían por contrastar.

La tradición escolar apoya la recopilación formal de textos en los que se encuentran «inscritas» las respuestas preestablecidas aceptadas por la institución. Este hábito de la tradición escolar tiende a provocar una

3. Notemos que la pedagogía dominante, de la que comentaremos algunas de sus características, es un modelo docente «ideal» en el sentido que no ha existido nunca en estado puro (Gascón, 2001). Lo mismo podríamos decir de la epistemología dominante que sustenta al aplicacionismo. En ambos casos utilizamos un concepto teórico para analizar, por contraste, la realidad empírica.

escasez documental que termina por favorecer el trabajo con medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio.

La pedagogía dominante tiene una concepción individualista del proceso de estudio. Se destaca la preponderancia del trabajo individual bajo las órdenes del profesor. Los estudiantes quedan encerrados en un comportamiento autónomo dirigido por las demandas del profesor.

A esta pedagogía dominante que comparte muchos rasgos de la que hemos denominado ideología «monumentalista» se le añade otra ideología pedagógica que llamaremos «generalista» y que se caracteriza por el hecho de enfatizar rasgos genéricos (en el sentido de independientes de todo saber disciplinar) presuntamente aplicables a todo proceso de enseñanza y aprendizaje:

Se separa el contenido de la enseñanza de la forma de organizar el proceso de enseñanza que, al suponerse independiente de los contenidos a enseñar, se pretende común a todos ellos. Como consecuencia se produce, en el caso de las matemáticas, una separación radical entre la enseñanza de las matemáticas y la actividad generadora [4] de las matemáticas que se enseñan (que está en el origen de estas).

En la medida que en la matemática enseñada se eliminan todos los rasgos propios del «hacer matemáticas» (esto es, todos los rasgos de estudio e investigación) se está impidiendo llevar a cabo una genuina actividad de modelización matemática.

Se tiende a problematizar la forma de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje mientras que, por el contrario, los contenidos de la enseñanza (matemático-científicos u otros cualesquiera) se suponen transparentes y no problemáticos.

Dado que el carácter problemático, provisional y parcial de las sucesivas respuestas que pueden aportarse a una cuestión científica constituye el «nervio» de todo proceso de modelización matemática (en el sentido que la TAD lo conceptualiza) este rasgo de la ideología pedagógica, en la medida que se está incorporando al modelo docente dominante en las instituciones responsables de la enseñanza universitaria de las CCEE,

4. Entendemos por «hacer matemáticas» o «actividad generadora de las matemáticas», en sentido amplio, cualquier actividad que utiliza las matemáticas tanto para construir nuevas matemáticas como para construir conocimientos en cualquier otro ámbito.

constituye un impedimento para la vida de la modelización matemática en dichas instituciones.

A fin de evitar que los alumnos se alejen y separen de la institución escolar, se tiende a eliminar aquellos aspectos *disciplinares* que por su especial dureza y exigencia dificultan, presuntamente, la vida escolar de la mayoría de los alumnos. En base a este principio «proteccionista» hemos visto en la enseñanza primaria y en la secundaria, y empezamos a observar en la enseñanza universitaria, una fuerte tendencia a:

– disminuir progresivamente los objetivos a largo plazo, al tiempo que toma fuerza el mito de la comprensión inmediata y casi instantánea.
– atomizar la matemática enseñada (y, en general, los contenidos de la enseñanza) que lleva a convertirla en un conjunto de anécdotas independientes entre sí.
– hacer desaparecer progresivamente el trabajo sistemático, paciente, a largo plazo, y de toda actividad que pueda ser considerada como rutinaria, por considerarla repetitiva y aburrida.
– sobrevalorar «lo concreto» como motivador frente a «lo abstracto» como aburrido y difícil.

Todos estos rasgos constituyen restricciones importantes a la vida de la modelización matemática puesto que esta constituye el prototipo de actividad sistemática, a largo plazo, con respuestas siempre provisionales y una comprensión permanentemente incompleta.

Algunas de las características de la pedagogía dominante que acabamos de sintetizar junto con las que se derivaban del aplicacionismo como epistemología dominante en las instituciones universitarias, comportan múltiples restricciones a la vida de la modelización matemática. Su estudio nos permitirá discernir, dentro de la escala de niveles de codeterminación matemático-didáctica, qué condiciones se han de modificar en cada nivel para conseguir una verdadera integración de la modelización matemática. Para ello será necesario introducir un nuevo tipo de organización didáctica con nuevos dispositivos y «gestos» didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

4. Hacia una integración de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación

En los apartados anteriores hemos descrito las restricciones que provienen, respectivamente, de los modelos epistemológico y didáctico dominantes en las instituciones universitarias y que inciden sobre la vida de la modelización matemática. A este respecto habría que añadir que no se trata de dos tipos de restricciones que sean independientes entre sí. Tal como se ha mostrado en algunos trabajos anteriores realizados en el ámbito de la TAD, el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en una institución docente, esto es, la forma particular de interpretar y describir las matemáticas en dicha institución, condiciona fuertemente la manera de interpretar (por parte de los sujetos de dicha institución) en qué consiste enseñar y aprender matemáticas, esto es, el modelo docente vigente en la misma (Gascón, 2001). Incluso podría decirse que el modelo epistemológico dominante en una institución constituye un componente esencial de la tecnología didáctica en dicha institución (Bolea, Bosch & Gascón, 2001).

A lo largo de este trabajo nos hemos referido a los recorridos de estudio e investigación (REI) como un nuevo tipo de organización didáctica que podemos utilizar como modelo de referencia para el análisis, diseño y experimentación de los modelos docentes no «monumentalistas» cuyo objetivo principal es el de introducir una nueva epistemología en la escuela cuyo paradigma central viene a reemplazar el paradigma de «inventariar» los saberes por un paradigma de cuestionamiento del mundo con el que se dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto (Chevallard, 2009). Podemos formalizar la noción de los REI con el esquema siguiente:

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q_0) \curvearrowright \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

A continuación, vamos a clarificar el significado de este esquema y a describir algunas de las propiedades generales de las organizaciones didácticas «ideales» que se desprenden de la noción de REI y que aparecen como una respuesta apropiada a las carencias que están en el origen de algunas de las restricciones que dificultan e incluso impiden la integración de la modelización matemática en las instituciones escolares.

4.1. Las cuestiones generatrices como punto de partida de procesos de estudio funcionales

El punto de partida de un REI debe ser una cuestión «viva» para la comunidad de estudio, que denotaremos por Q_0 y a la que llamaremos *cuestión generatriz* del proceso de estudio. Esta no debe ser una cuestión impuesta por el profesor por ciertas necesidades didácticas que este se proponga. En otras palabras, el objetivo de plantear Q_0 no es el de la construcción de cierta OM fijada de antemano sino que el objetivo de plantear Q_0 es su estudio, es decir, la búsqueda de respuestas a Q_0 se debe convertir en un fin en sí mismo.

Esta cuestión generatriz Q_0 debe ser «tomada en serio» por la comunidad de estudio ya que su respuesta debe permitir actuar en algún sentido importante (vital). La respuesta buscada no se puede limitar a una simple información; el estudio de Q_0 debe requerir la construcción de toda una organización matemática como respuesta, es decir, la construcción de un conjunto de tipo de problemas, de técnicas para resolver estos problemas, y de elementos tecnológico-teóricos que permitan explicar y justificar el trabajo realizado (Chevallard, 1999). Nos referiremos a ello diciendo que la cuestión Q_0 debe requerir una respuesta en sentido fuerte. La cuestión Q_0, junto con las diversas cuestiones que se derivarán de su estudio, van a ser en realidad el origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio. Q_0 deberá entonces estar presente durante todo el proceso de estudio y actuar como eje articulador de dicho proceso. Esto no significa que Q_0 sea inmutable sino que, al contrario Q_0 evoluciona y se desarrolla a lo largo del proceso de estudio. Un buen ejemplo lo encontramos en el caso del diseño y experimentación de los REI en torno al estudio de la dinámica de poblaciones (Barquero, 2009).

4.2. La estructura «arborescente» de los REI

A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q_0 evoluciona y da lugar al planteo de muchas nuevas «cuestiones derivadas»: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ cuya pertinencia debe ser constantemente cuestionada. En este sentido, el criterio esencial para decidir sobre la pertinencia y buena formulación de Q_i es su capacidad de proporcionar respuestas R_i que ayuden a elaborar una respuesta a Q_0.

El estudio de Q_0 y de sus respectivas cuestiones derivadas conduce a la búsqueda de respuestas y con ello a la construcción de un gran número de saberes que delimita el mapa y límites provisionales del «territorio» del proceso de estudio. Este proceso, que podremos sintetizar como un conjunto o cadena de cuestiones y de respuestas, contendrá las posibles trayectorias a «recorrer» generadas a partir del estudio de Q_0.

$$Q_0 \rightarrow \begin{cases} (Q_0', R_0') \rightarrow (Q_1', R_1') \ldots \rightarrow (Q_p', R_p') \\ (Q_0'', R_0'') \rightarrow (Q_1'', R_1'') \ldots \rightarrow (Q_q'', R_q'') \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$$

Postulamos entonces que el trabajo de producción o construcción de $R^{\heartsuit}$ podrá describirse como una arborescencia de cuestiones Q_i y de respuestas provisionales ($R_i = OM_i$) relacionadas entre sí mediante un proceso de modelización progresiva y recursiva.

Destacamos así la importancia del diseño matemático a priori para garantizar la fecundidad de las cuestiones generatrices iniciales. Aunque no se debe olvidar que en el desarrollo de un REI pueden aparecer nuevas cuestiones «cruciales» a estudiar no previstas de antemano. Se destaca así el *carácter abierto* (no cerrado) *y dinámico* (no estático) de los REI que, en muchas ocasiones, nos puede llevar a plantear cuestiones que traspasen los límites del marco de la propia disciplina que la tradición ha delimitado.

4.3. Los REI y las actividades de estudio e investigación (AEI)

Los REI requieren el paso por diferentes actividades de estudio e investigación (AEI) que provocan la integración de diferentes organizaciones matemáticas locales en estructuras más complejas y completas. En cierto sentido, esta característica de los REI, lejos de ser independiente de las anteriores, responde a las limitaciones de las AEI. Uno de los propósito de los AEI era el de integrar diferentes OM puntuales en una OM local, pero esta integración no llega a traspasar el nivel local y, además, el paso de una AEI a otra no está «motivado» funcionalmente por la propia actividad (Bosch & Gascón, 2007).

Podemos decir en esta dirección que, en un REI, la búsqueda de la respuesta $R^{\heartsuit}$ requerirá «pasar» (construir o estudiar) por diferentes AEI.

Esto nos va a llevar a que las cuestiones que se derivan de Q_0 se planteen y requieran la construcción de OM cada vez más amplias y completas que acabarán conformando una estructura articulada de OM de complejidad creciente. Para ello, la modelización matemática va a tener que tomar un papel esencial en este proceso, situarse en el corazón de la actividad (o, mejor dicho, ser la propia actividad matemática) permitiendo así que se articulen las diferentes OM y se integren en estructuras praxeológicas cada vez de más amplias y completas (pasando por la construcción de OM locales a la integración de estas en OM regionales e incluso OM globales). Las OM son creadas con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas que se han derivado del estudio de Q_0.

Una de las consecuencias de esta caracterización es que, en el caso concreto de partir del estudio de cuestiones que se plantean en sistemas extramatemáticos, la primera respuesta y las sucesivas respuestas a cuestiones que van apareciendo a lo largo del proceso, se estructuran en términos de praxeologías. Esto significa que estas OM son constitutivas del conocimiento científico. En otros términos, la posibilidad de proporcionar una respuesta científica no existía antes de la construcción de la praxeología matemática en cuestión.

4.4. La dialéctica de los media y los medios

En un REI la construcción de la respuesta deseada $R^{\heartsuit}$ requiere que las sucesivas respuestas «externas» $R_i^{\lozenge}$ aportadas por los *media*, se contrasten experimentalmente con los *medios* O_j apropiados. Esta *dialéctica de los media y los medios* hace referencia, por un lado, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_i, de algunas respuestas preestablecidas $R_i^{\lozenge}$ accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los *media*.

En el caso de las matemáticas, estos *media* son cualquier fuente de información como, por ejemplo, los libros de texto, tratados, artículos de investigación, apuntes de clase, etc. Pero, las respuestas $R_i^{\lozenge}$ son construcciones que se han elaborado para dar respuesta a cuestiones habitualmente diferentes a las que se pueden plantear durante el proceso de estudio y, por lo tanto, deben ser, en cierta manera, «deconstruidas» y «reconstruidas» en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar otro tipo de *medios*, instrumento indispensable para poner a prueba la validez de estas respuestas.

Esta característica de los REI es coherente con el carácter recursivo de la modelización matemática. La cuestión Q_0 surge en el marco de un sistema inicial S_0 que se modeliza inicialmente con un conocimiento disponible $R_1^\lozenge$. Su desarrollo y contraste con un medio $\{O_{1i}\}$ provoca la aparición de nuevas cuestiones Q_i en un nuevo sistema S_1 que engloba $R_1^\lozenge$ y $\{O_{1i}\}$. El proceso sigue con la consideración de nuevos sistemas S_2, S_3, etc. cada vez más complejos y más matematizados.

Digamos que los procesos de estudio basados en los REI requieren no caer en el error de defender las respuestas $R^\heartsuit$(y $R_i^\lozenge$) como respuestas «definitivas» e «incuestionables» a la cuestión Q_0. Por el contrario, el cuestionamiento explícito y constante de las «respuestas provisionales» que se van obteniendo debe incorporarse en todo momento a la actividad. Este será en realidad el motor del proceso de modelización y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI. Es esencial que el estudiante tenga acceso a respuestas $R^\lozenge$ que no se reduzcan a la respuesta «oficial» del profesor (o del libro de texto) así como a los medios para validarlas. Aparece aquí un enorme problema de investigación didáctica: ¿qué tipo de dispositivo didáctico posibilitaría llevar a cabo estos gestos y cómo puede integrarse dicho dispositivo en las actuales organizaciones didácticas escolares?

4.5. La dialéctica del individuo y el colectivo

Ya hemos enfatizado el hecho que la pedagogía dominante preconiza una enseñanza cada vez más individualizada y personalizada. Pero la integración plena de la modelización matemática en la actividad científica escolar requiere potenciar el papel de la comunidad de estudio X junto con el del *director* de estudio Y. Esta comunidad de estudio debe ser la encargada de estudiar *colectivamente* la cuestión Q_0 y producir *solidariamente* una respuesta propia $R^\heartsuit$. En contraposición a la preponderancia de un «trabajo individual» y «personalizado» bajo las órdenes de Y, la colectividad de estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno.

Este desplazamiento del «sujeto del estudio», que pasa del individuo a la comunidad, tiene muchas consecuencias importantes en cuanto que posibilita otros gestos esenciales para la vida de la modelización matemática. En particular el estudio comunitario de las cuestiones da la oportunidad de *defender las respuestas R* producidas por la comunidad (aunque estas aún tengan un carácter provisional y estén sujetas a un proceso de estudio en activo) en lugar de aceptar la *imposición de las respuestas oficiales* admitidas por la institución escolar.

4.6. La dialéctica de las preguntas y las respuestas

Otra dialéctica importante que esté en el corazón mismo del proceso de modelización y que incorporan los REI, es la del planteo de preguntas y la búsqueda de respuestas. En el contrato didáctico tradicional, recae generalmente sobre el profesor la responsabilidad de proponer preguntas que sean el motor del estudio, mientras que el estudiante solo plantea dudas o interrogantes que, se supone, el profesor puede contestar rápidamente.

En la experimentación realizada de los REI el desarrollo de la actividad de modelización requiere que la comunidad de estudio se concentre durante un largo periodo de tiempo en el estudio de una misma cuestión, que la mantenga «viva» y «abierta» sesión tras sesión y que sea capaz, además, de derivar del estudio nuevas cuestiones. Además, la pertinencia de estas cuestiones y la oportunidad (o no) de su consideración debe aparecer a su vez como un gesto más del proceso de estudio, a negociar entre el profesor y los estudiantes.

La pedagogía «monumentalista» es ajena a esta dialéctica porque asigna solo al profesor la capacidad de «enseñar» unos monumentos cuyo valor nadie contesta, y porque propone siempre recorridos perfectamente preestablecidos. Para superar las restricciones que aparecían durante la experimentación de los REI (pasividad de los alumnos, demanda de dirección estrechamente guiada al profesor, etc.), la profesora propuso a los estudiantes que, al final de cada sesión, plantearan por lo menos una cuestión o problema que hubiera surgido del trabajo realizado. Al principio de la sesión siguiente se ponían en común estas nuevas cuestiones y se discutía entre todos —bajo la dirección del profesor— el camino a seguir. Como ejemplo de nuevo dispositivo de refuerzo de esta dialéctica podemos citar el de las «preguntas de la semana» experimentado en al ámbito de la formación del profesorado de matemáticas (Cirade, 2006).

4.7. La dialéctica de circunscribirse y salirse del tema

En todo proceso de modelización, cuando se parte de una cuestión científica Q_0 a la que se pretende dar una respuesta en «sentido fuerte», es esencial integrar en la actividad científica escolar la posibilidad de *salirse del tema* al que inicialmente pertenece dicha cuestión y, según la evolución de las cuestiones que se derivan de Q_0, tener incluso la posibilidad de *salirse de la disciplina* de referencia. Por otra parte, es evidente que las cuestiones generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación rara vez pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único tema, sector o incluso disciplina.

La necesidad de «tomarse en serio» las cuestiones, es decir la necesidad de aportar respuestas que no sean un mero pretexto para mostrar la utilidad de los nuevos conocimientos enseñados, reclama la necesidad de incorporar el gesto de «*inspeccionar zonas de gran alcance*». Esta inspección, que casi nunca se adecúa de forma inmediata a lo que se busca, conduce a la posibilidad de encontrar cosas «inesperadas» y de poder así hallar aquellas pequeñas «semillas» que hacen posible progresar en la investigación. Es evidente que el encierro disciplinar en el que vive hoy día la enseñanza universitaria —incluso en las CCEE— dificulta mucho este gesto del estudio. Y este también choca frontalmente con la preocupación del profesorado por conocer siempre de antemano el recorrido concreto del proceso de estudio de sus estudiantes.

Esta dialéctica, al igual que las anteriores, pretende modificar la tradición de la pedagogía escolar dominante que muestra una extraña escasez documental para proteger a los estudiantes de la «dispersión» y el «descontrol», y favorecer así el trabajo con medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio. La integración de los gestos necesarios para instaurar dichas dialécticas en la actividad escolar requeriría de nuevos dispositivos didácticos que los haga posibles más allá de su presencia puntual y anecdótica.

4.8. La dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

En un REI, además de las respuestas externas $R_i^{\lozenge}$, deben tomarse en consideración las respuestas (provisionales) internas R_i: la dialéctica de la difusión y recepción de respuestas. Los procesos de estudio que se proponen como medio posibilitador de una enseñanza de las matemáticas basada en la modelización requieren, como hemos visto, dar importancia a las respuestas que la comunidad aporta a las cuestiones planteadas. Estas cuestiones no son conocimientos importantes por sí mismos (monumentalismo) sino por el tipo de respuesta que permiten aportar y el avance que su utilización supone. Contra la tentación de no dar la oportunidad de defender las propias respuestas R_i producidas y la tendencia a imponer alguna respuesta admisibles dentro de la institución escolar, se debe invitar al grupo de estudiantes a *defender* las sucesivas respuestas R_i que aportan, aunque estas aún tengan un carácter provisional y estén sujetas a un proceso de estudio y revisión «en activo».

En el caso de la experimentación, se introdujo un dispositivo relativamente ajeno a la cultura de la enseñanza de las matemáticas y que se designó como «informes de resultados». Cada semana, los estudiantes por grupos debían redactar y entregar a la profesora un texto escrito en el que se recogían tanto los documentos aportados por la profesora como los resultados parciales del trabajo realizado en la sesión del taller, completado con sus comentarios personales y la información que, sobre el tema, hubieran podido recoger. Estos informes recogían por lo tanto las respuestas que cada grupo defendía y que aportaban al grupo clase al principio de cada sesión con vistas a un avance conjunto. Al final del taller, cada estudiante debía entregar su propio «informe final» que ya no recogía la crónica del proceso de estudio sino que se centraba en presentar y defender una respuesta final a la cuestión inicialmente planteada.

4.9. Los REI y el desarrollo sistemático de las técnicas matemáticas

Es muy habitual que la estructura didáctica binaria tradicional de la enseñanza universitaria, basada en dos dispositivos centrales, la «clase de teoría» y la «clase de problemas» (en la que generalmente las horas destinadas a la «clase de teoría» suelen superar sensiblemente a las de la «clase de problemas»), conduzca a los estudiantes a ver desfilar en el aula un gran número de praxeologías nuevas, que nunca se desarrollan en manos de los estudiantes, con las que deben familiarizarse y que deben aprender a dominar por sí solos, a partir del trabajo personal fuera del aula. En definitiva, el «mensaje» general que transmite la institución con los dispositivos didácticos que propone no incluye ningún indicio sobre la importancia efectiva del *trabajo de la técnica* para la creación de nuevos objetos matemáticos, ni induce a los alumnos a sentirse «expertos» en alguno de los numerosos nuevos ámbitos que se les «muestran».

En la década de los 90 se introdujo un nuevo dispositivo didáctico, los «talleres de prácticas matemáticas» (Bosch & Gascón, 1994) como complemento a esta organización didáctica binaria, con el objetivo de ofrecer un lugar en el que los estudiantes, con la ayuda de un profesor, pudieran llevar a cabo un *estudio profundizado* de un pequeño número de tipos de problemas con los que ya se habían familiarizado en la «clase de problemas». El análisis de su funcionamiento controlado permitió poner de manifiesto su capacidad de incidencia sobre los dispositivos didácticos existentes y sobre la vida del resto de las dimensiones del proceso de estudio. En particular, se evidenció su capacidad para integrar tres momentos didácticos que aparecen claramente desvinculados en la organización tradicional: el momento *exploratorio*, el *tecnológico-teórico* y el del *trabajo de la técnica*. De esta forma se mostró la posibilidad de construir praxeologías matemáticas locales progresivamente más completas (que requieren la integración funcional de todos los momentos del proceso de estudio), imprescindibles para el correcto desarrollo de la actividad de modelización matemática.

En el caso de la experimentación de los REI, y tal como ya mostró Esther Rodríguez en un trabajo anterior (Rodríguez, Bosch & Gascón, 2008), el hecho de basar la dinámica del estudio en la necesidad de aportar respuestas «fuertes» a cuestiones con gran poder generador, permite que el trabajo de la técnica surja como un medio necesario del proceso de estudio, ya sea como instrumento para construir respuestas «completas», ya sea como una manera de afianzarse en vistas a su uso posterior. Por ejemplo, cuando el estudio de las poblaciones con generaciones mezcladas en tiempo discreto condujo al estudio de la potencia enésima de una matriz y a la necesidad de diagonalizarla, la profesora del taller junto con el profesor responsable de la asignatura organizaron sesiones de ejercicios, estructuradas con la lógica similar al Taller de prácticas matemáticas, destinadas a trabajar la técnica de la diagonalización como preparación para la continuación del estudio. Del mismo modo, el trabajo de simulación (por ejemplo para estudiar el comportamiento de las sucesiones definidas por el modelo maltusiano y el logístico) también requiere la consideración de un gran número de casos y, por lo tanto, un trabajo técnico considerable difícil de evitar.

5. Prospectivas de la investigación

Es evidente que el estudio del papel de estos nuevos gestos y la creación de dispositivos apropiados para que dichos gestos puedan vivir en las instituciones escolares constituye un problema abierto de gran envergadura que no podemos más que dejar para estudios posteriores.

El problema de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización, en los diferentes niveles escolares (universidad, secundaria o primaria) y el problema correlativo de la introducción de dispositivos didácticos necesarios para sustentar la nueva organización didáctica modelizada por los recorridos de estudio e investigación, requiere hoy en día de grandes esfuerzos e investigación para pasar de su estadio experimental a una práctica generalizada. En el caso concreto de nuestro trabajo, se muestra cómo la formulación del problema didáctico y la manera de tratarlo están completamente generados por las herramientas teóricas y prácticas que proporciona la TAD. Pero el alcance de las restricciones y el tipo de cambios sociales, epistemológicos y pedagógicos necesarios para superar dichas restricciones parecen requerir grandes transformaciones tanto en la forma de entender qué son las matemáticas como en las herramientas conceptuales y prácticas potencialmente útiles para su enseñanza y aprendizaje. Esta es una gran aventura que seguro sobrepasa el ámbito de actuación de la TAD, y el ámbito de actuación de la didáctica de las matemáticas en general, requiriendo la cooperación de toda la comunidad escolar, incluyendo la participación de la comunidad matemática.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Barquero, B. (2006). *Els recorreguts d'estudi i investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències* (Memoria de Diploma de Estudios Avanzados no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 527-549). Montpellier, Francia: IUFM.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en didactique des mathématiques, 21* (3), 247-304.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). Montpellier, Francia: IUFM.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon, Francia.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. Toulouse. *Séminaire DiDiST*, Toulouse, Francia, 29/04/2009.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). Université de Provence, Francia.
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME 4* (2), 129-159.

Koyré, A. (2000). *Estudios de historia del pensamiento científico*. México, DF: Siglo XXI editores (15ª edición).

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education 40* (2), 287-301.

Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico

Eva Cid
Depto. Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España

Noemí Ruiz-Munzón
Escola Universitària del Maresme, España

Abstract. In this paper we develop the proposal of the introduction of negative numbers in an algebraic environment presented for the first time by Eva Cid and Pilar Bolea at the 2nd International Conference on ATD. The epistemological reference model defined there, which was structured around several generating questions, is used in this work as a starting point. A set of study and research activities is designed in an attempt to find answers to those questions. This leads to the construction of computation rules with quantities that are added or subtracted and, finally, to the interpretation of these rules as relative numbers.

Résumé. Dans ce travail nous continuons à développer la proposition qu'Eva Cid et Pilar Bolea ont présentée au IIe congrès international sur la TAD : il s'agit, en se plaçant dans le cadre scolaire, d'introduire les nombres négatifs dans un environnement algébrique. À partir du modèle épistémologique de référence qui y est défini et qui est articulé autour de quelques questions génératrices, nous avons dessiné un ensemble d'activités d'étude et de recherche permettant de répondre à ces questions. Cela conduit à la construction de règles de calcul avec des « ajoutés » et des « soustraits » et aboutit à l'interprétation de ces derniers en tant que nombres relatifs.

Resumen. En este trabajo desarrollamos la propuesta de introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico que Eva Cid y Pilar Bolea presentaron en el II Congreso Internacional sobre la TAD. A partir del modelo epistemológico de referencia definido allí y articulado en torno a algunas cuestiones generatrices, diseñamos un conjunto de actividades de estudio e investigación como respuesta a estas cuestiones. Esta estrategia conduce a la construcción de las reglas de cálculo con «sumandos» y «sustraendos» y culmina en su interpretación como números relativos.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Criterios para una introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico

La introducción escolar de los números negativos se hace habitualmente en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos, basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. Supuestamente, la razón de ser de los números con signo sería la de expresar la medida de dichas magnitudes y su comportamiento se establecería por analogía al comportamiento de las magnitudes. Sin embargo, cada vez hay más investigaciones que ponen en duda la pertinencia de dicha introducción, bien porque se constata que la analogía con los modelos concretos puede crear dificultades a una correcta construcción de la estructura algebraica de los números con signo, bien porque los estudios epistemológicos muestran que la verdadera razón de ser de dichos números es el trabajo algebraico y que la aritmética no solo no tiene necesidad de ellos, sino que supone un obstáculo para su aceptación.

Las razones esgrimidas en Eva Cid y Pilar Bolea (2010) para introducir los números negativos en un entorno algebraico son las siguientes:

– La aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos pues la permanente contextualización numérica propia de este ámbito no permite justificar de una manera creíble su razón de ser. De hecho, son las peculiaridades del cálculo algebraico las que fuerzan a operar con sumandos y sustraendos, en vez de con números, y posteriormente, serán la necesidad de establecer una teoría general de ecuaciones algebraicas, por un lado, y de modelizar algebraicamente la geometría, por otro, las que conducirán a la aceptación de los sumandos y sustraendos como números.

– La introducción escolar actual fomenta la concepción de que el número solo puede entenderse como resultado de una medida, lo que parece ser un obstáculo epistemológico que la comunidad de matemáticos tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números negativos y justificar su estructura (Glaeser, 1981; Brousseau, 1983; Schubring, 1983; Cid, 2000).

– Los modelos concretos pueden contribuir a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y sus operaciones porque enfatizan las estructuras de espacio vectorial y espacio afín, en lugar de la estructura de cuerpo totalmente ordenado o de anillo totalmente ordenado (Cid, 2002).

– Los alumnos no siempre están familiarizados con los modelos concretos que se proponen, por lo que su presentación puede resultar una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos.

Ahora bien, la introducción de los números negativos en un entorno algebraico plantea un nuevo problema: la necesidad de iniciar el álgebra escolar cuando todavía no se dispone de las reglas de los signos, lo que dificulta, si es que no impide, el cálculo algebraico. Esto obliga a una introducción simultánea de los números negativos y del álgebra elemental en la que se posponga el desarrollo exhaustivo de las técnicas algebraicas.

Por otro lado, puesto que la razón de ser de los números negativos se encuentra en las particulares características del cálculo algebraico, es decir, aquellas que lo diferencian del cálculo aritmético, nos interesa utilizar un modelo epistemológico de referencia (MER) del álgebra escolar que enfatice dichas diferencias y que haga patente la ruptura epistemológica que supone el paso del quehacer aritmético al algebraico. Consecuentemente, frente a la interpretación del álgebra como *aritmética generalizada*, modelo dominante en la institución escolar que concibe el álgebra como una prolongación de la aritmética (Gascón, 1993; Bolea, 2003) y tal como ya se propone en E. Cid y P. Bolea (2010), utilizaremos un MER del álgebra escolar basado en la consideración del álgebra como instrumento de *modelización algebraica* (Chevallard, 1989; Gascón, 1993-94; Bolea, 2003).

Aun cuando el punto de partida de los dos modelos es el mismo: la resolución mediante técnicas algebraicas de los problemas verbales aritméticos, en la *modelización algebraica* se entiende que el enunciado del problema describe un sistema acerca del cual se quieren obtener ciertas informaciones. Las relaciones algebraicas que se establecen conforman el modelo algebraico, intrínsecamente distinto del sistema que modeliza, y que permite encontrar las respuestas buscadas. La potencia de resolución del método algebraico se muestra sobre todo cuando los datos del problema se presentan en forma de parámetros, pues esto convierte la solución en una expresión algebraica, un *programa de cálculo aritmético* (PCA), que indica las operaciones a realizar para resolver todos los problemas del mismo tipo. La utilización de parámetros (Chevallard, 1989; Bolea, 2003) transforma la actividad de resolver problemas en una actividad de modelización algebraica de tipos de problemas y la dota de un mayor grado de algebrización. Los programas de cálculo se convierten en un objeto de estudio, siendo el cálculo algebraico el medio para estudiarlos.

Por ello, en el MER descrito en E. Cid y P. Bolea (2010) para introducir los números negativos en un entorno algebraico, se proponen problemas verbales aritméticos directos y parametrizados, es decir, problemas cuya modelización inmediata viene dada por una fórmula (una función explícita de la solución respecto a los parámetros). El estudio de las expresiones algebraicas que modelizan los programas de cálculo aritmético que solucionan los problemas permite operar sumandos y sustraendos y evita, en un primer momento, la necesidad de gestionar los dos miembros de una ecuación para despejar la incógnita, lo que exigiría técnicas de cálculo más sofisticadas.

2. Cuestiones generatrices en el MER para introducir los números negativos en un entorno algebraico

El MER que ya propusimos en E. Cid y P. Bolea (2010) y que con alguna modificación reproducimos aquí se articula en torno a la siguiente cuestión generatriz global:

> Q: ¿Cómo resolver un nuevo tipo de problemas que aparecen como una ampliación del campo de problemas aritméticos, pero que no pueden resolverse con técnicas aritméticas?

Esta cuestión generatriz global se particulariza en tres cuestiones generatrices locales cuya respuesta va a permitir el desarrollo de las técnicas algebraicas de cálculo y justificar la existencia de los números positivos y negativos. Son las siguientes:

> Q_1: ¿Cómo dar una respuesta a un problema verbal aritmético cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_2: En aquellos problemas en los que la solución viene dada por expresiones algebraicas diferentes, según los valores, como sumandos o sustraendos que pueden tomar ciertos parámetros del sistema, ¿cómo encontrar una expresión algebraica única que dé solución al problema en todos los casos?

Q_3: ¿Qué consecuencias tiene considerar los sumandos y sustraendos como nuevos números y en qué modifica esa decisión las propiedades que cumplen «todos» los números?

A su vez, la cuestión Q_1 se desglosa en dos subcuestiones:

Q_{11}: ¿Cómo dar una respuesta a un problema verbal aritmético aditivo directo cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_{12}: ¿Cómo dar una respuesta a un problema verbal aritmético aditivo-multiplicativo directo cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

La cuestión Q_{11} nos permitirá establecer la estructura aditiva de sumandos y sustraendos y la Q_{12}, la estructura multiplicativa. La respuesta a la cuestión Q_2 nos mostrará las ventajas de considerar a los sumandos y sustraendos como nuevos números y permitirá establecer la relación de orden entre números enteros. La cuestión Q_3 enfatiza el hecho de que una ampliación del conjunto de números conocido supone la modificación de las propiedades comunes a todos los números.

A continuación, se explican las diferentes etapas, en las que se descompone el conjunto de actividades de estudio e investigación, asociadas a las cuestiones generatrices del MER y experimentadas en el primer ciclo (12-14 años) de la educación secundaria obligatoria española (ESO). La lista detallada de actividades se presenta en anexo.

3. Contexto de la experimentación y etapa preliminar en las actividades de estudio e investigación

Las actividades de estudio e investigación presentadas en el anexo y que comentaremos a continuación han sido experimentadas en un instituto de educación secundaria de Barcelona, en 1.º y 2.º de ESO (12-13 años y 13-14 años, respectivamente) durante los cursos 2008-09 y 2009-10. Los alumnos pertenecían a una clase social media, media-alta, estaban razonablemente motivados por sus estudios y no presentaban problemas graves de conducta. El número de niñas y niños era equilibrado.

La periodicidad de las clases fue de tres horas semanales de las cuales dos eran de trabajo en grupos y una de puesta en común y corrección del trabajo realizado y de trabajo individual. En 1.º de ESO había 30 alumnos y se formaron grupos de 4 o 5 alumnos, mientras que en 2.º de ESO había 22 alumnos y los grupos fueron de 3 alumnos.

Las tareas que los alumnos debían realizar se organizaron en siete sesiones (ver anexo). Las seis primeras (sesiones 0-5) se desarrollaron en 1.º de ESO a lo largo de 15 horas de clase. La séptima sesión, precedida de una sesión de repaso de las tareas realizadas el curso anterior, se desarrolló en 2.º de ESO durante 9 horas de clase.

La etapa preliminar consta de una única actividad (la tarea 0 de la sesión 0). Con ella se pretende poner de manifiesto la existencia de un tipo de problemas que aparecen como una ampliación de los problemas aritméticos realizados hasta el momento por los alumnos, pero que no se pueden resolver con las estrategias aritméticas al uso. En la tarea 0, la solución del apartado Aa puede encontrarse cambiando las fichas blancas por fichas rojas, sin embargo el apartado Ab exige construir una tabla de valores, lo que ya no garantiza la generalidad de la solución. En el apartado B es más difícil encontrar una solución dando valores, de hecho muchos de los grupos de alumnos no la encuentran. Toda esta problemática permite al profesor plantear la necesidad de buscar nuevas estrategias de resolución basadas en la utilización de letras para indicar aquellos datos que inicialmente son desconocidos pero que intervienen en la resolución del problema. También le permite incidir en la importancia de realizar una actividad formal de manipulación de expresiones algebraicas a partir de problemas con enunciados sencillos para aprender esas nuevas estrategias.

4. Primera etapa en las actividades de estudio e investigación

La primera etapa (sesiones 1, 2 y 3) responde a la subcuestión Q_{11} que a su vez se descompone en las siguientes:

Q_{111}: ¿Cómo expresar algebraicamente el programa de cálculo aditivo que soluciona un problema verbal aritmético aditivo directo cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_{112}: ¿Cómo comparar programas de cálculo aditivos?

Q_{113}: ¿Cómo encontrar modelos algebraicos más simples de un programa de cálculo aditivo?

El objetivo prioritario de esta primera etapa es que, a través de la simplificación de las expresiones algebraicas, los alumnos pasen de las sumas y restas entre números a la composición de sumandos y sustraendos, y del significado operativo binario de los signos «+» y «–» (signos que en aritmética indican una operación binaria entre números) al significado operativo binario generalizado (signos que en álgebra indican que el número que les sigue tiene un papel como sumando o sustraendo). Su razón de ser es la economía de gestión y justificación del cálculo algebraico. En esta etapa quedarán establecidas las reglas de composición de sumandos y sustraendos.

En realidad, se trata de reinterpretar las operaciones aritméticas de suma y resta como composición de traslaciones. Y para ello es fundamental la gestión de programas de cálculo en los que intervengan letras y números. Si tenemos que efectuar la operación $13 - 5 - 3$, entendemos que el primer signo «–» indica una operación binaria entre los números 13 y 5, y el segundo una operación binaria entre los números 8 y 3. Pero, si escribimos $b - 5 - 3$, el hecho de que la primera operación no se pueda efectuar cambia completamente la interpretación que hay que dar a los signos «–». Ahora, hay que entender que a «*b*» le tenemos que restar 5 y después restar 3, lo que es equivalente a restar 8 y, por tanto, $b - 5 - 3 = b - 8$. Es decir, hay que reinterpretar las operaciones binarias en términos de composición de traslaciones. Si componemos la traslación «restar 5» y la traslación «restar 3», se obtiene la traslación «restar 8». Y ahora «–» y «+» ya no son signos que intermedian entre dos números (signos operativos binarios), sino signos que afectan a un solo número para indicar su papel como sumando o sustraendo (signos operativos binarios generalizados).

Hay que advertir que en esta introducción de los números enteros se invierte el recorrido escolar habitual en la presentación de las notaciones.

Se comienza presentando la notación incompleta, es decir, la notación en la que se han suprimido los signos «+» que indican operación binaria (por ejemplo, $-4-2$) para terminar presentando las notaciones completas (por ejemplo, $(-4)+(-2)$). La razón de este cambio es, que si se analizan las técnicas de cálculo algebraico, se observa que se trabaja siempre con notaciones incompletas y ante una expresión escrita en notación completa, se procede, en primer lugar, a transformarla suprimiendo todos los signos «+» que indican operación binaria. Por tanto, los cálculos se realizan a partir de expresiones escritas en notación incompleta.

El segundo objetivo es el de enfatizar la «diferencia» frente a la «resta». En aritmética, la resta es una operación que se asocia, sobre todo, con la acción física de «quitar de donde hay». Aun cuando, también se le da el significado de diferencia, no es el significado prioritario. En estas circunstancias, una expresión como $3-7$ carece de sentido porque «de donde solo hay 3 no se puede quitar 7». Se necesita que el primer término de la operación sea un número mayor o igual que el segundo término. Sin embargo, en álgebra es frecuente que no pueda establecerse de antemano cuál de los términos es mayor y por eso es fundamental entender las restas como diferencias porque, en tal caso, una diferencia negativa tiene sentido: nos cuantifica la diferencia y nos dice también que el primer término es menor que el segundo. De hecho, una de las técnicas utilizadas para averiguar si una expresión algebraica es mayor o menor que otra consiste en calcular su diferencia y estudiar cuándo toma valores positivos o negativos.

El tercer objetivo es el de hacer una presentación funcional de distintos objetos del álgebra lineal, enfatizando su sentido y sin que su aparición obligue a poner inmediatamente en marcha las técnicas y la nomenclatura propias de este ámbito. Interesa, ante todo, que el alumno reflexione sobre la elección adecuada de las variables o parámetros para obtener un buen modelo algebraico del problema y sepa después sacar el mejor partido del modelo, obteniendo la mayor cantidad posible de información. Los objetos que se presentan en esta propuesta didáctica son: la letra entendida como variable, incógnita o parámetro; las funciones afines con sus valores numéricos y tablas de valores, presentadas como expresiones algebraicas o fórmulas; las igualdades lineales en su doble vertiente de identidades y ecuaciones lineales; las desigualdades e inecuaciones lineales; los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales; el cambio de variable y la parametrización de las variables o incógnitas.

El cuarto objetivo es el de hacer evidentes desde el primer momento algunas de las diferencias existentes entre las técnicas de cálculo algebraico y las técnicas de cálculo aritmético:

- La complejidad y precisión de los códigos de escritura algebraica, consecuencia, por un lado, del encadenamiento de las operaciones propio de un PCA (en aritmética las operaciones se realizan de una en una y se escriben de manera independiente) y, por otro, de los periodos de trabajo descontextualizado propios del trabajo algebraico en los que el control del cálculo es puramente sintáctico, no semántico como es habitual en aritmética.
- La interpretación del signo «=» como signo que indica una relación de equivalencia entre dos términos y no únicamente como signo que conecta una operación indicada con su resultado, que es el significado más habitual en aritmética.
- A diferencia de las técnicas de cálculo aritmético, las técnicas de cálculo algebraico ya no son algorítmicas, exigen una reflexión y toma de decisiones que dependen de su funcionalidad y son, en parte, idiosincrásicas.
- El cálculo algebraico se rige por un principio de economía que propicia la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos, evitando realizar operaciones que más adelante hay que deshacer y procurando elegir en primer lugar aquellas operaciones que dan lugar a «números redondos» que faciliten las operaciones posteriores.

En la sesión 1 se presentan las expresiones algebraicas aditivas (en general de una variable, pero en algún caso de dos variables) como soluciones de los problemas y como medio para facilitar la obtención de soluciones numéricas (valor numérico de la expresión algebraica) cuando los datos varían. En algún caso, la búsqueda de la solución exige resolver una ecuación mediante tanteo. Se pone, también, de manifiesto la discrecionalidad en la elección de las letras que representan a los parámetros o variables del problema. Por último, se establece la equivalencia entre expresiones algebraicas y se inicia la técnica de simplificación, entendida como búsqueda de la expresión algebraica canónica equivalente a la dada.

La sesión 2 se dedica a la comparación de expresiones algebraicas, haciendo su aparición las desigualdades e inecuaciones y las diferencias en las que el segundo término es un monomio. También se presentan por primera vez las letras acompañadas de coeficientes distintos de 1 y hay que advertir a los alumnos que en álgebra se suprime el signo «×» del producto, habitualmente usado en aritmética, y que la aparición de los coeficientes modifica la jerarquía de las operaciones indicadas en la expresión algebraica.

Las tareas de simplificación de las expresiones algebraicas propuestas en la sesión 3 permiten explicitar la regla de composición de las traslaciones y poner de manifiesto la propiedad conmutativa de dicha composición. Los alumnos se enfrentan, por primera vez, a la necesidad de darle un nuevo sentido a los signos aritméticos, de asumir que ya no se puede pensar en términos de números y operaciones binarias entre ellos, sino en términos de traslaciones y composiciones entre ellas. Además, se presentan aspectos de la técnica de simplificación de expresiones algebraicas relacionados con la economía en la gestión de dichas expresiones y con el hecho de que no es una técnica algorítmica.

5. Segunda y tercera etapas en las actividades de estudio e investigación

La segunda etapa (sesión 4) sigue asociada a las cuestiones Q_{111}, Q_{112} y Q_{113}. Se mantienen los objetivos definidos para la primera etapa, y además hay que añadir, en primer lugar, la reinterpretación del signo «–» como signo operativo unario. Hasta aquí, se operaba componiendo sumandos y sustraendos, pero ahora aparece una nueva problemática, la necesidad de hacer operaciones de operaciones, es decir, la necesidad de sumar o restar términos que a su vez son sumas o diferencias que no pueden efectuarse. Antes un signo «–» indicaba la condición de sustraendo de un término, a partir de ahora deberá interpretarse también como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos. Esto permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis, lo que conduce a las reglas de supresión de paréntesis.

En segundo lugar, se plantea la familiarización de los alumnos con las diferencias con signo y su interpretación desglosada en un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo (positivo o negativo) que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Esto introduce, aunque en forma todavía muy incipiente, el cuarto significado del signo, su sentido predicativo: una diferencia negativa aislada no indica un sustraendo, sino una expresión que tiene una determinada «cualidad» que viene indicada por el signo.

Por último, la aparición de expresiones con paréntesis obliga a precisar más los códigos de escritura algebraica y a dejar establecida una nueva jerarquía de operaciones basada en la existencia de paréntesis que modifica la jerarquía de izquierda a derecha y de productos antes que sumas utilizada hasta el momento.

La tercera etapa (sesión 5), se asocia a las cuestiones Q_{121}, Q_{122} y Q_{123}. Su primer objetivo es dar sentido a los productos de sumandos y sustraendos, para lo cual se presentan problemas verbales multiplicativo-aditivos directos asociados al cálculo de áreas de rectángulos y a sus variaciones en función de la variación de sus lados. Esto conduce a un PCA cuya modelización algebraica exige gestionar el producto entre un sumando o sustraendo y una suma o resta. La utilización de la propiedad distributiva lo reduce a un producto entre sumandos y sustraendos.

Como segundo objetivo nos planteamos establecer las reglas de los signos correspondientes al producto de sumandos y sustraendos y poner de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva en el cálculo algebraico tanto en su sentido de desarrollo de expresiones como de sacar factor común.

Se reproduce el cálculo de diferencias que ya se había trabajado en la sesión anterior, pero con la novedad de que los términos de las diferencias son a su vez productos de números por una suma o diferencia, lo que obliga a gestionar productos de sumandos y sustraendos y a explicitar sus reglas.

6. Cuarta etapa en las actividades de estudio e investigación

Las actividades correspondientes a la cuarta etapa (sesión 6) se asocian a las cuestiones generatrices locales Q_2 y Q_3. El objetivo prioritario es el de dar sentido a los sumandos y sustraendos aislados y al hecho de que las letras puedan tomar valores que a su vez son sumandos o sustraendos, lo que permite una sola fórmula allí donde, de otra manera, serían necesarias varias. Para ello, se presentan problemas verbales aritméticos aditivo-directos en los que tanto los datos desconocidos como la solución son cantidades que pueden interpretarse con un sentido de ganancia o pérdida, o de movimiento unidireccional en un sentido u otro, o como cantidades relativas.

Aparecen, ahora, los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero (ganancias y pérdidas, movimientos a derecha o izquierda, temperaturas, etc.), pero con un tratamiento muy diferente. El trabajo, con los modelos concretos en el ámbito aritmético, no proporciona una razón de ser de los números enteros, pues basta una modelización aritmética en términos de números naturales para encontrar respuesta a las preguntas planteadas, ni justifica sus reglas de cálculo. En cambio, la utilización de esos mismos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas. Por ejemplo, si damos a las letras valores numéricos positivos y negativos podemos calcular la diferencia de temperaturas utilizando una sola fórmula, independientemente de que sean temperaturas sobre cero o bajo cero, o la distancia entre dos móviles que parten de un mismo punto, independientemente de que se muevan en un sentido o en otro. Y todo esto conduce a la reinterpretación de los sumandos y los sustraendos como nuevos números: los números enteros, y a la aparición de un nuevo significado de los signos «+» y «–»: su sentido predicativo. Ya no son signos que indican una operación, sino signos que indican una «cualidad» de los números.

Otros objetivos de esta etapa son: explicitar las reglas de suma, resta, producto y división euclídea de los números enteros (explicitadas anteriormente en términos de reglas de cálculo entre sumandos y sustraendos), establecer una estructura ordinal de los números enteros compatible con la suma, constatar que esos nuevos números ya no cumplen las mismas propiedades que cumplen los números naturales y volver a darle a los signos «+» y «–» una valencia como signos que indican operaciones binarias entre números enteros, lo que nos lleva a la notación algebraica completa.

7. A modo de síntesis

Finalmente, queremos resaltar algunas de las diferencias, a nuestro juicio, más importantes, entre la introducción escolar de los números enteros que presentamos en este trabajo y la introducción escolar habitual en el sistema educativo español. En nuestra propuesta, se opta por una:

– introducción en un entorno algebraico, frente a una introducción en un entorno aritmético;
– introducción funcional, ligada a las necesidades del cálculo y de la modelización algebraicos, frente a una introducción formal ligada a la definición de número entero;
– introducción que muestra la verdadera «razón de ser» de los números negativos, frente a una introducción que no justifica de forma creíble su necesidad;
– introducción en la que se ponen de manifiesto sucesivamente y de manera cuidadosa las distintas valencias o significados de los signos «+» y «–», frente a una introducción que no los considera objeto de estudio;
– introducción en la que el punto de partida es la notación algebraica incompleta (notación que suprime el signo operativo binario de la suma) para llegar finalmente a la notación completa, frente a una introducción cuyo punto de partida es la notación algebraica completa.

Esta introducción de los números enteros, dirigida fundamentalmente a desarrollar las reglas operatorias de los signos y las técnicas de simplificación de expresiones algebraicas, constituye un paso previo para afrontar la primera etapa del proceso de algebrización que se define en el trabajo de Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón de este mismo libro.

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 25*, 5-38.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM*, 10.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Zaragoza)*, 2, 529-542.

Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier, Francia: IUFM.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x, 12*, 5-32.

Anexo

Sesión 0. Problema inicial

Tarea 0. Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos. Al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 fichas rojas y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas. Indica quién gana la partida en los casos siguientes:

– Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
– Las fichas blancas valen 1 punto menos que las rojas.
– ¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si Eva y Bernardo empatan?

Sesión 1. ¿Cómo construir expresiones algebraicas?

Tarea 1. Laura se llevó sus «tazos» al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 «tazos» y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos «tazos» le quedaron después de jugar?

Tarea 2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Girona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Girona? Completa las tablas siguientes:

Nº inicial de pasajeros	Nº final de pasajeros
427	
1582	
A	

Nº inicial de pasajeros	Nº final de pasajeros
	45
	876
	C

Tarea 3. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?
Si María nos dice que le han quedado 30 €, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos? ¿Y si le quedan 15 €? ¿Y si solo le quedan 5 €?

Tarea 4. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas. ¿Cuántas vacas y ovejas tiene ahora? ¿Cuántos animales en total?

Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas.

Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales
80	150				
			65	120	
50					
				90	

Tarea 5. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.
e_1) $a + 5 + 8 – 6$; e_2) $b – 6 – 10 – 4$; e_3) $12 – a – 5$.

Sesión 2. ¿Cómo comparar expresiones algebraicas?

Tarea 6. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

Tarea 7. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indicar cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:
(a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.
(b) El regalo cuesta 24 €.
(c) ¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Tarea 8. Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:

María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

(a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

(b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y este 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Tarea 9. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

e_1) $x + 1$, $x - 10$; e_2) $p - 7$, $p - 3$; e_3) $2a + 5$, $3a + 12$;
e_4) $25 - z$, $25 - 2z$; e_5) $a - 4b$, $a + b$; e_6) $3n + 5$, $2n + 30$.

Tarea 10. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

e_1) $b - 45$; e_2) $r - 27 + 2r - 38 + 17 - r$; e_3) $33 - 2a$.

Tarea 11. Escribe una expresión algebraica que sea

e_1) 6 unidades mayor que $y - 13$; e_2) 11 unidades menor que $2c - 1$;
e_3) 4 veces mayor que $2n + 3m$; e_4) 11 veces mayor que $16 - 3a$.

Sesión 3. ¿Cómo simplificar expresiones algebraicas?

Tarea 12. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$;

b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$;

c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$.

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Tarea 13. Completa las frases siguientes:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que ______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que ______________________________

Tarea 14. Completa las frases siguientes:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y ______________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y ______________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Tarea 15. Simplifica la expresión algebraica

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Lee toda la expresión de izquierda a derecha y observa si se suma y resta un mismo número. En ese caso, se tachan los dos y se vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos. Realiza esa operación todas las veces que se pueda.
2) Vuelve a leer toda la expresión y realiza primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

Tarea 16. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles:

a) $30 + w - 10 + 12 - v$;
b) $h - 25 - 25 + 50 - 7$;
c) $m - 45 + 44 - 17 + 18 + 27 - 3$;
d) $100 - a - b - c - 80 + 6$;
e) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$;
f) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$;
g) $65 + 84 - 82 - 13 + 15 - 16 - 4$.

Tarea 17. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles:

a) $p - 15 + 85 + 36 + 24 - 35 - 1$;
b) $100 - r - n + 48 - 99 - 18$;
c) $s + 72 - 67 + s + 67 - 48 - 72 - 5 - s + 50$;
d) $3f + 77 + 5f - 82 + 23 + 82 - 2f$;
e) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$;
f) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$;
g) $35 - a - a - a - a - a + 6$.

Sesión 4. ¿Cómo hallar la diferencia entre expresiones algebraicas?

Tarea 18. Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

678 + 99, 47 + 98, 157 – 99, 123 + 39, 87 – 29,
601 – 103, 427 + 397, 212 – 198, 117 – 22.

Tarea 19. Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:

765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1;

80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1;

141 – (100 + 2) = 141 – 102 = 141 __ 100 __ 2;

92 – (42 + 3) = 92 – 45 = 92 __ 42 __ 3;

325 + (200 – 3) = 325 – 197 = 325 __ 200 __ 3.

Tarea 20.

a) Efectúa les operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.
   12 – (8 – 3), 12 – (8 + 3), 12 + (8 – 3), 12 + (8 + 3).

b) Efectúa les operaciones siguientes:
   12 – 8 – 3, 12 – 8 + 3, 12 + 8 – 3, 12 + 8 + 3.

c) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado a) las operaciones del apartado b) que dan el mismo resultado:

Apartado a)	Apartado b)
12 – (8 – 3)	
12 – (8 + 3)	
12 + (8 – 3)	
12 + (8 + 3)	

Tarea 21. Completa las siguientes frases:

Sumar *a* + *b* es lo mismo que ________________ *a* y _________________ *b*.

Sumar *a* – *b* es lo mismo que ________________ *a* y _________________ *b*.

Restar *a* + *b* es lo mismo que ________________ *a* y _________________ *b*.

Restar *a* – *b* es lo mismo que ________________ *a* y _________________ *b*.

Tarea 22.

a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
D	
	E

Tarea 23. Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:

i) $7p + 3q$ y $2p – 2q$;

ii) $4t – 6 – 15$ y $4t –3– 2$;

iii) $21 – 2m + 3 – 23 + 5m$ y $10m – 30 + 5m + 25$.

Tarea 24. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

Tarea 25. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

1) $a – (a – 8) + b – 8 – (a + 10)$; 2) $17 – (4 – x) + (5 – y) – 15 – 2$;

3) $c + (25 – c + 15) – (25 – c – 15)$; 4) $2m– (7 – 5m) – (7m + 5)$;

5) $20 – 10z – (5z – (10 – 2w))$.

Tarea 26. Cuando las expresiones algebraicas solo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin llevar a cabo las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor realizar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) 45 – (371 – 87) + 372 – 87	Deshacer paréntesis:	SÍ	NO
b) 8 + 20 – (45 – 44 + 3)	Deshacer paréntesis:	SÍ	NO
c) 13 + (27 – 20) – (25 – 10 – 15)	Deshacer paréntesis:	SÍ	NO
d) 5 – (4 – (3 – (2 – 1)))	Deshacer paréntesis:	SÍ	NO
e) 4578 + 3127 – 578 – (127 + 841 + 512) + 841 + 12	Deshacer paréntesis:	SÍ	NO

Sesión 5. ¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas?

Tarea 27. Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura). Si nos dicen que en un rectángulo es $a = 3$ cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo? Si ahora me dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo y averigua cuánto habrá aumentado su área.

Tarea 28. En un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm, el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm. Dibuja los dos rectángulos.

a) ¿Qué pasará con el área del segundo rectángulo? ¿Disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo? ¿Cuánto?

b) ¿Qué longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

Tarea 29. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado (5 cm), construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo de los tres rectángulos.

b) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Tarea 30. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a)$; b) $3p + 6q - 3(p + 12 + 2q)$;

c) $n(3 + 7n - 6) - m\,(5 - 6m + 2)$; d) $3(6 - 5(3b - 4 + c) + 10\text{b}) + 2(5\text{b} - 2\text{c})$;

e) $7(5 - a) + 11(5 - a) - 9(5 - a)$.

Tarea 31. Completa las siguientes frases:

Sumar $2(a + b)$ es lo mismo que ______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Sumar $2(a – b)$ es lo mismo que ______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Restar $2(a + b)$ es lo mismo que ______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Restar $2(a – b)$ es lo mismo que ______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Tarea 32. Tres rectángulos tienen un lado común que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, $(6 + 2a)$ cm^2 y $(6 – 4a)$ cm^2. ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo? ¿Cuál es la diferencia entre los lados distintos de los rectángulos?

Tarea 33. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) $16(2n + 3m) – 10(2n + 3m)$ es______veces___________que $6m + 4n$;

b) $36t – 4$ es______veces___________que $18t – 2$;

c) $30c – 60 + 20b$ es_______veces___________que $2b + 3c – 6$.

Tarea 34. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17 – 4 \cdot 3) + 5 – 3^3$;

b) $(9^2 – 7^2) – (9 – 7)^2$;

c) $47(4 \cdot 15 – 35) – 17 \cdot 25$;

d) $45 – 5(20 – 4(15 – 3(10 – 6)))$;

e) $8 + 2 \cdot 6 – 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 – 4 \cdot 6$.

Tarea 35. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes y después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

Sesión 6. ¿Cómo operar los números con signo?

Tarea 36. Alberto juega a los cromos. En la primera partida pierde 3 cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde 4 cromos.

Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
+4	
–6	
	+5
	–3

Tarea 37. Alberto es muy despistado y después de jugar dos partidas solo se acuerda de que en la primera gano cuatro cromos. Ana también ha jugado a los cromos y sabe que en la primera partida perdió dos cromos, pero como también es muy despistada, tampoco se acuerda de lo que pasó en la segunda partida.

a) Escribe el número de cromos que ganó o perdió Alberto y el número de cromos que ganó o perdió Ana y la diferencia entre ellos.

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre los cromos ganados en total por Alberto y los ganados en total por Ana
A	*B*	
+3	–1	
–3	+4	
+2		+3
–1		+4
	+5	–2
	–2	+2

Tarea 38. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

e_1) $p – q + 10$ siendo $p = +7$ y $q = +3$;

e_2) $12 – x – y$ siendo $x = –5$ e $y = +8$;

e_3) $2(6 – a)$ siendo $a = –4$;

e_4) $a – 3(b – 1)$ siendo $a = 2$ e $y = –6$;

e_5) $3(2 –3n) – 2(3 – m)$ siendo $n = –5$ y $m = 1$.

Tarea 39. Efectúa las siguientes operaciones:

e_1) (–200) + (+300) + (–100) + (–100); e_2) (+37) – (–40) – (+23) + (–17);

e_3) 8 + 2((–72) – (–12)) –18; e_4) (4*x* – 7*x*) – (2*x* – 6*x*) + (5*x* – 10*x*);
e_5) ((–5) + (–3) – (–1)) – ((–5) – (–3) + (–1)).

Tarea 40. Completa las siguientes frases:
Sumar un número que suma es lo mismo que ______________ dicho número.
Sumar un número que resta es lo mismo que ______________ dicho número.
Restar un número que suma es lo mismo que ______________ dicho número.
Restar un número que resta es lo mismo que ______________ dicho número.

Tarea 41.

a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y halla la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra: 1) 6 sobre cero y 5 bajo cero; 2) 7 sobre cero y 2 sobre cero; 3) 3 bajo cero y 8 bajo cero.
b) Si llamamos *T* a la temperatura más alta y *t* a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa fórmula para encontrar las diferencias en los casos anteriores. ¿Se obtienen las mismas diferencias en uno y otro caso?

Tarea 42. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio, si la diferencia es negativa, eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo. Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo < ó > entre ellos.

a) (+12) – (+8)	+12___+8
b) (+5) – (–10)	+5____–10
c) (–6) – (+2)	–6____+2
d) (–15) – (–3)	–15____–3
e) (–11) – (+11)	–11____+11
f) (–2) – (–6)	–2_____–6

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo + ó –. Sabemos además cómo sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos *números enteros.*

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó –. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama *enteros positivos* y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo – se les llama *enteros negativos.*

Se dice que –2 es el *opuesto* de +2 y que +2 es el opuesto de –2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los *números racionales.*

Tarea 43.

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros:

+14, –18, +36, +4, –12, –5, –20, +10, +8, 0.

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros:

7, –7, 1500, –3568, –3569, –83, 1, 13, –100, 5.

Tarea 44.

a) Coloca el signo < ó > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras solo pueden tomar valores positivos:

1) $9 - a$_____$6 - a$;

2) $4q - 5$_____$4q - 8$;

3) $z + 2$______$2z + 5$;

4) d______$- d$;

5) $m - 2n$_____$3m - n$.

b) Coloca de nuevo el signo < ó > entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras pueden tomar valores positivos y negativos:

1) $9 - a$_____$6 - a$;

2) $4q - 5$_____$4q - 8$;

3) $z + 2$_____$2z + 5$;

4) d______$- d$;

5) $m - 2n$_______$3m - n$.

c) En las desigualdades anteriores, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

Tarea 45. ¿Para qué tipo de números son ciertas las siguientes desigualdades?

$a \leq a + b$; $z \geq z - x$; $b \leq b \cdot c$; $b \geq b : c$.

Tarea 46. En los siguientes pares de expresiones algebraicas, donde «*m*» y «*n*» son números naturales, indica cuántas veces es mayor o menor una que la otra.

e_1) $16(2n + 3m) - 10(2n + 3m)$ y $4n + 6m$;

e_2) $18t - 2$ y $36t - 4$;

e_3) $5(6b + 9c - 18)$ y $3(30c - 60 + 20b)$;

e_4) $56(456x - 319y)$ y $7(456x - 319y)$.

Tarea 47. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros:

$(+3) \cdot (+5)$, $(+3) \cdot (-5)$, $(-3) \cdot (+5)$, $(-3) \cdot (-5)$.

Tarea 48. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Tarea 49. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta:

$(+3) \cdot (\_\_\_\_) = +12$, $(-7) \cdot (\_\_\_\_) = +21$, $(+5) \cdot (\_\_\_\_) = -15$, $(-6) \cdot (\_\_\_\_) = -24$.

Tarea 50. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

$(+12) : (+3)$, $(+21) : (-7)$, $(-15) : (+5)$, $(-24) : (-6)$.

Análisis de la dinámica de estudio en un curso universitario de matemática

Ana Rosa Corica y María Rita Otero
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, UNCPBA, Argentina

Abstract. This work analyses the praxeologies concerning the study of the limit and continuity of functions studied in a course of university calculus. The anthropologic theory of the didactic turned out to be a powerful tool to describe and understand the praxeologies being studied. The main results indicate that there are considerable differences in running the theoretical and practical classes, which do not favor the integration of the praxeologies studied in the course.

Résumé. Nous analysons dans ce travail les praxéologies relatives à l'étude de la limite et de la continuité de fonctions à l'université. La théorie anthropologique du didactique s'est avérée être un outil puissant pour décrire et comprendre les praxéologies étudiées. Les principaux résultats montrent qu'il existe des différences importantes dans la gestion des séances théoriques et pratiques, qui ne favorisent pas l'intégration des praxéologies étudiées dans ce cursus.

Resumen. En este trabajo se analizan las praxeologías en torno al estudio del límite y continuidad de funciones, que se acaban por estudiar en un curso de cálculo universitario. La teoría antropológica de lo didáctico resultó ser una poderosa herramienta para describir y comprender las praxeologías que se estudian. Los principales resultados indican que existen diferencias en cuanto a la forma de gestión de las clases teóricas y prácticas, que no favorecen la integración de las praxeologías que se estudian en ellas.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 605-626)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

En este trabajo se presentan resultados de una investigación más amplia, que se focaliza en la descripción e interpretación del proceso de estudio de praxeologías en torno al límite y continuidad de funciones, que son desarrolladas en un curso de cálculo universitario.

Como referencial teórico se adoptó el de la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999). Esta teoría resultó ser una poderosa herramienta para describir y comprender las praxeologías que se estudian en el curso. De acuerdo con la metodología que se desprende del marco teórico, en la globalidad de nuestra investigación se construyó una organización matemática de referencia y se reconstruyó la organización matemática a enseñar y la efectivamente enseñada. De esta última, hemos realizado una reconstrucción de la Organización Matemática (OM) y Organización Didáctica (OD) asociada. En este trabajo presentamos resultados relativos al análisis de dichas organizaciones.

2. Metodología

2.1. Descripción del curso bajo estudio

Se propone un estudio de corte descriptivo e interpretativo sobre un curso de cálculo, que se imparte en una facultad de ciencias exactas de una universidad argentina. El curso, se compone de 283 estudiantes —cuyas edades oscilan entre los 18 y 20 años— y corresponde al primer año de toda la formación en ciencia básica y aplicada que ofrece la facultad.

El curso dura cuatro meses y se estructura en clases teóricas (CT) y clases prácticas (CP) que se imparten dos veces por semana. Cada CT tiene una duración de 90 minutos, mientras que la duración de cada CP es de 120 minutos. También se ofrece semanalmente una clase de consulta que dura 120 minutos, donde los estudiantes tienen la oportunidad de realizar consultas personalmente.

El curso está a cargo de un *profesor* (P_1), quien se ocupa exclusivamente de organizar y dirigir las CT, un *coordinador* (P_2), quien organiza las CP y dirige en ciertas ocasiones las CT, y de profesores que dirigen las CP.

Las CT se desarrollan en un aula tipo anfiteatro para la totalidad de estudiantes inscritos, mientras que para las CP, la totalidad de estudiantes se distribuye en 4 aulas. Estas clases están a cargo de un profesor que la institución denomina *responsable*, cuya actividad principal es la de *dirigir* la clase, es decir, para las tareas propuestas, decidir las técnicas a emplear y las instancias de la clase en que se realizan, y dos profesores que la institución denomina *profesores ayudantes*, que cumplen el rol de *asistir* a las consultas que los estudiantes solicitan personalmente.

La actividad en las CT se reduce a que el profesor presenta la resolución de las tareas con muy baja participación de los estudiantes. Durante las CP también la actividad se reduce a que el profesor presenta la resolución de las tareas propuestas, pero aquí hay mayores oportunidades de diálogo entre profesores y alumnos. Además, se destina aproximadamente una hora de cada CP para que los estudiantes resuelvan tareas y consulten sus dudas personales.

Durante los cuatro meses de duración del curso se propone estudiar nueve unidades temáticas, cuyo desarrollo incluye material teórico y práctico:

Unidad 1. Estructura del conjunto de los números reales.

Unidad 2. Funciones.

Unidad 3. Sucesiones de números reales.

Unidad 4. Límite y continuidad de funciones.

Unidad 5. Derivadas.

Unidad 6. La integral definida.

Unidad 7. Cálculo de primitivas.

Unidad 8. Series numéricas.

Unidad 9. Series de funciones, series de potencias y serie de Taylor.

El diseño del material teórico, que está a cargo de $P_{1,}$ consta de teoremas, definiciones y proposiciones fundamentales para el proceso de estudio de las OM. En cambio, el material para las CP, que diseña P_2, básicamente se estructura mediante una introducción, en la que se enuncian los principales teoremas, definiciones y proposiciones para realizar los tipos de tareas que se proponen a continuación, y la presentación de algunos ejemplares de tareas resueltos.

Para la acreditación del curso se propone la realización de exámenes individuales y escritos. Se ofrecen dos formas para la evaluación y los estudiantes pueden optar por una sola.

La *modalidad promoción* consiste en tres exámenes individuales y escritos; en cada uno se evalúa una unidad temática o módulo, y hay dos instancias para poder volver a presentarlos en caso de no aprobarlos (a estos tipos de evaluación se les denomina de compensación). Los exámenes se integran con tareas de características similares a las estudiadas tanto en las CP como en las CT, y se aprueban con 4 puntos sobre 10. Esta opción de evaluación permite promocionar el curso [1], al obtener 7 o más en cada uno de los exámenes o en los primeros exámenes de compensación.

*La modalidad tradicional c*onsta de un examen parcial, individual y escrito, que evalúa tareas de características similares a las desarrolladas en las CP, y también contempla dos exámenes de compensación. Los exámenes se aprueban con 4 puntos como mínimo sobre 10 puntos, ya sea en el examen parcial o en los dos de compensación. La aprobación implica solo la cursada de los módulos y requiere que los estudiantes aprueben a posteriori (en un término de tres años) un examen, escrito e individual, que incluye tareas similares a las estudiadas en las CP y CT para concluir la aprobación del curso.

Los exámenes de *promoción* se aplican aproximadamente cada cuatro o cinco semanas, mientras que los de *tradicional* ocurren al finalizar todo el desarrollo del curso.

2.2. Recogida de datos

En el curso de cálculo se realizaron tres meses de *observación no participante* y se recabaron las versiones en audio de las clases teóricas y prácticas, las explicaciones que hicieron los profesores en el pizarrón, los apuntes de clase de los alumnos y los exámenes de los estudiantes. Los registros de audio de las CT se llevaron a cabo en aulas tipo anfiteatro.

1. Cuando se indica que un estudiante promociona significa que aprueba el curso, mientras que si obtiene una calificación entre cuatro y seis puntos en cada examen parcial aprueba la cursada, pero deberá acreditar un examen individual y escrito, en el término de tres años, que engloba tareas con características similares a las estudiadas en las CP y las CT.

También se registró toda la escritura que hizo el profesor en el pizarrón, lo cual dio mayor claridad en el momento de reconstruir la OM. En las CP, el sistema de audio fue llevado por un *profesor ayudante*, con el cual se recabó la actividad del *profesor responsable* y también algunas consultas de los estudiantes al *profesor ayudante*. Tal procedimiento en las CP se llevó a cabo en dos de los cuatro cursos que se desarrollaban por cada encuentro semanal. Se trabajó con aquellos cursos donde los *profesores ayudantes* llevaban el sistema de audio; sin embargo, el seguimiento de determinadas CP fue imposible porque los profesores, en ocasiones, no se ocupaban de los mismos cursos, de ahí que no se mantuviera la continuidad en el proceso de estudio. Además, para un mismo curso de CP nada garantizaba que fueran los mismos alumnos porque la asistencia no era obligatoria, y podían concurrir a cualquiera de las cuatro CP del mismo tipo que se impartían cada semana, optando por aquella que mejor se ajustara a sus conveniencias.

El proceso de estudio en torno al límite y continuidad de funciones de una variable real tuvo lugar durante cuatro CT y cuatro CP. Las CT estuvieron dirigidas por dos profesores (P_1 y P_2). Estas clases fueron desarrolladas para todos los estudiantes a cargo de uno de los dos profesores. Por otro lado, las CP estuvieron a cargo de un profesor que *dirigía* el proceso de estudio y dos ayudantes. Como la totalidad de los estudiantes del curso se distribuyen en distintas aulas, estas estuvieron dirigidas por diferentes profesores responsables (los identificamos con P_3, P_4, P_5, P_6 y P_7).

2.3. Instrumento de análisis

El análisis sobre las clases del curso requirió la transcripción de los audios de la totalidad de aquellas grabaciones relativas al estudio del límite y continuidad de funciones. Posteriormente, los registros de cada clase se segmentaron en episodios, los que se distinguen como diferentes cuando el discurso gira en torno a una determinada tarea. Con el objetivo de organizar y estudiar los datos obtenidos de cada clase se elaboraron dos tablas. La tabla 1 nos permitió efectuar un análisis profundo acerca del proceso de estudio, tal y como lo vivieron sus protagonistas.

En la tabla 1 se distinguen los *géneros de tareas* junto a las *tareas* que los componen y que son realizadas en el aula por sugerencia del profesor responsable. También, en esta tabla se recogió el conjunto de acciones realizadas en el aula para resolver una cierta tarea (*técnicas*) y los elementos tecnológicos (*bloque tecnológico*) que aparecieron en la clase en forma explícita.

Género de tareas	**Tareas**	**Técnicas**	**Bloque tecnológico**

Tabla 1. Análisis del proceso de estudio tal como lo ven sus protagonistas

La tabla 2 permitió realizar un análisis global del proceso de estudio, vinculado con el *topos* del alumno y el profesor dentro del proceso de estudio. La tabla se confeccionó a partir de elementos que conforman la TAD, y se generaron categorías para profundizar sobre aspectos relacionados con la actividad del profesor y el estudiante, que no era posible recoger desde el referencial teórico asumido.

<table>
<tr><th rowspan="3">Episodio</th><th rowspan="3">Noción matemática</th><th rowspan="3">Género de tareas</th><th colspan="2">Momento didáctico</th><th colspan="3">Gestos del profesor</th><th colspan="2">Gestos del alumno</th></tr>
<tr><td rowspan="2">MDP</td><td rowspan="2">MDS</td><td colspan="2">GI</td><td rowspan="2">GP</td><td rowspan="2">GA</td><td rowspan="2">GP</td></tr>
<tr><td>ISD</td><td>ISF</td></tr>
</table>

Tabla 2. Análisis del proceso de estudio vinculado
al *topos* del alumno y profesor

La primera columna, *Episodio* junto a la segunda, *Noción matemática*, y la tercera *Género de tareas*, permite realizar una primera descomposición intuitiva del proceso de estudio. Destacamos que en la columna *Noción matemática*, se busca identificar aquellos objetos matemáticos que aparecieron explícitamente para ser estudiados, tanto en el discurso oral del profesor como en el de los alumnos dentro del episodio considerado. La cuarta columna, *Momento didáctico,* indica el momento predominante del estudio dentro de cada episodio, así como los momentos secundarios. Se trata de una información indicativa que sirve para que el observador se sitúe dentro del proceso de estudio y lea su desarrollo en forma compacta. Los momentos que se distinguen son los siguientes:

Primer encuentro (PE). Momento del primer encuentro con la organización matemática estudiada.

Exploratorio (ETET). Momento de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica.

Constitución del entorno tecnológico-teórico (CETT). Momento de la constitución del entorno tecnológico/teórico relativo a una técnica.

Trabajo de la técnica (TT). Momento del trabajo de la técnica.

Institucionalización (I). Momento de la institucionalización.

Evaluación (E). Momento de la evaluación

En la quinta columna se registran los *gestos del profesor*. Esta categoría se formula en adhesión a la idea de que en el desarrollo del proceso didáctico existen ciertos gestos profesorales, es decir, ciertas actividades de la práctica docente, que se construyen a lo largo de los años a partir de su experiencia en la institución. Estos gestos, *de invitación y de posicionamiento*, son interpretados como medio para la ayuda al estudio.

Así, con el término *gestos de invitación* (GI) se hace referencia al estímulo a los estudiantes mediante preguntas con el fin de que estos se involucren en el proceso de estudio en forma explícita, es decir, registra el número de preguntas propuestas por el profesor para que los estudiantes respondan. Aquí diferenciamos el tipo de pregunta que puede realizar el docente con las siguientes subcategorías:

Invitación en sentido débil (GISD). En este sentido cada pregunta exige una respuesta en sentido débil bajo la forma de un enunciado aportando la información pedida. La persona cuestionada conoce la respuesta o al menos la puede conocer fácilmente.

Invitación en sentido fuerte (ISF). Se refiere a la realización de preguntas para las que la persona interrogada no dispone de ninguna técnica para realizar la tarea solicitada, resultando *problemática* para ella.

Con el término *gestos de posicionamiento* (GP) se trata de producir o indicar mediante la escritura, comentarios o preguntas que sirven de *camino* para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión. Identificamos dos tipos de gestos de posicionamiento:

Resolver tareas (RT). La actividad del profesor se concentra en interpretar las tareas y proponer explícitamente las técnicas para realizarlas.

Orientación de funciones del estudiante (OE). Se refiere a las acciones del profesor dirigidas a dar indicios a los estudiantes de las técnicas a emplear para la resolución de las tareas propuestas, sin explicitar por completo la manera de hacer la tarea.

La sexta columna recoge los *gestos del alumno* como son los gestos de *aceptación* y los gestos de *posicionamiento*. Con el término *gestos de aceptación* (GA) se registra el número de respuestas de los estudiantes a los gestos de invitación de los profesores. Se registra la respuesta y no el número de estudiantes del curso que dio la respuesta. *Con el término gestos de posicionamiento* (GP) se registran comentarios, respuestas o formulación de preguntas por parte de los estudiantes, que sirven para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en el curso. Un gesto de posicionamiento es producto del proceso de estudio en el que se encuentran involucrados los estudiantes. Hemos identificado tres tipos de gestos de posicionamiento para los estudiantes:

Recepción (R). Actitud neutral de los estudiantes en que todo el tiempo, mientras el profesor explica, permanecen en silencio y parecen estar adquiriendo la información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

Interpretación (I). Seguimiento de técnicas (conceptos y proposiciones) y de los elementos lingüísticos en cada situación. Esto implica, por parte de los estudiantes, la comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

Demanda de información (DI). Estado en el que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

En esta etapa describimos los principales dispositivos y técnicas didácticas utilizados por el profesor para dirigir el proceso de estudio, y posibles repercusiones de tal gestión en la actividad de los estudiantes. Los resultados que se presentan a continuación son el producto del análisis de los registros obtenidos con la tabla 1 confeccionada para cada una de las clases que se estudian.

3. Dinámica del proceso de estudio

3.1. Componentes matemáticos del curso de cálculo

Como se indicó anteriormente, para describir la OD del curso es necesario hacer referencia a la OM que se encuentra vinculada. Con el propósito de situar al lector, desarrollamos algunas características básicas de los componentes matemáticos de la organización que se acaba por estudiar en el curso.

Los componentes matemáticos de la OM efectivamente enseñada (OM_{EE}) constituyen una OM Local (OML) cuya cuestión generatriz indaga acerca de la existencia del límite de funciones de variable real. Esta OML se compone de 14 OMP. Siete de estas OMP se estudian exclusivamente en las CT, y en ellas se consolida el bloque tecnológico que justifica algunas técnicas que se emplean para hacer las tareas que componen las restantes OMP. En las CT se estudian tipos de tareas que refieren a los géneros *definir*, *demostrar*, *calcular* y *analizar funciones;* mientras que en las CP se estudian tareas que hacen referencia a los géneros *calcular*, *analizar funciones* y *representar gráficamente*.

Resaltamos que todas las OMP se definen a partir de tipos de tareas que están asociadas a cuestiones generatrices que conservan el propósito de *cómo resolver las tareas*, obviando la formulación de preguntas del tipo *por qué* o *para qué*, las que *llaman* necesariamente a la conformación y cuestionamiento del entorno tecnológico/teórico, constituyendo un aspecto importante de la exigencia de justificación de las actividades. Lo que interesa en el curso de cálculo es dar respuestas a tareas del tipo *cómo*, es decir las respuestas se limitan a una simple información, que conducen a la construcción de una OML compuesta por OMP vinculadas débilmente. Esto es consecuencia del empleo de técnicas que solo viven en la superficie del saber, es decir, técnicas que requieren el empleo de abundantes elementos tecnológico/teóricos, técnicas que se formulan como únicas e incuestionables. La actividad se concentra en la realización de operaciones algebraicas con límites, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, alimentando un *enfoque algebraico y reduccionista del cálculo*. A estos tipos de tareas se acaban por enfrentar los estudiantes el día del examen, por lo que el dominio de las técnicas del estilo *algoritmos algebraicos* permitirán su aprobación (Corica & Otero, 2008, 2009).

3.2. Estudio de los momentos didácticos preponderantes en cada clase

De cada clase identificamos los tipos de tareas que se estudian y los géneros de tareas a los que se refieren. Para cada género de tarea identificamos los momentos de estudio primarios y secundarios. Por cada género, como momento primario destacamos solo uno, mientras que como momento secundario en ocasiones nos es necesario enmarcar dos. Por lo general, cuando tiene lugar el momento del *primer encuentro* (PE) también tiene lugar el momento de *institucionalización* (I).

Los resultados del análisis de las CT se sintetizan en la tabla 3. Aquí la información no se discrimina por CT, pues si bien la segunda CT (CT_2) estuvo dirigida por P_2 y la primera (CT_1), tercera (CT_3) y cuarta (CT_4) estuvieron dirigidas por P_1, en general las clases conservan una misma estructura. Por otro lado, para las CP se confeccionó la tabla para todas ellas, pues de cada una estudiamos las prácticas en dos cursos, con el propósito de analizar las diferencias en la dinámica de estudio.

Género de tarea	**Momento primario**			**Momento secundario**		
	CETT	**ETET**	**TT**	**PE**	**I**	**ETET**
Definir	8	1	0	7	8	3
Demostrar	13	4	1	9	8	8
Calcular	0	5	1	4	5	0

Tabla 3. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en las clases teóricas

En las CT observamos que los momentos didácticos preponderantes son la *constitución del entorno tecnológico/teórico* (CETT) y el *exploratorio* (ETET). En particular CETT corresponde a los tipos de tareas que engloban los géneros: *definir* y *demostrar*. Por otro lado, dentro de los momentos didácticos que emergen como secundarios, el momento de la *institucionalización* (I) y el del *primer encuentro* (PE) son los más típicos. En las cuatro CT no se realiza el momento de la *evaluación* (E) y, por otro lado, el momento del *trabajo de la técnica* (TT) emerge en el hacer de dos tareas sobre un total de 35 (realizadas durante las cuatro

CT). Es decir, el TT no tiene prácticamente lugar en el proceso de estudio que se gestiona en las CT.

Esta gestión del proceso de estudio se corresponde con lo que Chevallard (1999) considera *estudio tradicional* pues, en particular, el momento CETT aparece como la primera etapa del proceso de estudio. En esta etapa, los gestos del docente se concentran en la resolución de tareas que consolidan el bloque tecnológico de la OM que se (re)construye.

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios		
	ETET	PE	I	E
Calcular	10	3	5	2
Analizar funciones	1	1	0	0

Tabla 4. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la Clase Práctica 1 (CP_1) dirigida por P_3

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios	
	ETET	PE	I
Calcular	9	4	6
Analizar funciones	1	1	0

Tabla 5. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la Clase Práctica 1 (CP_1) dirigida por P_4

En las tablas 4 y 5 se recogen los resultados obtenidos para las CP_1 dirigidas por los profesores P_3 y P_4. Ambos profesores enfatizan el estudio de tareas relativas al género *calcular*, con leves diferencias en el tratamiento didáctico. Pues, P_3 en el hacer de dos tareas propicia la preponderancia del momento de la *evaluación* (E), ya que destina tiempo de la clase para que los estudiantes resuelvan las tareas, propiciando luego discusiones y no solo reduciendo su actividad a *mostrar cómo se resuelven las tareas*, tal como ocurre con el resto de los profesores. En esas instancias P_3 trata de hacer un balance sobre el proceso de estudio que se está gestionando.

En el análisis de estas dos clases se observa una ausencia del momento del *trabajo de la técnica* (TT). Las CP, tal como son propuestas, resultan propicias para cuestionar las técnicas estudiadas en las CT, analizar sus limitaciones, profundizar en su evolución. Esto tendría fundamento en el entorno tecnológico reconstruido en la CT y daría lugar a cuestiones que faciliten el desarrollo de nuevas tecnologías.

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios	
	ETET	PE	I
Calcular	4	1	1

Tabla 6. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la Clase Práctica 2 (CP_2) dirigida por P_5 y P_6

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios	
	ETET	PE	I
Calcular	4	2	2

Tabla 7. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la Clase Práctica 2 (CP_2) dirigida por P_7

En las dos últimas tablas observamos que para ambos cursos las técnicas didácticas empleadas por los profesores ponen de manifiesto los mismos momentos didácticos. En la forma de gestionar el estudio de estas tareas se observa una ausencia de los momentos de la *evaluación* (E) y del *trabajo de la técnica* (TT).

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios
	ETET	I
Analizar funciones	4	4

Tabla 8. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la Clase Práctica 3 (CP_3) dirigida por P_3

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios
	ETET	I
Analizar funciones	4	4

Tabla 9. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la clase práctica 3 (CP_3) dirigida por P_4

En las tablas 8 y 9 observamos que el momento preponderante es el momento *exploratorio* del tipo de tareas y el secundario es el de la *institucionalización* (I).

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios	
	ETET	PE	I
Analizar funciones	2	2	2

Tabla 10. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la clase práctica 4 (CP_4) dirigida por P_3

Género de tarea	Momentos primarios	Momentos secundarios	
	ETET	PE	I
Analizar funciones	2	2	2

Tabla 11. Momentos didácticos preponderantes según el género de tarea al que remiten los problemas estudiados en la clase práctica 4 (CP_4) dirigida P_6 y P_7

Finalmente, en las tablas 10 y 11 observamos que también el momento preponderante para los dos cursos es el *exploratorio* del tipo de tareas (ETET). Como momentos secundarios se destacan el de *institucionalización* (I) y el de *primer encuentro* (PE). Pues, en las CT_3 y CT_4 el profesor P_1 consolida el bloque tecnológico que justifica las técnicas empleadas en el hacer de las tareas que se estudian en CP_4, aquí tiene lugar el PE con la *aplicación* del bloque tecnológico.

En síntesis, observamos que el momento de la *constitución del entorno tecnológico/teórico* (CETT) es exclusivo de las CT, mientras que el momento *exploratorio* (ETET) es transversal a todos los tipos de clases. Destacamos que por lo general, los momentos *primer encuentro* (PE) e *institucionalización* (I) emergen simultáneamente. Por otro lado, la presencia del *trabajo de la técnica* (TT) es prácticamente nula, al igual que el de *evaluación* (E). En el curso, la relación entre los bloques práctico/técnico y tecnológico/teórico es muy asimétrica: mientras el bloque tecnológico/teórico dicta los contenidos al bloque práctico/técnico, este tiene una incidencia nula en la constitución, desarrollo y estructura del bloque tecnológico/teórico. Así pues, los elementos tecnológico/teóricos no emergen para responder a cuestiones o a necesidades que han surgido del desarrollo de las técnicas. Los profesores de las CP no van más allá del momento exploratorio de un tipo de problema, conduciendo a la presentación de técnicas algorítmicas. En esta dinámica, nunca se acaba por construir los elementos tecnológicos, pues estos emergen exclusivamente en las CT. Nunca se llega a alcanzar un verdadero cuestionamiento tecnológico y de las técnicas propuestas por los profesores: solo se exploran y trabajan débilmente, lo que no hace más que prolongar su rigidez en manos de los estudiantes. Esta dinámica del proceso de estudio conduce a la construcción de una OM desestructurada, lo que dificulta la posibilidad de institucionalizarla globalmente: a lo sumo solo se pueden institucionalizar algunos de sus componentes aislados.

Las llamadas clases prácticas del curso bajo estudio las definimos como clases de *exposición* de técnicas, no hay aquí un verdadero momento *exploratorio*, pues por lo descrito, el hacer de las tareas rara vez queda en manos de los estudiantes, y tampoco se propicia un legítimo momento del *trabajo de la técnica*. Según Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997), las clases prácticas son dispositivos didácticos en los que se desarrolla el momento del *trabajo de la técnica*. Aquí se espera que los estudiantes se centren en la resolución de problemas, bastante parecidos entre sí, y los utilicen para probar la robustez y flexibilidad de las técnicas empleadas. De hecho, en estas clases se comparte una responsabilidad entre profesor y alumno que es la producción de técnicas nuevas, ya sea por variación de la técnica inicialmente utilizada, o por combinación de dos o más técnicas. Tampoco las llamadas clases prácticas del curso se corresponden con las denominadas clases de problemas (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997). Estas últimas se caracterizan por que los estudiantes intenten resolver, por primera vez, problemas concretos de diversos tipos y manipular ciertas técnicas matemáticas para resolverlos. La principal función de la clase de problemas consiste en permitir que el estudiante tome contacto efectivo con ciertos tipos de problemas y con las técnicas correspondientes. Mientras que en la clase de problemas la actividad del estudiante se centra en explorar tipos de problemas muy diferentes entre sí y en buscar técnicas para resolver dichos problemas, en la clase práctica se parte de una técnica dada y de un conjunto de problemas del mismo tipo que se utiliza como instrumento para que los estudiantes alcancen un dominio robusto de dicha técnica.

3.3. El *topos* del alumno y el profesor en el proceso de estudio

A continuación se presentan resultados relacionados con las categorías de gestos del profesor y el alumno. En esta ocasión, presentamos resultados relativos a: *gestos de invitación* propuestos por los docentes y *gestos de aceptación* que se obtienen de los estudiantes.

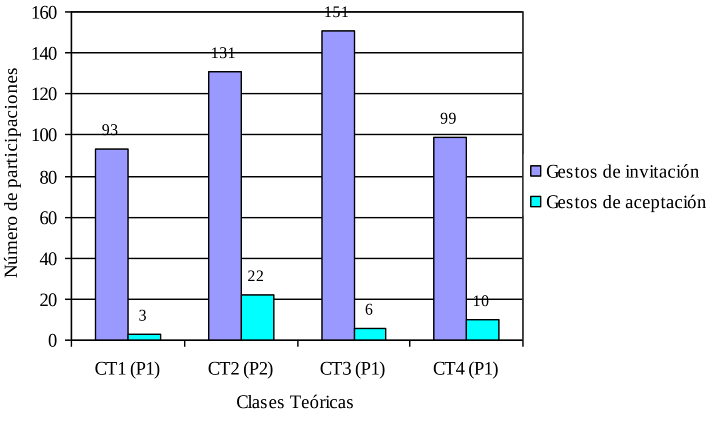


Figura 1. Gestos de invitación y aceptación en las clases teóricas

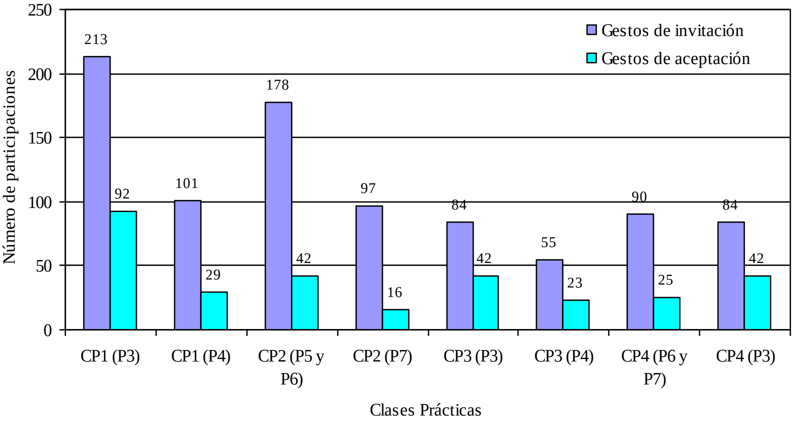


Figura 2. Gestos de invitación y aceptación en las clases prácticas

En el gráfico 1 se presentan los resultados obtenidos para las clases teóricas (CT) y en el gráfico 2 para las clases prácticas (CP).

Del análisis de los gráficos observamos que los profesores intentan que los estudiantes se involucren en la dinámica del proceso de estudio mediante invitaciones. Estas invitaciones se efectúan a partir de preguntas en sentido débil: no son más que cuestiones de las que los estudiantes conocen las respuestas, o al menos pueden conocer fácilmente. En esta dirección, el juego de preguntas-respuestas en sentido débil se juega en la superficie del saber institucional, ocultando las profundas razones de ser. En ninguna de las clases estudiadas se realizan cuestiones en sentido fuerte, es decir, preguntas para las cuales los estudiantes carezcan de técnicas para realizar la tarea solicitada, resultando problemáticas para ellos.

Si bien estas preguntas en sentido débil tendrían la intención de involucrar a los estudiantes en las praxis originadas por los profesores, solo un bajo porcentaje de estudiantes responden positivamente a este intento. Al comparar el número de respuestas entre las diferentes clases estudiadas, advertimos que en la CT es donde se registra el menor porcentaje de estudiantes que responden a esta demanda de los profesores: el 3% aceptación en la $CT_{1,}$ el 17% de aceptación en la CT_2, el 4% de aceptación en la CT_2 y el 10% de aceptación en la CT_2. Con relación a las CP, destacamos que la mayor proporción de aceptaciones se registran en las clases dirigidas por P_3 (CP_1: 43% de aceptación; CP_3: 50% de aceptación y CP_4: 50% de aceptación). En particular, destacamos la diferencia de aceptaciones que observamos en la CP_1 (43% de aceptación para P_3 y el 29% para P_4), para esta clase, a pesar de que las tareas y técnicas de las praxis de ambos profesores son similares, se destacan las diferencias en cuanto a la dinámica del proceso de estudio. El profesor P_3, luego de explicitar las técnicas necesarias para realizar algunas tareas, propone que sean los estudiantes quienes resuelvan tareas con características similares, para luego discutir la propuesta de los estudiantes. Durante estas instancias los alumnos tienen oportunidad de compartir significados con sus compañeros de distintos grupos y con los profesores del curso. Por otro lado, P_4 admite que existen otras técnicas para dirigir el proceso de estudio, pero justifica su dinámica achacando la responsabilidad a restricciones temporales.

En síntesis, los resultados indican que las débiles invitaciones de los profesores son escasamente aceptadas por los estudiantes. Esto resulta más acentuado en las CT, donde la posibilidad de comunicación entre alumno y profesor es muy pobre. Los mismos estudiantes destacan que las CP les resultan más beneficiosas para su aprendizaje que las CT, porque tienen mayor posibilidad de comunicación (Corica, 2009; Corica & Otero, 2007). El carácter meramente ficcional de estos gestos de involucramiento del alumno que realiza el profesor, permite describirlos más como gestos pedagógicos que didácticos. Tales gestos permanecen en el terreno de lo pedagógico, como un indicador más del cierre de la conciencia didáctica del profesor, que actúa de manera plenamente funcional al proceso de monumentalización. Este proceso requiere de alumnos "espectadores" y subestimados, impedidos de todo contacto directo con el saber, al que solo visitan.

3.4. Gestos de posicionamiento de los profesores

En la Tabla 12 se registra para cada clase, la cantidad de gestos de los profesores que conservan la intención de situar a los estudiantes en el modo de razonar y de hacer las tareas que se estudian en el curso. Se han definido los tipos de gestos de posicionamiento *resolver tareas* (RT) y *orientación de funciones del estudiante* (OE).

Gestos del profesor	Tipo de clase											
					CP_1		CP_2		CP_3		CP_4	
	CT_1	CT_2	CT_3	CT_4	P_3	P_4	P_5 y P_6	P_7	P_3	P_4	P_3	P_6 y P_7
RT	5	12	11	3	8	6	4	4	2	1	0	0
OE	1	0	0	0	3	4	0	0	2	3	2	2

Tabla 12. Gesto del profesor para cada clase estudiada

Observamos en la tabla que, para todos los tipos de clases, el gesto de posicionamiento más típico es el de *resolución de tarea* (RT). En general, el gesto de orientar las funciones de los estudiantes —en el sentido de que las acciones del profesor se encuentran dirigidas a dar indicios a los estudiantes acerca de las técnicas a emplear para la resolución de las tareas sin explicitar por completo su resolución— es prácticamente nulo en las CT. En estas clases, las acciones de los docentes se centran en resolver y establecer la conclusión de la tarea.

Con relación a las CP la situación es diferente, el gesto de orientación del estudiante (OE) no se encuentra en la CP_2, mientras que es el único gesto que se registra en la CP_4. Es decir, en la CP_4 las acciones de los profesores se orientan a recordar ciertas técnicas y tecnologías de las CT, tales que les permitan a los estudiantes acercarse a las técnicas que son necesarias para resolver las tareas.

3.5. Gestos de posicionamiento de los estudiantes

A continuación se presentan los resultados obtenidos en cuanto a los gestos de posicionamiento que se registran de los estudiantes del curso. Primero se presentan los resultados obtenidos en las CT y luego para las CP.

Con relación a las CT, presentamos los resultados sin discriminar diferencias por clases, pues en estas clases la participación de los estudiantes es muy pobre y las características de cada una son similares.

Momento didáctico primario	**Recepción (R)**	**Interpretación (I)**	Demanda de información (DI)
Exploración del tipo de tarea (ETET)	5	3	1
Constitución del entorno tecnológico teórico (CETT)	12	8	3
Trabajo de la técnica (TT)	0	2	1

Tabla 13. Gesto del alumno según el momento didáctico primario en que se encuentre el proceso de estudio en las clases teóricas

De la tabla 13 destacamos que en las instancias donde prevalecen los momentos de la *constitución del entorno tecnológico/teórico* (CETT) y *exploratorio* (ETET), la acción preponderante de los estudiantes es *receptiva* (R). Para el 49% de las tareas que se estudiaron en las CT (17 tareas sobre un total de 35), ningún estudiante demostró explícitamente su implicación en el proceso de estudio. Esto indica la baja participación de los alumnos en la construcción del bloque tecnológico/teórico de la OM.

Estos resultados son compatibles con los enunciados en las secciones previas: la participación de los estudiantes en el proceso de estudio de las

CT es prácticamente nula. En este tipo de clases, los estudiantes se ubican en el lugar de espectadores, como consecuencia del paradigma *monumentalista* (Chevallard, 2004) al que son enfrentados. En este paradigma la difusión de los saberes toma la forma de una *visita* a los saberes a difundir, siguiendo el modelo de la visita a monumentos en la que no se busca comprender (ni hacer comprender) la utilidad, el rol, ni la significación de dichos saberes en los sistemas de conocimiento y de acción en los que se integran.

El momento didáctico primario que se identifica en todas las CP es la *exploración* del tipo de tarea (ETET), por lo que en la siguiente tabla se da información acerca del tipo de posicionamiento que se logra en los estudiantes en relación a este momento.

Clases		Recepción (R)	Interpretación (I)	**Demanda de información (DI)**
Clase Práctica 1	**Profesor P_3**	3	8	2
	Profesor P_4	2	8	0
Clase Práctica 2	**Profesor P_5 y P_6**	0	4	1
	Profesor P_7	0	4	0
Clase Práctica 3	**Profesor P_3**	1	3	1
	Profesor P_4	0	4	1
Clase Práctica 4	**Profesor P_3**	0	2	2
	Profesor P_6 y P_7	0	2	1

Tabla 14. Gesto del profesor según los tipos de clases prácticas

En todas las CP, independientemente del profesor, las intervenciones de los estudiantes son de interpretación. En particular, destacamos la gran diferencia que se observa con relación a las CT —donde el posicionamiento preferente por los estudiantes es de *recepción*—. Esto se corresponde con los resultados obtenidos en estudios previos con estudiantes del mismo curso bajo estudio (Corica, 2009; Corica & Otero, 2007): los alumnos destacan que en las CP tienen mayor posibilidad de comunicación con sus profesores y son las que contribuyen en mayor medida a su aprendizaje.

4. Reflexiones finales

Los resultados indican las diferencias que se detectan en la forma de gestión de las clases teóricas y prácticas, y que no favorecen la integración de las praxeologías que se estudian en ellas. Las clases teóricas son encuadrables en el modelo teoricista (Gascón, 2001) pues el momento de constitución del entorno tecnológico/teórico aparece como la primera y más fundamental etapa del proceso de estudio. En las clases prácticas hay un predominio del momento exploratorio del tipo de tarea y una fuerte tendencia a la enseñanza de técnicas algorítmicas, alejándose de un legítimo trabajo de la técnica. Este estilo puede ser ubicado en el modelo docente bidimensional que Josep Gascón (2001) denomina clásico. Ambos son funcionales a una epistemología que legitima y produce la monumentalización.

Es el *topos* del profesor el que prevalece en todo el proceso de estudio, todas las decisiones didáctico-matemáticas quedan en sus manos. Solo en las clases prácticas se establecen conversaciones entre alumnos y profesores mediante preguntas y respuestas en *sentido débil*. La enseñanza se realiza de manera inamovible, no solo las respuestas sino también las preguntas, las técnicas permitidas para abordar las cuestiones y los elementos tecnológicos y teóricos que permiten justificar e interpretar dichas técnicas, están completamente predeterminados. No se concibe ninguna posibilidad de que la propia actividad, al intentar dar respuesta a ciertas tareas, permita plantear preguntas (y provoque la emergencia de respuestas) nuevas y no previstas de antemano, ni que dicha actividad genere el desarrollo de las técnicas y provoque modificaciones importantes del significado, el alcance y las relaciones entre las nociones básicas de la teoría.

La ausencia de un cuestionamiento tecnológico de las técnicas matemáticas que se emplean, hace que sea muy difícil preguntarse sobre la utilidad, el coste, la justificación y el alcance de dichas técnicas. De hecho, problematizar las técnicas no forma parte de las responsabilidades matemáticas que el contrato didáctico asigna a estos alumnos universitarios. Esta responsabilidad matemática tampoco es asignada a los profesores. Todo está preparado para que las técnicas *funcionen* siempre que se las requiera y para que no exista ningún conflicto entre las técnicas que se disponen y las tareas matemáticas que se proponen.

Actualmente, nuestra investigación se orienta al estudio de la ecología de un recorrido de estudio e investigación que «revista» el curso de cálculo bajo análisis en la universidad y permita introducir en esta institución prácticas funcionales dirigidas a enfrentar la monumentalización del saber, por ahora dominante en esta institución.

Referencias

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*, Lyon, Francia. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Corica, A. (2009). Aprender Matemática en la Universidad: la perspectiva de estudiantes de primer año. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias,* Buenos Aires. http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/ano4-nro-1

Corica, A. & Otero, M. (2007). Los estudiantes y el aprendizaje de la Matemática en la Universidad. En S. Araujo (Ed.), *V Encuentro Nacional y II Latinoamericano: La universidad como objeto de investigación* (pp. 1-13). Tandil, Argentina: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Corica, A. & Otero, M. (2008). Análisis de evaluaciones realizadas por estudiantes de un curso de primer año de una Facultad de Ciencias Exactas. En S. Ramírez (Ed.), *Primeras Jornadas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas*. Bernal, Argentina: Universidad Nacional de Quilmes.

Corica, A. & Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 305-331.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159.

Modélisation des connaissances des élèves en termes de *praxis*-en-acte

Marie-Caroline Croset et Hamid Chaachoua
LIG, Université Grenoble 1, France

Abstract. Our paper proposes a model of student's knowledge by using the praxeological model, precisely by *praxis*. To this purpose, and from the beginning of our research, we have faced some questions concerning both the *praxis* description of the institution and of the student: how to define the types of tasks? How to describe the techniques? These questions will be studied in the first section, in which we will also define the model of the student's "*praxis*-in-action". Then, in section two, we will present two case studies about the development and factoring of algebraic expressions.

Resumen. Nuestro artículo propone una modelización de los conocimientos del alumno por el modelo praxeológico y más precisamente por las *praxis*. Con este fin, y desde el principio de nuestra investigación, abordamos cuestiones relativas a la descripción de las *praxis* tanto institucionales como del alumno: ¿Cómo definir los diferentes tipos de tareas? ¿Cómo describir las técnicas? Estos temas se tratarán en la primera sección, al tiempo que se definirá el modelo de *praxis*-en-acto del alumno. En la segunda sección presentaremos dos estudios de casos relativos a dos objetos de enseñanzas: el desarrollo y la factorización de las expresiones algébricas.

Résumé. Notre article propose une modélisation des connaissances de l'élève par le modèle praxéologique et plus précisément par les *praxis*. À cet effet, et dès le début de notre recherche, nous avons été confrontés à des questions relatives à la description tant des *praxis* institutionnelles que des *praxis* de l'élève : comment définir les types de tâches ? Comment décrire les techniques ? Ces questions seront étudiées dans la section 1 qui définira également le modèle de *praxis*-en-acte de l'élève. Ensuite, dans la section 2, nous présenterons deux études de cas relatives à deux objets d'enseignement : le développement et la factorisation des expressions algébriques.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 627-646)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

Un des objets d'étude important en didactique est la modélisation des connaissances des élèves, soit comme cadre de recherche dans les travaux de Gérard Vergnaud (1991) ou Nicolas Balacheff (1995) soit comme outil pour décrire l'état des connaissances des élèves à propos d'un concept dans le travail de Michèle Artigue et Jacqueline Robinet (1982) ou pour prendre des décisions didactiques dans les situations d'apprentissage dans les études de Salima Tahri (1993) et de Hamid Chaachoua et Iranete Lima (2003).

Dans le cadre de nos travaux de recherche sur la modélisation de l'apprenant dans les environnements informatiques (Chaachoua, 2010 ; Crozet, 2009), nous avons choisi la notion de praxéologie pour décrire l'état de connaissance des élèves. Notons que le concept de praxéologie a été développé dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique pour décrire le rapport institutionnel comme on le voit dans le travail de Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999). Nous utilisons ce modèle pour décrire le rapport personnel d'un sujet, en l'occurrence d'un élève, à un objet d'enseignement, celui du calcul littéral.

Dans la section 2, nous présenterons le modèle praxéologique pour la modélisation des connaissances de l'institution, d'une part, et des élèves, d'autre part. Dans la section 3, nous présenterons deux études de cas dans le domaine du calcul littéral qui constituent des applications des modèles présentés dans la première section.

2. Le concept de praxéologie

Notre objectif est la modélisation des connaissances des élèves par le modèle praxéologique. Comme il est difficile, voire non pertinent, d'accéder aux technologies justifiant les techniques utilisées par les élèves, nous limiterons la modélisation à la notion de *praxis*. L'élève étant sujet d'une institution scolaire, ce qu'il peut mettre en œuvre comme *praxis* peut être analysé et expliqué en référence aux praxéologies institutionnelles. Nous allons donc, dans une première section, étudier comment décrire les constituants des *praxis*, types de tâches et techniques, aussi bien celles de l'institution que celles de l'élève.

2.1. Description des *praxis* institutionnelles

Comment définir les types de tâches ? Souvent les types de tâches sont définis par le type de réponse attendu et plus précisément, par des caractéristiques de la réponse. Par exemple le type de tâches T^* « montrer que deux droites sont parallèles dans une configuration » renvoie à un genre de tâches « montrer » qui impose que la réponse doit respecter les règles de la démonstration, en particulier, les règles du raisonnement déductif. De plus, ce raisonnement doit permettre de conclure que les droites sont parallèles. Cette caractérisation de la réponse par la définition de la tâche est déterminante pour le choix et la mise en œuvre de la technique mais elle n'est pas suffisante. En effet, en fonction de la nature de la configuration et des hypothèses du problème, plusieurs techniques peuvent être associées générant des technologies différentes. On peut regrouper les tâches du type de tâches T^* en plusieurs types de tâches de sorte que pour chaque type de tâches il y a une technique reconnue par l'institution. Il s'agit donc de regrouper les tâches autour d'organisations ponctuelles[1]. D'ailleurs, c'est ce qui semble être la pratique des institutions :

> En une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins un petit nombre de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. (Chevallard, 1999, p. 93).

D'où notre première hypothèse de travail :

> HT1 : L'institution organise l'apprentissage d'une notion autour de praxéologies ponctuelles.

Autrement dit, on propose aux élèves des types de tâches pour lesquels il y a une seule technique reconnue institutionnellement. Ainsi, plutôt que de confronter l'élève à un type de tâches complexe pour lequel il existe plusieurs techniques, l'institution préfère lui présenter ce type à travers plusieurs types de tâches pour lesquels il y a une seule technique. Nous appelons le premier type, type de tâches visé, et on le notera $T_{\text{visé}}$.

1. Pour des précisions sur les différents types d'organisations praxéologiques : ponctuelle, locale et régionale, nous renvoyons le lecteur à l'article déjà cité d'Y. Chevallard (1999).

Signalons que le travail sur les différents types de tâches relatifs à un $T_{\text{visé}}$ peut se faire sur plusieurs années (cf. l'exemple ci-dessous sur la résolution des équations de degré 2). D'où notre deuxième hypothèse de travail :

> HT2 : L'institution suppose que le travail réalisé sur les différentes organisations ponctuelles relatives aux types de tâches associés à un $T_{\text{visé}}$ permet la maîtrise de $T_{\text{visé}}$.

Cette hypothèse de travail s'appuie sur une hypothèse de recherche qu'on cherchera à mettre à l'épreuve dans le paragraphe 2.

> HR : Le travail réalisé sur les différentes organisations ponctuelles relatives aux types de tâches associés à un $T_{\text{visé}}$ permet aux élèves de maîtriser $T_{\text{visé}}$.

Soulignons que, le plus souvent, le type de tâches $T_{\text{visé}}$, n'est pas explicité par l'institution : c'est une reconstruction du chercheur. En effet, sur le plan méthodologique, le chercheur procède, à partir de l'analyse des programmes et des manuels et éventuellement des classes pour un niveau scolaire donné ou plusieurs niveaux, à l'identification des organisations ponctuelles qu'il cherchera ensuite à regrouper autour d'un $T_{\text{visé}}$. Nous noterons OPI($T_{\text{visé}}$) les organisations praxéologiques ponctuelles relatives à $T_{\text{visé}}$. Nous illustrons cela par l'exemple suivant et par un deuxième exemple dans la section 2.

Exemple. Entre la classe de quatrième et la classe de première, on étudie un type de tâches *T*r_eq2 : « résoudre une équation du second degré » à travers l'étude de plusieurs types de tâches [2].

> *T*r_eq2.1 : Résoudre : $P_1(x) \times Q_1(x) = 0$ ou $P_1^2(x) = 0$;
>
> *T*r_eq2.2 : Résoudre : $R_1^2(x) = k$ ($k > 0$) ;
>
> *T*r_eq2.3 : Résoudre : $P_2(x) = Q_2(x)$. Les polynômes sont choisis de sorte qu'ils puissent être factorisés par les élèves ;
>
> *T*r_eq2.4 : Résoudre : $P_2(x) = Q_2(x)$. Les polynômes sont choisis de sorte que la factorisation n'est pas évidente pour les élèves.

2. Nous adoptons la notation P_i pour désigner un polynôme de degré i.

Chacun de ces quatre types de tâches admet une seule technique τ_i institutionnelle. Ils constituent les organisations praxéologiques ponctuelles institutionnelles relatives au type de tâches visé *T*r_eq2.

Pour l'institution, l'apprentissage de ces types de tâches selon une certaine progression assure la réussite du type de tâches visé : *T*r_eq2. Ainsi, en classe de première, face à une tâche *t* de *T*r_eq2 l'élève est censé utiliser une des techniques τ_i selon le type d'équations. Pour cela, il doit reconnaître à quel type de tâches *T*r_eq2.*i* appartient *t*. Notons que, dans cet exemple, toutes les tâches de *T*r_eq2 sont dans un des types de tâches *T*r_eq2.*i* (*i* variant de 1 à 4) mais cela peut ne pas être toujours le cas, comme l'illustrera l'exemple de la section 2.

Comment décrire une technique ? Le problème de description des techniques a été soulevé par Y. Chevallard (1994) « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-types de tâches. Par exemple, Yves Matheron et Gisèle Cirade (1999, p. 200) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches *T* « résoudre une équation du premier degré », par la succession des sous-types de tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. L'intérêt de ce découpage est qu'il renvoie à des types de tâches reconnus institutionnellement et pour chacun d'eux, il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant. D'ailleurs, les manuels adoptent ce mode de description des techniques. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-types de tâches qui composent la technique. Mais ce qui nous semble plus pertinent, ce n'est pas l'identification des sous-types de tâches en soi mais surtout la mise en œuvre des techniques pour accomplir ces sous-types de tâches. Ce découpage a été aussi adopté par Corine Castela (2007) dans un travail où elle étudie comment un type de tâches peut intervenir dans la technique d'un autre type de tâches, et plus précisément la technique d'un type de tâches sous forme d'un enchaînement d'organisations mathématiques ponctuelles (p. 129).

Nous avons choisi de décrire une technique comme une succession de *praxis* (t_i, τ_i). Nous distinguons deux types de *praxis*. D'une part, les *praxis* qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre de techniques relatives à certains types de tâches que nous appelons *praxis* intrinsèques. D'autre part, des *praxis* dont les types de tâches peuvent être prescrites aux élèves et qui renvoient donc à des praxéologies institutionnelles que nous appelons *praxis* extrinsèques.

Exemple. Soit à résoudre l'équation $P_2(x) = Q_2(x)$ (par exemple, la tâche t : $x(x + 1) = (3 - x)(2x + 2)$) en classe de 2[de]. Il s'agit du type de tâches *T*r_eq2.3. Dans la technique de résolution de cette équation interviennent plusieurs *praxis* (*T*rg, τ_{rg}), (*T*f, τ_f) et (*T*r_eq2.1, τ_{pn}) :

– *T*rg : regrouper les termes dans un seul membre ;
 τ_{rg} : appliquer la règle : si $a = b$ alors $a - b = 0$ (qui se traduit dans la pratique par : on fait passer un terme d'un membre à l'autre en changeant le signe) ;

– *T*f : factoriser un polynôme de degré 2 (qui se traduit ici par la tâche t_2 « factoriser $x(x + 1) - (3 - x)(2x + 2)$ ») ;
 τ_f : une technique de factorisation. Si l'on souhaite la décrire, il faut étudier les OPI(T_f). Dans ce cas, on obtiendrait : faire apparaître un facteur commun en utilisant une factorisation partielle par 2, ensuite factoriser par $x + 1$. Ces deux étapes utilisent la règle $ab + ac = a(b + c)$;

– *T*r_eq2.1 : résoudre une équation produit. Pour le cas de la tâche t, il s'agit de résoudre l'équation $(x + 1)(3x - 6) = 0$;
 τ_{pn} : appliquer la règle qu'un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul. Dans le cas de notre exemple, il s'agit de résoudre les équations $x + 1 = 0$ et $3x - 6 = 0$.

Le type de tâches *T*rg n'est jamais prescrit aux élèves mais il intervient en tant que savoir-faire dans la technique d'autres types de tâches comme

« résoudre des équations » ou « montrer des égalités ». Nous considérons (Trg, τ_{rg}) comme une *praxis* intrinsèque.

Les deux *praxis* (Tf, τ_f) et (Tr_eq2.1, τ_{pn}) sont extrinsèques car les deux types de tâches Tf, et Tr_eq2.1 peuvent être prescrits aux élèves et relèvent des organisations praxéologiques institutionnelles.

Nous décrivons la technique de résolution de l'équation ci-dessus par la succession de trois *praxis* τ = {(Trg, τ_{rg}) ; (Tf, τ_f) ; (Tr_eq2.1, τ_{pn})}.

Se pose à nouveau le problème de découpage et plus précisément le niveau de granularité pour décrire les *praxis* constituantes de la technique. Dans l'exemple ci-dessus, la *praxis* (Tr_eq2.1, τ_{pn}) aurait pu être décomposée en plusieurs *praxis* décrivant la résolution des équations de degré 1, de même pour la *praxis* (Tf, τ_f). Nous avons retenu le principe suivant pour décrire les techniques.

Soit $T_{\text{visé}}$ un type de tâches visé par I, et OPI($T_{\text{visé}}$) les organisations praxéologiques ponctuelles institutionnelles relatives à $T_{\text{visé}}$. Soit T un type de tâches de OPI($T_{\text{visé}}$), sa technique peut être décrite par des *praxis* intrinsèques et des *praxis* extrinsèques. Une *praxis* extrinsèque est soit associée à un type de tâches de OPI($T_{\text{visé}}$), soit elle est associée à un autre type de tâches $T'_{\text{visé}}$. Elle est nécessairement une *praxis* d'un OPI($T'_{\text{visé}}$) mais nous estimons qu'il n'est pas nécessaire de l'expliciter dans la description de la technique relative à T. Nous nous contentons de noter que cette partie de la technique relève de $T'_{\text{visé}}$. Nous pensons que seul ce niveau de granularité est suffisant pour l'analyse de la technique car il met en avant les *praxis* relatives à des types de tâches appartenant au même OPI($T_{\text{visé}}$) que T.

2.2. Description des *praxis* de l'élève : des *praxis*-en-acte

Face à une tâche donnée t, l'institution attend d'un élève la mise en place d'une technique qui relève d'une organisation mathématique institutionnelle associée à la tâche t. La non-conformité du rapport personnel à t se traduit par la mise en œuvre d'une technique soit scientifiquement valide mais non adéquate institutionnellement soit scientifiquement non valide comme cela a été mis en évidence par Ai Quoc Nguyen, Hamid Chaachoua et Claude Comiti (2005). Afin de distinguer ces techniques des techniques institutionnelles et parce que, dans certains cas, le décalage entre la technique τ de l'élève et la technique attendue par l'institution peut s'expliquer par le fait que, pour l'élève, t releverait d'un type de tâches différent de celui de l'institution, nous donnons le nom de « *praxis*-en-acte » au couple (t, τ). Soit deux tâches t_1 et t_2 qui relèvent d'un même type de tâches institutionnel T et qui peuvent s'accomplir par une même technique τ. Si un élève utilise deux techniques différentes τ_1 et τ_2 pour, respectivement, les deux tâches t_1 et t_2, nous l'interprétons comme si, pour l'élève, t_1 et $t_{2,}$ relevaient de deux types de tâches différents et donc comme si, pour lui, existaient deux *praxis*-en-acte différentes.

Ainsi le découpage préconisé par l'institution n'est pas nécessairement celui que l'élève « perçoit ». Cette idée sera validée par des expérimentations présentées en section 3, où les élèves sont confrontés à des tâches de développement d'expressions algébriques. Nous montrons qu'un nombre significatif d'élèves utilisent des techniques distinctes pour un même type de tâches institutionnel : pour ces élèves, ces types de tâches peuvent en fait se subdiviser en autant de types de tâches dits « en acte » que de techniques-en-acte utilisées.

Le découpage proposé pour modéliser l'activité de l'élève essaie de suivre les choix et les hypothèses présentés plus haut pour la modélisation des *praxis* institutionnelles. Nous appelons *praxis-en-acte* le couple d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué des deux composantes suivantes :

– Un type de tâches-en-acte qui est un objet [3] que connaît ou *reconnaît* le sujet, dans le sens où le sujet a un rapport à cet objet. Le type de tâches-en-acte est l'ensemble des situations que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une même technique. Deux types de tâches-en-acte se distinguent par l'induction possible de deux techniques différentes par le sujet modélisé, ce qui est en conformité avec HT1. Le découpage en types de tâches-en-acte ne correspond pas nécessairement à celui de l'institution.

3. « Un objet existe s'il est connu d'au moins une personne ou une institution (il pourra d'ailleurs n'exister – cas limite – que pour cette personne ou pour cette institution) » (Chevallard, 1992, p. 87).

– Une technique-en-acte utilisée par l'élève pour résoudre le type de tâches-en-acte. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution. La technique n'acquiert sa légitimité chez l'élève que si elle est régulièrement utilisée. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique-en-acte des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel. Deux cas sont envisageables. Premièrement, une même technique est utilisée plusieurs fois par un groupe d'individus sans être nécessairement utilisée de manière régulière par un même élève; dans ce cas, nous parlerons de *praxis-en-acte inter-élèves*. Il peut y avoir stabilité dans un groupe d'individus quand bien même chacun n'aurait pas une action stable, voire utiliserait une *autre* technique de manière stable. En revanche, tous les individus de ce groupe utilisent au moins une fois la technique considérée. Deuxièmement, une même technique est fréquemment utilisée par *un même* individu; dans ce cas, nous parlerons de *praxis-en-acte intra-élève*.

3. Application des modèles

3.1. Première étude de cas : le développement

Dans cette section, nous nous intéressons au genre de tâches « développer », dans le secteur du calcul littéral au sein de l'institution « classe de 4^{e} de l'enseignement français » qu'on notera I_1. Cette étude montre l'application du modèle praxéologique pour l'institution I_1 et pour les activités des élèves en développement d'expressions algébriques. Nous verrons que la non prise en charge des différents types de tâches relevant du type de tâches visé entraîne la mise en place de techniques-en-acte chez les élèves.

Sous l'hypothèse HT1, l'analyse de dix manuels scolaires français a conduit à distinguer deux types de tâches :

*T*dvt_simple : développer le produit $a(b + c)$, avec a, b, et c des monômes ;

*T*dvt_double : développer le produit $(a + b)(c + d)$, avec a, b, c, et d des monômes.

En effet, ce sont les deux types de tâches qui sont étudiés dans la partie « Cours » des manuels et pour lesquels sont exposées deux techniques qui permettent d'accomplir *T*dvt_simple et respectivement *T*dvt_double :

$\tau_{\text{Dvt\_simple}}$: $a(b + c) = ab + ac$;

$\tau_{\text{Dvt\_double}}$: $(a + b)(c + d) = ad + ac + bd + bc$.

Cependant, dans la partie « Exercices » des manuels scolaires, il existe des tâches qui ne relèvent, a priori, ni de *T*dvt_simple ni de *T*dvt_double tout en relevant du genre de tâches « Développer ». Voici deux exemples issus de deux manuels de quatrième, le premier publié chez Hachette Éducation (1998) et le second de la collection Diabolo (Charmaty, Merlier & Freycenet, 2003) :

Développer $3(a + b + c)$ (p. 75, n °14) ;

Développer $10(x + 2)(x + 7)$ (p. 55, n° 70).

En effet, ces tâches ne se résolvent pas uniquement par l'application directe de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ ou de $\tau_{\text{Dvt\_double}}$. Aucune précision n'étant donnée sur les techniques à mettre en œuvre face à ces tâches, ceci nous conduit à considérer que le véritable savoir visé n'est pas tant la maîtrise de *T*dvt_simple ou de *T*dvt_double mais le type de tâches :

$T\text{dvt}_{\text{visé}}$: Développer un produit de la forme

$$ax^j\left(\sum_{i=0}^{2} b_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2} c_i x^i\right)$$

où $j = 0$ ou 1 et a, b_i et c_i sont des réels.

*T*dvt_simple et *T*dvt_double sont des types de tâches de $\text{OPI}_1(T\text{dvt}_{\text{visé}})$. Soulignons qu'il existe donc des tâches qui relèvent de $T\text{dvt}_{\text{visé}}$ sans qu'elles relèvent ni de *T*dvt_simple ni de *T*dvt_double.

Les manuels font, en fait, l'hypothèse HT2 que la maîtrise des deux *praxis* (*T*dvt_simple, $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$) et (*T*dvt_double, $\tau_{\text{Dvt\_double}}$) est suffisante pour résoudre toutes tâches relevant de *T*. En effet, ils supposent que toute tâche relevant de *T* sont réalisables par :

– Soit l'itération de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ ou de $\tau_{\text{Dvt\_double}}$, exclusivement l'une de l'autre ;

– Soit la combinaison conjointe de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ et de $\tau_{\text{Dvt\_double}}$;

– Soit la combinaison conjointe de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$, $\tau_{\text{Dvt\_double}}$ et d'une technique extérieure à $T_{\text{visé}}$ extrinsèque ou intrinsèque mais relevant d'un $T'_{\text{visé}}$.

La tâche « Développer $3(a + b + c)$ » est une illustration du premier cas. Elle est réalisable par la réitération de la technique $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$:

$$
\begin{aligned}
&3(a + b + c)\\
&\quad = 3(a + (b + c))\\
&\quad = 3a + 3(b + c)\\
&\quad = 3a + 3b + 3c.
\end{aligned}
$$

La tâche « Développer $10(x + 2)(x + 7)$ » est une illustration du deuxième cas. Elle est réalisable par la combinaison conjointe de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ et de $\tau_{\text{Dvt\_double}}$:

$$
\begin{aligned}
&10(x + 2)(x + 7)\\
&\quad = (10x + 20)(x + 7)\\
&\quad = 10x^2 + 90x + 140.
\end{aligned}
$$

Il est à noter que cette dernière tâche peut être accomplie par une triple itération de la seule technique $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ uniquement. Cependant, nous pensons que ce n'est pas ce qu'attend l'institution scolaire. En effet, la technique $\tau_{\text{Dvt\_double}}$ pourrait, elle aussi, être simplement une réitération de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ et donc ne pas donner lieu à une prise en charge particulière. Or, il n'en est rien. Les manuels la considèrent comme une technique à part entière, c'est pourquoi, nous considérons qu'il est attendu de l'élève qu'il accomplisse la tâche précédente par la combinaison des deux techniques et non une triple itération de la même technique. Quoi qu'il en soit, c'est à la charge de l'élève de mettre en place la technique qui permettra d'accomplir toutes tâches relevant de $T_{\text{visé}}$ à partir des connaissances acquises lors du travail sur *T*dvt_simple et *T*dvt_double. Mais en est-il capable ? Sait-il composer des techniques qu'elles soient intérieures ou extérieures à $T_{\text{visé}}$? Nous interrogeons donc là l'hypothèse HR pour le cas particulier où $T_{\text{visé}}$ est le développement d'un produit où un des facteurs est une somme.

Les expérimentations

Nous avons mis en place des expérimentations dans deux classes de 3e françaises[4] dans le but d'interroger l'hypothèse HR. La première classe (ExpeDvt1) a eu une moyenne de 13 sur 20 au premier trimestre et de 8,6 sur 20 à un devoir commun, tandis que la seconde classe (ExpeDvt2) a eu une moyenne de 9,3 sur 20 au premier trimestre et de 7,9 sur 20 à un devoir commun. Il y avait 26 élèves dans la classe ExpeDvt1 et 21 élèves dans la classe ExpeDvt2. Les expérimentations ont eu lieu après des révisions sur le développement. Les élèves ont travaillé individuellement sans aucune aide de l'enseignant.

Les tâches testées ont été les suivantes :

– Développer $2(3 - x)$;

– Développer $(2x + 5)(4x + 3)$;

– Développer $2(3x + x^2 - 3)$;

– Développer $5(x - 1)(x + 3)$;

– Développer $3 \times (2 - x)$;

– Développer $(5x + 2) \times (3x + 4)$;

– Développer $(3x + 2) \times (x + 5)$;

– Développer $4 \times (x + 1) \times (x - 2)$;

– Développer $3 \times (2x - x^2 + 2)$.

L'idée était de n'utiliser que des monômes de coefficients entiers « simples » pour éviter des erreurs de calcul. Les coefficients pouvaient prendre des valeurs inférieures à 10. Nous avons veillé à conserver une grande similarité entre les tâches que l'on souhaitait comparer. Par exemple, la différence entre la tâche 1 et la tâche 5 réside, selon nous, dans la visibilité de l'opérateur × et non dans le changement de 2 en 3 et de 3 en 2.

Pour la moitié de chaque classe, l'ordre des exercices suivait l'ordre donné ci-dessus et pour l'autre moitié, l'ordre était inversé – résolution des tâches 5 à 9 suivie de la résolution des tâches 1 à 4 – de façon à éviter un quelconque effet d'apprentissage. La tâche 6 n'a été proposée qu'à l'une des deux classes (ExpeDvt2). Pour des raisons de temps, elle n'a

4. Les élèves de troisième française ont 14 ans et le calcul littéral leur a été introduit l'année précédente.

pas pu être proposée dans la seconde classe. Les résultats des deux classes sont récapitulés dans le tableau 1 ci-dessous. Pour chaque expression, il est précisé le nombre de résolutions correctes, de résolutions erronées puis le nombre total de résolutions pour le groupe ExpeDvt1 puis ExpeDvt2.

Expressions à développer		ExpeDvt1			ExpeDvt2		
		Correct	Erroné	Total	Correct	Erroné	Total
1	$2(3 - x)$	24	2	26	15	5	20
2	$(2x + 5)(4x + 3)$	15	11	26	16	5	21
3	$2(3x + x^2 - 3)$	22	4	26	12	9	21
4	$5(x - 1)(x + 3)$	3	23	26	4	16	20
5	$3 \times (2 - x)$	23	2	25	15	5	20
6	$(5x + 2) \times (3x + 4)$	.	.	.	15	5	20
7	$(3x + 2) \times (x + 5)$	13	12	25	15	5	20
8	$4 \times (x + 1) \times (x - 2)$	4	19	23	4	16	20
9	$3 \times (2x - x^2 + 2)$	20	4	24	14	6	20

Tableau 1. Résultats des expérimentations conduites dans deux classes de 3^{e}

Nous souhaitions mettre en parallèle les résolutions produites face à certaines tâches. Pour cela, nous comparons la résolution d'une série de tâches à une autre série de tâches :

– C1 : Comparaison des résolutions de la série de tâches 1 et 5 aux résolutions de la série des tâches 3 et 9 pour évaluer l'impact du nombre de termes dans le second facteur d'un développement ;
– C2 : Comparaison des résolutions de la série de tâches 2, 6 et 7 aux résolutions de la série des tâches 4 et 8 pour évaluer l'impact du nombre de facteurs d'un développement ;

– C3 : Comparaison des résolutions de la série de tâches 1, 2, 3 et 4 aux résolutions de la série des tâches 5, 6, 7 et 8 pour évaluer l'impact de la visibilité du signe multiplier. Les tâches 1, 2, 3 et 4 étant similaires respectivement aux tâches 5, 6 / 7, 9 et 8.

Si HR est vérifiée, ces études comparatives C1, C2 et C3 ne devraient pas révéler de différence entre les résolutions de chaque série.

Analyse des résultats

Nous avons testé l'hypothèse « les proportions d'erreurs sont égales dans la première série de tâches (par exemple les tâches 1 et 5) et dans la seconde (par exemple les tâches 3 et 9) » contre l'hypothèse « les proportions sont différentes ».

Pour C1, nous testons donc « les proportions d'erreurs sont égales dans l'ensemble des tâches 1 et 5 et dans l'ensemble des tâches 3 et 9 » contre l'hypothèse « les proportions sont les mêmes ». La *p*-valeur est de 4,7 %, ce qui permet de conclure que les élèves font proportionnellement plus d'erreurs lorsque le second facteur a trois termes que lorsqu'il n'en a que deux, et ce de manière nettement significative. Ceci invalide donc l'hypothèse HR. Les élèves ne mettent pas en œuvre la technique attendue par l'institution lorsqu'ils sont confrontés à « $a(b + c + d)$ » alors qu'ils la mettent en œuvre face à « $a(b + c)$ ». De même, si l'on compare la proportion d'erreurs face aux tâches 2, 6 et 7 avec la proportion d'erreurs face aux tâches 4 et 8, nous obtenons une *p*-valeur inférieure à 1 % : les élèves développent significativement moins bien $a(b + c)(d + e)$ que $(a + b)(c + d)$. Enfin, la comparaison de la proportion d'erreurs face aux tâches 1, 2, 3 et 4 avec la proportion d'erreurs face aux tâches 5, 6, 7, 8 et 9 donne une *p*-valeur inférieure à 5 % : l'invisibilité du signe multiplier provoque plus d'erreurs que lorsque sa présence est notifiée. Ces expérimentations invalident donc le fait que les élèves sont capables d'accomplir $T_{\text{visé}}$ par la seule maîtrise de $\tau_{\text{Dvt\_simple}}$ et de $\tau_{\text{Dvt\_double}}$.

Mais que font les élèves face à ces expressions qu'ils distinguent des expressions fournies ? Quelles sont les techniques qu'ils mettent en œuvre ? Autrement dit, quelles sont les *praxis*-en-acte ?

Face aux types de tâches dont les techniques ne sont pas prises en charge par l'institution, de nombreux élèves ont donc construit de nouvelles techniques erronées ad hoc. Plusieurs d'entre eux ont proposé la même technique, dite technique-en-acte puisqu'elle affiche une stabilité inter-élèves.

Face au type de tâches « développer $a(b + c)(d + e)$ » non pris explicitement en charge par l'institution, trois techniques-en-acte ayant affiché une stabilité inter-élèves ressortent parmi les 74 erreurs collectées sur les deux tâches qui en relèvent (tâches 4 et 8) :

- Distribuer le premier terme sur chaque terme de chaque somme : $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac + ad + ae$ (23 fois sur 74) ;
- Distribuer le premier terme sur les termes de la première somme uniquement et supprimer « brutalement » les parenthèses (pouvant être suivi de différents comportements pour développer le second terme) : $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac(d + e)$ (15 fois sur 74) ;
- Distribuer le premier terme sur chaque terme de chaque somme tout en laissant la multiplication entre les deux derniers facteurs : $a(b + c)(d + e) \rightarrow ab + ac \times ad + ae$ (13 fois sur 74).

Ces trois techniques-en-acte reproduisent 51 erreurs sur les 74 diagnostiquées face à ces tâches, soit 69 % des productions erronées et 57 % des productions qu'elles soient correctes ou erronées.

2.2. Deuxième étude de cas : la factorisation

Une deuxième étude de cas permet d'illustrer la présence conjointe de techniques-en-acte distinctes pour un même type de tâches institutionnel et non, comme précédemment, pour un type de tâches non travaillé par l'institution. Cette étude portera sur le genre de tâches « factoriser » au sein de l'institution « classe de 3^e^ de l'enseignement français » qu'on notera I_2.

L'analyse de manuels scolaires de troisième a abouti à repérer quatre types de tâches institutionnels relevant du genre de tâches Factoriser. Outre les trois qui sont consacrés aux trois identités remarquables respectivement, une quatrième *praxis* permet de traiter toutes les autres tâches de factorisation :

*T*fact : Factoriser $ab + ac$, où a, b ou c sont des polynômes de degré au plus 1.

τ_{Fact} : Repérer le facteur commun,
le ré-écrire, si besoin, pour le mettre en évidence,

écrire le facteur commun devant et mettre ce qui reste entre parenthèses,

appliquer la règle $ka + kb = k(a + b)$,

réduire si besoin.

L'institution ne distingue pas de cas particulier sur les valeurs prises par *a*, *b* ou *c*. Les différents cas sont traités à travers des exercices mais pour lesquels la technique τ_{Fact} fonctionne. Comme pour le développement, nous trouvons, cependant, des tâches qui ne relèvent pas directement de *T*fact, comme la factorisation d'une somme de trois termes qui demande l'itération de τ_{Fact}. Le savoir visé, ici, est donc la réunion des trois types portant sur les identités remarquables et de la factorisation d'une somme d'au plus trois termes ayant un facteur commun visible.

Un cas nous a particulièrement intéressés : celui où le cofacteur de *c* est absent, autrement dit, la factorisation de $ab + a$. De telles tâches relèvent bien de *T*fact. Pourtant, elle est bien souvent accomplie par une technique autre que τ_{Fact}, y compris par des élèves qui semblaient, pourtant, maîtriser τ_{Fact} sur des tâches relevant aussi de *T*fact. Aussi en concluons-nous que les élèves font un découpage différent de celui proposé par l'institution. Ils distinguent au moins deux types de tâches-en-acte pour le même type de tâches institutionnel *T*fact :

*T*fact_vis : Factoriser $ab + ac$, avec *c* visible,

*T*fact_rien : Factoriser $ab + a$.

La *praxis*-en-acte qui a été la plus diagnostiquée dans des expérimentations que nous avons montées sur ce sujet est la suivante :

(*T*fact_rien, $\tau_{\text{Fact\_Rien}}$) : mettre le facteur commun aux deux termes de la somme à factoriser en facteur des cofacteurs visibles.

Par exemple, face à la tâche « factoriser $5(x + 2) + x(x + 2)$, l'application de cette technique-en-acte produira l'expression algébrique $(x + 2)(5 + x)$. Cette *praxis*-en-acte affiche une forte stabilité inter mais aussi intra (Croset, 2007). En effet, en inter, sur 195 confrontations à des tâches de type $ab + a$, 48 % ont provoqué l'utilisation de $\tau_{\text{Fact\_Rien}}$. En intra, la stabilité est aussi présente contrairement à certaines autres *praxis*-en-acte qui semblent stables en inter sans stabilité intra élève. Son étude a été approfondie lors de quelques interviews chez des élèves dont les productions avaient présenté une utilisation stable de cette technique-en-acte conjointement à l'utilisation stable de la technique institutionnelle face à *T*fact_vis. Les élèves interrogés sur la manière dont ils factorisaient, exprimaient l'idée qu'il fallait prendre le facteur commun dans chaque élément qui se trouve de chaque côté du « + » puis écrire « ce qui reste dans chaque terme, en enlevant le facteur commun ». Dans l'un des termes, il reste donc « *b* », dans l'autre terme, il ne reste « rien », tout au moins rien de visible. Sous la demande pressante de l'interviewer de savoir ce qu'ils entendaient par « rien », un élève déclare que « rien » signifie « zéro ».

L'invisibilité du cofacteur 1 est bien à l'origine de la mise en place d'une technique-en-acte erronée ainsi que de l'utilisation conjointe de deux techniques-en-acte, l'une correcte, l'autre erronée, pour un même type de tâches institutionnel. Il n'y a là aucune incohérence chez ces élèves puisqu'ils distinguent, en son sein, deux types de tâche-en-acte. Pour rendre visible ce cofacteur 1, il est nécessaire de réécrire le terme « *a* » comme le produit de « *a* » par « 1 ». Ce qui constitue une *praxis* intrinsèque à la technique τ_{Fact} mais qui n'est pas explicitement travaillée dans l'institution.

Conclusion

Cette recherche montre l'intérêt de l'utilisation de la notion de praxéologie pour décrire le rapport personnel d'un élève et le rapport institutionnel à un même objet d'enseignement. En effet, le modèle permet d'analyser les connaissances correctes ou erronées des élèves à l'aide des *praxis*-en-acte en référence aux *praxis* institutionnelles. À cet effet, nous avons proposé un découpage pour modéliser l'activité de l'élève en essayant de garder une cohérence avec les choix et les hypothèses retenus pour la modélisation des *praxis* institutionnelles.

Le chercheur recense un ensemble de tâches présentes dans l'institution (à travers une analyse des manuels, par exemple). Seules certaines d'entre elles sont explicitement regroupées en type de tâches avec un travail d'une technique et éventuellement un discours technologique. Ce qui permet au chercheur d'identifier les organisations ponctuelles car l'institution privilégie une seule technique par type de tâches (HT1). Le travail de ces organisations ponctuelles est censé être suffisant pour que les élèves accomplissent l'ensemble des tâches recensées par le chercheur, y compris celles qui ne font pas l'objet d'une étude explicite dans l'institution (HT2). À ce stade, le chercheur complète les organisations ponctuelles explicitées par l'institution par celles qui ne le sont pas pour construire OPI autour d'un type de tâches visé par *I*. Ce dernier n'est pas toujours explicité par *I*.

Nous avons présenté, dans cet article, deux études de cas dans lesquelles nous avons appliqué les modèles présentés dans la section 1. La première invalide l'hypothèse de recherche HR en montrant la mise en œuvre de techniques-en-acte erronées pour les types de tâches de OPI($T_{\text{visé}}$) mais non explicités par *I*. La seconde montre l'existence conjointe de techniques-en-acte pour un même type de tâches institutionnel, ce qui peut être interprété par deux types de tâches-en-acte. Ceci justifie le fait d'avoir distingué les *praxis* de l'élève de celles de l'institution.

Les *praxis*-en-acte erronées relevées dans les deux études de cas peuvent être expliquées soit par l'absence d'un travail sur des organisations ponctuelles d'un savoir qui est pourtant visé (première étude de cas) soit par l'absence d'un travail sur les *praxis* intrinsèques intervenant dans une technique d'une organisation ponctuelle prise en charge par l'institution (deuxième étude de cas).

Références

Artigue, M. & Robinet, J. (1982). Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(2), 5-64.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans D. Grenier (Éd.), *Séminaire Didactique et technologies cognitives en mathématiques 1994-1995,* (pp. 219-244). Grenoble, France : Université Joseph Fourier.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Castela, C. (2007). Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 117-138). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chaachoua, H. & Lima, I. (2003). De la modélisation des conceptions des élèves à la prise de décisions didactiques par l'enseignant : le rôle d'un environnement informatique. Dans J.-B. Lagrange, M. Artigue, D. Guin, C. Laborde, D. Lenne & L. Trouche (Éds), *Actes du Colloque Européen ITEM 2003, Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques*, Reims, France. http://edutice.archives-ouvertes.fr/ITEM2003/

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Dans Associazione Subalpina Mathesis (Éd.), *Conferenze e Seminari 1993-1994*, (pp. 190-200). Turin, Italie.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand, France : IREM.

Charmaty, O., Merlier, J.-M. & Freycenet, P. (2003). *Maths 4ᵉ. Collection Diabolo.* Paris, France : Hachette Éducation.

Cirade, G. & Matheron, Y. (1999). Équations du premier degré et modélisation algébrique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 199-216). Clermont-Ferrand, France : IREM.

Croset, M.-C. (2007). Prise en compte du contexte algébrique dans la modélisation des connaissances d'un élève. Le cas de la factorisation. Dans *Actes de la conférence EIAH 2007, Environnements Informatiques pour l'apprentissage Humain*. Lausanne, Suisse.

Croset, M.-C. (2007). Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de *praxis*-en-acte (Thèse de doctorat). Université de Grenoble 1, France.

Nguyen, A., Chaachoua, H. & Comiti, C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. Dans L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 621-640). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Tahri, S. (1993). *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse des décisions didactiques* (Thèse de doctorat). Université de Grenoble 1, France.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Organisations praxéologiques et articulation de points de vue « cartésien » et « paramétrique » en algèbre linéaire

Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos
et Ana Paula Jahn
UNIBAN, Brésil

Abstract. In this work we are interested in studying the new praxeological organizations for teaching and learning linear algebra in Brazilian universities. We particularly observed if in the new practices the link between Cartesian and parametric viewpoints in the study of vector subspaces is taken into consideration. We also analyzed which frames are privileged. Depending on the chosen organizations, we analyzed how the technical, technological and theoretical dimensions are considered and which technological speech accompanies them, as there are tasks of applications in other sciences that need to be justified and related to the notions of linear algebra that support them.

Resumen. En este trabajo abordamos el estudio de organizaciones praxeológicas nuevas para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal en el contexto de la universidad brasileña. Hemos observado, más concretamente, si en las nuevas prácticas se considera la articulación entre los puntos de vista cartesiano y paramétrico en el estudio de subespacios vectoriales. También analizamos los marcos que son privilegiados. Dependiendo de las organizaciones elegidas, se analiza cómo se consideran las dimensiones técnica, tecnológica y teórica y el discurso tecnológico que los acompaña, debido a que hay tareas de aplicaciones en otras ciencias que necesitan ser justificadas y relacionadas con los conceptos del álgebra lineal que los sustentan.

Résumé. Dans ce travail, nous nous sommes intéressées à l'étude de nouvelles organisations praxéologiques pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire dans le contexte de l'université brésilienne. Nous avons observé plus particulièrement si les nouvelles pratiques considèrent l'articulation entre les points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'étude des sous-espaces vectoriels. Nous avons également analysé les cadres qui y sont privilégiés. En fonction des organisations choisies, nous avons analysé comment étaient considérées les dimensions technique, technologique et théorique et le discours technologique qui les accompagne, car il existe des situations d'application dans d'autres sciences qui nécessitent d'être justifiées et mises en relation avec les concepts d'algèbre linéaire qui les soutiennent.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 647-670)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introduction

Depuis 1987, les difficultés d'apprentissage de l'algèbre linéaire sont analysées par le biais de différentes recherches et expérimentations du type ingénierie didactique comme celles développées par Aline Robert et Jacqueline Robinet (1989), Jean-Luc Dorier (1990) et Marc Rogalski (1991). Certaines de ces difficultés peuvent être formulées en termes de flexibilité, une composante essentielle de la conceptualisation et de l'efficacité du fonctionnement mathématique.

Dans cette perspective, Marlene Alves Dias (1998) a étudié les problèmes d'articulation entre les différents systèmes de représentation symbolique en algèbre linéaire dans le cadre de l'étude globale de la flexibilité entre deux points de vue : le point de vue cartésien et le point de vue paramétrique.

Cette étude lui a permis de souligner, à partir de l'analyse de tâches relevant des débuts de l'algèbre linéaire, que la mise en place des rapports entre ces deux points de vue n'est pas facile parce que, d'une part, l'éventail des tâches qui rendent vraiment nécessaire l'articulation entre ces deux points de vue est réduit, d'autre part, il n'est pas facile de contrôler le niveau auquel s'effectue cette articulation et, de ce fait, les connaissances qu'elle va mettre en jeu.

Afin de mieux comprendre comment l'enseignement traite cette question, M. A. Dias s'est posé les questions suivantes pour l'analyse des manuels scolaires, car celles-ci fournissent une première vision d'ensemble des organisations proposées.

> Comment l'enseignement exploite-t-il la marge de manœuvre dont il dispose dans ce domaine ? Comment gère-t-il les difficultés ci-dessus ? Y est-il d'ailleurs sensible ? Et, qu'il soit sensible à ces questions d'articulation de points de vue ou non, que permet-il aux étudiants de construire à travers le cours dispensé et les activités proposées ?

Dans sa thèse, M. A. Dias a analysé des manuels français, anglo-saxons et brésiliens. Concernant les manuels brésiliens, elle a choisi les deux qui, à l'époque, étaient les plus répandus lorsqu'il s'agissait des cours d'introduction à l'algèbre linéaire pour les étudiants scientifiques et un troisième qui est sensiblement différent des deux précédents tant au niveau du fond que de la forme. Les deux premiers sont encore en usage et le troisième est plutôt utilisé par les étudiants qui suivent les cours de formation initiale des maîtres. Les résultats de cette analyse serviront d'appui pour montrer la nouvelle tendance des trois manuels qui commencent à remplacer les deux qui étaient les plus utilisés par la plupart des étudiants scientifiques au Brésil.

Afin de mieux comprendre les régularités et les différences existant dans l'enseignement des premiers concepts d'algèbre linéaire, nous avons utilisé la TAD ainsi que les notions de cadre, registre et points de vue, qui sont des outils d'analyse efficaces tant pour analyser le contenu de l'algèbre linéaire à enseigner dans un cours d'introduction que pour identifier les différentes organisations qui vivent et survivent actuellement au Brésil.

2. Théorie anthropologique du didactique, cadre, registre et points de vue

2.1. Théorie anthropologique du didactique

Pour Yves Chevallard (1992) ainsi que pour Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999), comme toute activité humaine l'activité mathématique se laisse décomposer en un certain nombre de tâches. Pour accomplir ces tâches, sont développées des techniques qui, pour être viables, doivent apparaître compréhensibles et justifiables, cela donnant lieu au développement des technologies, ou discours sur la technique, ces technologies faisant à leur tour l'objet de technologies qu'il identifie comme des théories.

L'étude de la flexibilité entre les points de vue cartésien et paramétrique permet de la considérer comme un émergent d'un certain nombre de pratiques mathématiques, ce qui conduit à essayer de cerner dans quels types de tâches mathématiques elle peut a priori trouver à vivre et à se développer, d'identifier les techniques mathématiques existantes pour effectuer ces tâches, de préciser les différents niveaux de discours qui sont susceptibles d'accompagner ces techniques, à titre des commentaires et de justifications, en exploitant éventuellement la distinction entre technologie et théorie.

Ce type d'analyse a priori a été rapporté dans les pratiques institutionnelles effectives, via l'analyse des manuels où l'on cherchait à déterminer comment sont exploitées les marges de manœuvre a priori existantes.

2.2. La notion de cadre

Cette notion a été introduite par Régine Douady (1984) dans la perspective d'une théorisation didactique basée sur une analyse épistémologique mettant en évidence : (a) la dualité des concepts mathématiques, en général d'abord outils implicites puis explicites de l'activité mathématique avant de prendre le statut d'objet et d'être travaillés en tant que tels ; (b) le rôle joué par les changements de cadre dans l'activité et la production mathématique.

Cette analyse épistémologique l'a conduite à transposer ces caractéristiques du fonctionnement des mathématiciens au domaine de la didactique via les notions de dialectique outil-objet et de jeux de cadres (Douady, 1986, 1992). Un cadre est alors défini comme :

> constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. [...] Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différents d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. [...] Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre originel et de cadres auxiliaires de travail. (Douady, 1992, pp. 135-136)

Les jeux de cadres, organisés par l'enseignant, sont des transpositions didactiques de ces processus et ils sont vus dans la théorie de R. Douady comme des moyens privilégiés pour susciter à la fois des déséquilibres cognitifs et permettre le dépassement de ces déséquilibres dans des rééquilibrations de niveau supérieur.

Ainsi, la notion de cadre met l'accent sur le fait qu'un même concept est appelé à fonctionner dans différents environnements conceptuels et techniques et que le fonctionnement dans chacun de ces environnements présente des caractéristiques spécifiques, les différences existantes étant justement un des moteurs et outils de la création mathématique.

Dans le cas de l'algèbre linéaire, l'introduction des premiers concepts (notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, de sous-espace vectoriel, de dépendance et indépendance linéaire, de dimension et de rang) se fait plus souvent en n'utilisant que les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ et même en privilégiant les dimensions 2 et 3 qui permettent de jouer sur les jeux entre les cadres géométrique et algébrique et d'amorcer ainsi une flexibilité cognitive qui deviendra plus métaphorique en dimension supérieure ou dans des espaces plus généraux. Dans notre étude, nous envisageons cinq cadres intervenant en interaction dans les débuts de l'algèbre linéaire, chacun avec des objets, des problématiques et approches, des techniques, des systèmes sémiotiques partiellement spécifiques : le cadre de la géométrie affine euclidienne mais non théorisée en tant que telle, le cadre des systèmes linéaires, le cadre des matrices, le cadre des déterminants et enfin le cadre de l'algèbre linéaire abstraite.

2.3. La notion de point de vue

La notion de point de vue répond ici plus au besoin de distinguer a priori les découpages au niveau de l'organisation du savoir. Elle est relativement détachée d'analyses en termes de cadre ou de registre.

En ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre linéaire, les travaux de M. Rogalski mettent en jeu simultanément les notions de cadre, de registre et de point de vue.

Par rapport à la notion de cadre, M. Rogalski distingue uniquement deux cadres : le cadre géométrique et le cadre algébrique. Dans chacun de ces deux cadres, selon lui, fonctionnent plusieurs registres de représentation comme, par exemple, pour les vecteurs, le registre des dessins (en dimension 2 et 3) et le registre symbolique dans le cadre géométrique, le registre des tableaux, des nombres et le registre symbolique dans le cadre algébrique. On retrouve là en fait des distinctions proches de celles effectuées par Kalliopi Pavlopoulou (1994).

La notion de point de vue est introduite par M. Rogalski (1995) dans les termes suivants :

> Des points de vue différents sur un objet mathématique sont des manières différentes de le regarder, de le faire fonctionner, éventuellement de le définir. En ce sens, regarder un objet dans différents cadres, c'est avoir différents points de vue. Mais, on peut avoir plusieurs points de vue dans un même cadre.

Dans le cadre de ce qu'il appelle la géométrie vectorielle du secondaire (en fait de la géométrie euclidienne non théorisée) et dans celui de la géométrie analytique, il va distinguer, à propos de droites et plans, deux points de vue qu'il appellera respectivement « paramétrique » et « cartésien ». En fait, ces deux points de vue apparaissent très liés aux modes de définition et/ou types de représentation choisis pour ces objets.

En géométrie analytique, le point de vue « cartésien » est ainsi associé à une représentation par des équations implicites : en dimension 3, un plan est ainsi défini par une équation linéaire, une droite est vue comme intersection de deux plans et définie par un système de deux équations linéaires. Le point de vue « paramétrique » est, comme son nom l'indique, associé à une représentation paramétrique de ces objets, c'est à dire une représentation affine dépendant de deux paramètres pour le plan et d'un seul pour la droite.

Dans le cadre de la géométrie vectorielle, toujours en dimension 3, M. Rogalski associe le point de vue cartésien à la vision d'un plan comme défini par un vecteur orthogonal et l'équation $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{v} = 0$, celle de la droite définie comme intersection de deux plans, c'est-à-dire via deux vecteurs indépendants qui lui sont orthogonaux. Le point de vue paramétrique est associé, pour le plan, à la définition de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour la droite, à la définition de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ comme colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ non nul.

Ces deux points de vue se généralisent en fait à des courbes quelconques et M. Rogalski souligne qu'un même problème peut être facile selon un point de vue, difficile selon un autre : par exemple, exhiber un point d'une courbe est facile si l'on dispose d'une représentation paramétrique, mais peut devenir difficile si l'on ne dispose que d'une représentation cartésienne ; en revanche vérifier qu'un point appartient à une courbe est plus facile à faire à partir de représentations cartésiennes. Suivant les points de vue adoptés, certaines particularités de l'objet sont plus ou moins visibles, plus ou moins cachées et même si, comme dans le cas ci-dessus, points de vue et registres de représentation semblent étroitement dépendants, pour lui, un changement de point de vue ne se réduit pas à un changement de registre sémiotique, « il s'exprime par un théorème ».

A. Robert (1998) souligne comment M. Rogalski (1995) utilise le mot « changement de point de vue » et, à partir des exemples proposés par lui, elle se réfère au travail de M. A. Dias (1998).

> … le mot « changement de point de vue » pour désigner une modification du point de vue mathématique adopté pour traiter une question, s'il y a le choix : par exemple pour prendre en compte le passage, pour un ensemble, de la version de la définition « en compréhension » à celle « en extension », ou encore pour un sous-espace vectoriel de la version implicite cartésienne, associé à des équations, à la version explicite, paramétrique. Il y a là encore une source de difficultés pour les étudiants, surtout quand il est nécessaire d'articuler les différentes facettes de l'activité correspondant à chaque version. (p. 149)

En utilisant les travaux de M. Rogalski, M. A. Dias a étudié, plus précisément, la question de l'articulation entre les points de vue paramétrique et cartésien en algèbre linéaire, mettant en évidence les possibilités d'un travail qui prend en compte les changements de cadres et de points de vue, les choix des méthodes les plus appropriées pour résoudre des tâches typiques dans un cours d'introduction à l'algèbre linéaire. Ces choix comprennent également les différents registres de représentation de vecteurs qui dépendent des espaces vectoriels introduits.

3. L'articulation des points de vue cartésien et paramétrique

En essayant de comprendre plus précisément ce que recouvre la flexibilité entre les points de vue cartésien et paramétrique et comment elle est gérée dans l'enseignement au Brésil, et après avoir étudié le paysage mathématique dans lequel l'articulation entre ces deux points de vue peut se développer – soit par des algorithmes de passage d'un type de représentation à un autre, qui est basé sur la méthode de résolution de systèmes linéaires dite du pivot de Gauss, soit sur un plan conceptuel, qui renvoie clairement à la notion de dualité – nous avons construit une grille d'analyse pour identifier les tâches usuelles d'un premier cours d'algèbre linéaire. Cela nous a permis de repérer l'espace de tâches mathématiques qui peut faire vivre et développer a priori la flexibilité entre les points de vue cartésien et paramétrique.

La liste des types de tâches usuels d'un premier cours d'algèbre linéaire, qui mettent en jeu, au moins potentiellement, de la flexibilité entre les points de vue cartésien et paramétrique, n'est pas vaste comme on peut l'observer dans le cadre ci-dessous qui a été construit par M. A. Dias dans sa thèse.

- Décrire le sous-espace solution d'un système linéaire et homogène.
- Caractériser le sous-espace engendré par des vecteurs donnés.
- Trouver une partie génératrice d'un ensemble de vecteurs donnés ou d'un sous-espace donné.
- Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et/ou d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.
- Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre ou que deux sous-espaces sont égaux.
- Déterminer l'intersection entre deux sous-espaces.
- Déterminer la somme de deux sous-espaces.
- Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe.
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.
- Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace donné.
- Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Déterminer l'ensemble solution d'un système d'équations linéaires et trouver sa dimension.
- Déterminer à quelles conditions un système admet des solutions.

Afin de mieux comprendre comment la flexibilité peut être développée et comment elle peut mettre en évidence les difficultés d'apprentissage en algèbre linéaire en fonction de la technique choisie, des justifications de ces techniques et des notions et théorèmes qui les soutiennent, nous présentons l'exemple d'une solution proposée par un étudiant de première année en DEUG A à l'Université de Lille, pour lequel l'articulation des points de vue était traitée explicitement par l'enseignant. Voici la tâche :

> Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants : $a = (0, -1, 1, 0)$, $b = (2, 1, 1, 0)$, $c = (0, 0, 3, 1)$, $d = (2, 0, -1, -1)$, $e = (1, 0, 1, 1)$ et $f = (1, 0, 0, 1)$. Quel est le rang du système des vecteurs $\{a, b, c, f\}$? Pour lin$\{a, b, c, d\}$, donner une représentation paramétrique et un système d'équations linéaires le définissant.

Nous présentons la réponse en la découpant en phases numérotées afin de faciliter l'analyse.

1) a, b, c sont-ils linéairement indépendants ? On s'aperçoit, sans calcul, que $d = a + b - c$ donc a, b, c, d sont linéairement dépendants. Or rang$\{a, b, c, f\} = 4$ donc a, b, c sont linéairement indépendants, donc lin$\{a, b, c, d\}$ = lin$\{a, b, c\}$.

2) $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$;

$$\begin{array}{lcl} 2\lambda_2 = 0 \ ; \ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \ ; & & \lambda_1 = 0 \ ; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \ ; & \leftrightarrow & \lambda_2 = 0 \ ; \\ \lambda_3 = 0. & & \lambda_3 = 0. \end{array}$$

3) Si $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in$ lin$\{a, b, c, d\}$ alors $A = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$.

$2\lambda_2 = \alpha$; $-\lambda_1 + \lambda_2 = \beta$; $\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma$; $\lambda_3 = \delta$;

$2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma + \beta$; $3\lambda_3 = \gamma + \beta - \alpha$; $0 = \gamma + \beta - \alpha - 3\delta$.

– Si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta \neq 0$ aucune solution.

– Si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$ une infinité de solutions.

4) Nous sommes dans $\mathbb{R}^4$ or lin$\{a, b, c, d\}$ est représenté par 3 équations linéairement indépendantes donc dim(lin$\{a, b, c, d\}$) = 4 – 3 = 1. Il suffit donc d'avoir un paramètre ; par exemple, si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$ on a :

$\lambda_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}$;

$$2\lambda_2 = \gamma + \beta - 3t \quad \leftrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\gamma + \beta - 3t}{2} \ ;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \gamma - 3t \quad \leftrightarrow \quad \lambda_1 = \gamma - 3t - \frac{\gamma + \beta - 3t}{2} = \frac{\gamma - \beta - 3t}{2}.$$

L'analyse a été faite par des interprétations hypothétiques sur les stratégies développées par l'étudiant, dont les principales sont les suivantes :

En 1) l'étudiant démarre par la recherche de la dimension du sous-espace engendré par $\{a, b, c, d\}$ et sa caractérisation comme $\mathrm{lin}\{a, b, c\}$ est très économiquement faite, sans recours à une technique de calcul de rang, en exploitant le résultat trouvé dans la première question.

A priori, il dispose à ce moment-là d'une représentation paramétrique minimale évidente du sous-espace et le passage à une représentation cartésienne peut se faire via la triangulation d'un système qui apparaît en 3) et l'identification de la quatrième équation : $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$ comme équation de $A = \mathrm{lin}\{a, b, c\}$ puisque A est caractérisé par la condition d'existence de solutions du système.

Le travail effectué en 2) par l'écriture d'une équation, qui est celle correspondant à la vérification de l'indépendance de $\{a, b, c\}$, peut sembler étonnant compte tenu de ce qui précède. La rédaction ne contient que les lignes de calcul, sans la moindre introduction ou conclusion ; ceci nous incite à interpréter ce calcul comme une sorte de rite à accomplir dans le cadre du passage à une représentation cartésienne.

Après cet épisode, s'enclenche le passage proprement dit à une représentation cartésienne. Cette fois, le système est introduit par un énoncé implicatif. On notera d'autre part l'absence de quantification explicite sur les λ_i. Ce système est ensuite traité par la méthode du pivot de Gauss et ramené ainsi à un système triangulaire. Jusqu'à ce point, on peut considérer que l'étudiant suit la démarche algorithmique standard – la gestion de la quatrième équation permet de séparer les cas d'existence et de non-existence des solutions. À ce point, le travail technique est terminé. Et c'est là que le fonctionnement dérape. L'interprétation effectuée n'est pas celle attendue : A n'est pas associé à la condition d'existence de solutions du système mais au système lui-même, puisque l'étudiant, à partir des conditions de résolution du système, essaye de trouver les solutions du système. Cela amène l'étudiant à conclure que la dimension de $\mathrm{lin}\{a, b, c, d\}$ est 1 puisque le système est de rang 3, en contradiction flagrante avec ce qui a été affirmé précédemment, et à proposer une représentation paramétrique de $\mathrm{lin}\{a, b, c, d\}$ en fonction d'un seul paramètre, t.

Pour produire cette représentation, l'étudiant se place explicitement dans le cas où il existe des solutions puis achève la résolution du système en prenant $\lambda_3 = t$ comme inconnue secondaire et en considérant α, β, γ et δ comme des constantes – transformation de statut qui favorise sans doute à la fois la non-explicitation des quantificateurs et les lettres utilisées elles-mêmes.

Pour mettre à l'épreuve cette analyse, nous avons regardé un certain nombre de manuels, en faisant l'hypothèse que cette étude nous donne des informations pertinentes sur les pratiques réelles au niveau des pratiques dominantes.

Il est important de remarquer que, dans le contexte brésilien, les manuels utilisés en 1998 ont été remplacés par de nouvelles propositions où l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique, même si elles sont plutôt associées à des algorithmes, est abordée par les auteurs. Même en n'ayant pas une référence explicite à cette articulation, nous avons décidé d'analyser trois nouveaux manuels en utilisant l'organisation des manuels anciens afin de pouvoir les comparer et mieux comprendre quelle est la place des cadres des systèmes linéaires et de la géométrie, ainsi que de l'espace $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, nous avons voulu analyser si ces nouvelles propositions s'appuient sur les cadres géométrique et des systèmes linéaires en utilisant les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, plus familiers aux étudiants, ou s'ils disposent de techniques spécifiques, de moyens de visualisation et de moyens de contrôle efficaces, ce qui peut aider la généralisation à des espaces de dimension supérieure.

4. L'analyse des manuels

Comme notre but est d'observer les changements qui ont été introduits dans les cours d'introduction à l'algèbre linéaire au Brésil et la façon dont les nouvelles approches proposées travaillent la question de la flexibilité entre les points de vue paramétrique et cartésien, nous avons structuré l'analyse des nouveaux manuels en s'appuyant sur les mêmes questions utilisées par M. A. Dias (1998), qui sont les suivantes :

- Comment l'enseignement est-il structuré et, en particulier, comment s'organise la progression par rapport aux cadres (système isolé, système et les autres cadres, matrices, déterminants, géométrie affine euclidienne et algèbre linéaire) et comment leur articulation est-elle conçue ?

– Comment sont introduits les points de vue cartésien et paramétrique et comment sont-ils articulés ? Comment l'articulation entre les deux points de vue est-elle gérée ?
– À quels niveaux l'articulation est-elle gérée : quels poids respectifs y occupent les dimensions techniques, technologiques et théoriques et comment sont-elles articulées ? Y a-t-il de plus un discours de type métamathématique [1] présent au niveau du cours ou dans le traitement des exemples qui l'accompagnent pour soutenir cette articulation ?
– Qu'est-ce qui, dans l'articulation, est à la charge des enseignants ? Qu'est-ce qui est dévolu aux étudiants ?

Pour essayer de répondre à ces questions, nous avons procédé de la façon suivante. Tout d'abord, nous avons identifié les différents cadres et les notions et théorèmes susceptibles d'être impliqués dans l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Ensuite, nous avons analysé plus précisément la façon dont interviennent les deux points de vue et leur articulation en distinguant ce qui est plutôt à la charge de l'enseignant et ce qui est plutôt laissé à la charge des étudiants. Classiquement, nous considérons comme relevant de l'enseignant ce qui fait partie du cours et les exemples ou les exercices corrigés qui l'accompagnent, et à la charge de l'étudiant la partie exercices.

En ce qui concerne la partie « cours », nous avons étudiée : (a) les niveaux d'identification des points de vue cartésien et paramétrique, même s'ils ne sont pas désignés en ce termes ; (b) les articulations présentes et travaillées ; (c) les formulations adoptées à leur propos, en prenant en compte les différents niveaux de discours.

En ce qui concerne les exercices, nous nous sommes basées sur la liste de tâches présentée ci-dessus, tout en réservant une place aux exercices

1. Il faut entendre ici par « métamathématique » le deuxième sens que Pólya donne au mot méthode, c'est-à-dire, pour lui, une méthode c'est « comment penser à un truc qui a déjà marché pour le réutiliser ». (Commission Inter-IREM Université, 1990)

hors liste qui nous sembleraient pouvoir relever de l'articulation des deux points de vue.

5. Les résultats de l'analyse

Dans la suite, nous présentons les résultats de l'analyse tant pour les nouveaux manuels que pour les anciens en remarquant que les nouveaux sont des traductions d'ouvrages anglo-saxons, dont la tradition est de mettre au premier plan non pas l'algèbre linéaire abstraite, mais le calcul dans $\mathbb{R}^n$ et, notamment, le calcul matriciel dans la première approche à ce domaine. C'est dans ce cadre que sont introduits les concepts d'algèbre linéaire.

5.1. L'ouvrage de D. C. Lay

L'ouvrage de David C. Lay (1999), intitulé *Álgebra linear e suas aplicações* (504 pages) et désigné dans la suite par « Lay », est un ouvrage anglo-saxon qui suit la tradition soulignée ci-dessus.

L'auteur débute par le cadre des systèmes linéaires. Il fait quelques considérations théoriques sur l'équivalence des systèmes et donne des exemples de systèmes de deux équations à deux inconnues en montrant que chaque équation de ce système peut représenter une droite et que l'ensemble solution est équivalent à l'intersection de deux droites, ce qui lui permet d'articuler le cadre des systèmes linéaires avec celui de géométrie euclidienne non théorisée.

La méthode de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires est travaillée en parallèle avec la triangulation de la matrice des coefficients, c'est-à-dire que l'auteur articule le cadre des systèmes linéaires avec le cadre des matrices, ce qui lui permet de poser la question de l'existence et de l'unicité des solutions.

À partir de l'étude des systèmes linéaires par la méthode de Gauss, l'auteur définit les variables libres et liées et considère la description paramétrique de l'ensemble solution, ce que nous appelons l'algorithme de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique et qui est justifié théoriquement par le théorème de l'existence et de l'unicité des solutions en se rapportant au cadre matriciel.

Dans la suite, l'auteur introduit les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^n$ et définit les sous-espaces vectoriels engendrés par un ensemble de vecteurs donnés. À partir de cette définition l'auteur fait quelques considérations théoriques qui correspondent au passage de la représentation paramétrique à la représentation cartésienne, même si toutes ces considérations ne sont pas traitées explicitement comme l'articulation entre les deux points de vue.

Après le développement technique des algorithmes de passage des représentations d'un point de vue à l'autre, l'auteur montre que cette articulation est fondée sur le théorème suivant :

> Soit A une matrice $m \times n$. Les affirmations suivantes sont logiquement équivalentes. C'est-à-dire, pour une certaine matrice A, ou toutes les affirmations sont vraies ou elles sont toutes fausses.
>
> a) Pour chaque b de $\mathbb{R}^m$, l'équation Ax = b ait de solution.
>
> b) Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
>
> c) Chaque ligne de A a une solution du pivot. (Lay, 1999, p. 38)

Le développement technique et théorique de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique avec ces représentations permet à l'auteur de considérer des exemples dans d'autres sciences. Par exemple, pour une analyse des résultats en économie, l'auteur utilise un discours associé à la solution trouvée après la représentation de la solution du système par un vecteur, ce qui lui permet d'articuler les cadres des systèmes linéaires, des matrices, de l'algèbre linéaire et de l'économie.

Outre les tâches de la liste ci-dessus, nous avons pu identifier dans l'ouvrage de Lay des nouvelles tâches qui correspondent à l'application des concepts d'algèbre linéaire dans d'autres sciences, ce qui nécessite un discours spécifique pour articuler les différents cadres qui nous avons déjà souligné et les cadres de l'économie, de la chimie, de l'informatique, etc.

L'auteur introduit les premières notions d'algèbre linéaire dans les cadres des systèmes linéaires, des matrices, de la géométrie euclidienne non théorisée et des déterminants en n'utilisant que les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et à chaque fois, si possible, il donne des exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avant de généraliser à $\mathbb{R}^n$. Cela veut dire que l'articulation entre les deux points de vue correspond à l'articulation entre le cadre des systèmes linéaires et les cadres de l'algèbre linéaire, des matrices, des déterminants et de la géométrie euclidienne sans passer par le plan plus conceptuel qui renvoie à la notion de dualité, qui permet d'établir une symétrie entre les deux types de représentation, en permettant de penser les équations linéaires homogènes comme des vecteurs, en tant que formes linéaires de l'espace dual.

5.2. L'ouvrage d'Anton et Rorres

L'ouvrage de Howard Anton et Chris Rorres (2001), intitulé *Álgebra linear com aplicações* (569 pages) et désigné dans la suite par « Anton », suit la tradition anglo-saxonne de mettre en premier plan le calcul dans $\mathbb{R}^n$ et notamment le calcul matriciel.

Dans le cadre des systèmes linéaires, les auteurs introduisent la méthode de Gauss pour la détermination de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires. Ce travail est développé en articulant le cadre des systèmes linéaires avec celui des matrices, ce qui leur permet de considérer les propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication par un scalaire, qu'ils appellent les règles de l'arithmétique matricielle ; ils utilisent les propriétés d'espace vectoriel et continuent en définissant le produit de matrices, l'inverse et la transposée d'une matrice ainsi que leurs propriétés.

Les notions de systèmes linéaires et de matrices avec leurs propriétés sont développées et articulées de façon à ce qu'elles puissent être utilisées comme outils dans l'étude des espaces vectoriels. Ils continuent en définissant le déterminant d'une matrice et en mettant en place ses propriétés, ce qui leur permet de proposer de nouvelles méthodes pour la résolution des systèmes de Cramer et la détermination de l'inverse d'une matrice. Ce travail est accompagné d'un discours technologique pour justifier les nouvelles méthodes qui sont introduites.

La notion de vecteur géométrique et ses propriétés sont introduites pour les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et les auteurs ont besoin d'expliciter les représentations de points (cadre de la géométrie affine) et de vecteurs (cadre de la géométrie vectorielle), ce qui leur permet de considérer la notion de translation dans ces espaces. Ils poursuivent en présentant la notion de produit scalaire et ses propriétés et utilisent cette notion pour définir la projection orthogonale. Puis ils définissent le produit vectoriel et ses propriétés ainsi que les représentations cartésienne et vectorielle d'un plan dans l'espace, la représentation paramétrique d'une droite dans l'espace, ce qui leur permet de justifier les méthodes pour déterminer l'intersection de droites et de plans dans l'espace en articulant les points de vue cartésien et paramétrique au niveau purement technique de passage d'une représentation à l'autre et plutôt dans le sens cartésien-paramétrique, même si cette articulation n'est pas explicitée. Les auteurs ont besoin d'articuler le cadre géométrique et le cadre algébrique au moyen d'un discours qui justifie ce passage.

Après ce travail, les auteurs introduisent les transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ en articulant les cadres des systèmes linéaires et des matrices, ce qui leur permet d'introduire des exemples des transformations géométriques et d'étudier leurs propriétés.

Après cette introduction du cadre de la géométrie affine euclidienne, les auteurs reviennent à l'algèbre linéaire abstraite, mais les exemples et les exercices qu'ils proposent, où l'on peut repérer le besoin d'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique, correspondent à tous ceux qui appartiennent à la liste ci-dessus en s'appuyant sur les cadres des systèmes linéaires et des matrices qui ont été développés dans ce but.

5.3. L'ouvrage de Kolman et Hill

L'ouvrage de Bernard Kolman et David R. Hill (2006), intitulé *Introdução à álgebra linear com aplicações* (662 pages), sera désigné dans la suite par « Kolman ». Il s'agit d'un cours qui suit la même organisation que les précédents ouvrages, mais en proposant l'utilisation du logiciel MATLAB comme outil pour résoudre une partie des exercices proposés aux étudiants.

Les auteurs introduisent le cadre des systèmes linéaires en l'articulant avec le cadre des matrices, ce qui leur permet de considérer des exemples plutôt liés à l'informatique. Après avoir introduit le cadre des déterminants et souligné qu'ils avaient introduit les méthodes de Gauss et de Cramer pour résoudre des systèmes linéaires et deux méthodes différentes pour calculer l'inverse d'une matrice, les auteurs discutent les critères qui doivent être considérés lorsqu'on a besoin de choisir une méthode ou l'autre.

Ils justifient qu'en algèbre linéaire on peut résoudre la plupart des problèmes en utilisant l'ordinateur, et donc qu'il faut se poser la question de la comparaison des différentes méthodes pour résoudre un même problème afin de découvrir quelle est la plus « rapide ». Ils donnent l'exemple suivant : si l'on considère que l'addition est beaucoup plus rapide que la multiplication, le nombre des multiplications est, habituellement, utilisé en tant que facteur de comparaison pour les deux procédures numériques. Ceci montre la nécessité d'un discours non seulement pour justifier la technique, mais pour choisir celle qui est la plus adaptée au problème que l'on veut résoudre.

5.4. L'ouvrage de Callioli, Domingues et Costa

L'ouvrage de Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, Roberto C. F. Costa (1983), intitulé *Álgebra linear e aplicações* (332 pages), est désigné dans la suite par « Callioli ». Cet ouvrage est un ouvrage d'introduction à l'algèbre linéaire qui s'adresse a priori à tous les étudiants scientifiques. Les auteurs souhaitent proposer un cours où, tant que possible, les concepts d'algèbre linéaire sont introduits à travers des exemples, en s'appuyant sur la géométrie en dimension deux et trois, et en ne se cantonnant pas à la seule exposition théorique du domaine.

Les auteurs débutent par le cadre des systèmes linéaires. Ils incluent quelques considérations théoriques sur l'équivalence des systèmes, mais l'accent est mis sur la méthode d'échelonnement pour la résolution et la discussion des systèmes linéaires, les invariants n'étant pas explicités. Des nombreux exemples de résolution sont traités et des tâches de ce type sont proposées aux étudiants. Le cadre des matrices est ensuite introduit et articulé aux autres cadres.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire, les notions et les théorèmes sont introduits classiquement sans aucune considération explicite sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique pour la représentation des sous-espaces vectoriels. Par contre, les deux types des représentations sont manipulés dans des nombreux exemples simples qui accompagnent le cours. La technique de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique à partir du nombre minimal d'équations est implicitement en jeu dans plusieurs exemples. Aucun commentaire spécifique n'accompagne ces exemples et aucun des exemples du cours ne met en jeu le passage plus délicat d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne.

Le cadre des matrices est ensuite repris et articulé à celui de l'algèbre linéaire via l'association matrice/application linéaire et utilisé pour déterminer inverses et composées.

La notion de dualité, qui est un des moyens permettant de théoriser l'articulation des deux points de vue, apparaît comme un paragraphe isolé au milieu de l'articulation matrice/application linéaire, les notions de sous-espace dual et base duale étant introduites accompagnées d'exemples, sans finalité apparente.

Le cadre des déterminants est, quant à lui, introduit après un chapitre consacré au produit scalaire et aux isométries, à travers la notion de déterminant d'une matrice carrée ; il apparaît comme un outil au service du calcul matriciel et de la résolution des systèmes de Cramer.

Les différents cadres qui nous considérons (géométrie, matrices, systèmes linéaires, déterminants et algèbre linéaire) apparaissent tous dans ce manuel, à l'exception du cadre géométrique qui est seulement brièvement mentionné lors de l'introduction du cadre linéaire. Même s'ils sont introduits de façon autonome, les cadres des systèmes linéaires, des matrices et des déterminants ont essentiellement une fonction d'outil. Les articulations entre cadres sont présentes mais l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique n'est jamais prise en compte au niveau théorique ou technologique dans les articulations entre cadres. Au niveau technique, elles interviennent implicitement, et dans un sens seulement, dans la détermination d'un système générateur pour un sous-espace vectoriel défini de façon cartésienne minimale.

5.5. L'ouvrage de Boldrini et al.

L'ouvrage de J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler (1980) intitulé *Álgebra linear* (411 pages), désigné dans la suite par « Boldrini », s'adresse, comme celui de Callioli, à des étudiants de divers secteurs scientifiques : mathématiques, génie civil, physique, etc. Il s'agit de fournir à tous un cours d'initiation présentant les concepts fondamentaux.

Les auteurs débutent par le cadre des matrices ; ils illustrent les opérations matricielles par des nombreux exemples numériques et présentent diverses applications du calcul matriciel en économie, biologie, probabilités et statistiques.

Le cadre des systèmes linéaires est introduit à travers un exemple emprunté à la chimie et mettant l'accent sur la technique de Gauss comme outil important de résolution. L'équivalence des systèmes obtenue par l'application de la méthode de Gauss est admise dans cette première phase puis démontrée après l'introduction de l'interprétation matricielle d'un système linéaire. La définition du rang d'une matrice permet ensuite d'énoncer et de démontrer le théorème de Rouché. À partir de là, les auteurs traitent dans le cours des exemples simples de systèmes et interprètent les solutions en se référant au « degré de liberté du système » qui définit le nombre de « solutions basiques ». Dans cette partie, on note des éléments technologiques associés au passage cartésien-paramétrique, faisant intervenir les notions de degré de liberté, de solutions basiques, de variable libre et de rang du système.

Le cadre des déterminants n'est introduit que pour les matrices d'ordre 2 et 3 et l'accent est mis sur son caractère outil pour la détermination de l'inverse d'une matrice, la résolution d'un système de Cramer et le calcul du rang d'une matrice.

À partir des considérations géométriques sur les vecteurs du plan et de l'espace, les auteurs introduisent ensuite les notions et les théorèmes de l'algèbre linéaire, classiquement, en s'appuyant sur les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour proposer des exemples permettant des interprétations graphiques. Les représentations cartésiennes et paramétriques sont manipulées dans de nombreux exemples simples qui accompagnent le cours, mais sans aucune considération explicite sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique.

L'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique n'intervient qu'implicitement, uniquement dans le sens de la détermination d'un système de vecteurs générateurs pour un sous-espace définit par une représentation cartésienne minimale.

5.6. L’ouvrage de Lages Lima

L’ouvrage de Elon Lages Lima (1995), intitulé *Álgebra linear*, (310 pages) est désigné dans la suite par « Lages Lima ». Il s’agit, selon l’auteur, d’un ouvrage d’introduction à l’algèbre linéaire qui n’exige pas de connaissances antérieures sur le sujet. Par contre, il faut se rappeler qu’au Brésil le curriculum prévoit au moins un semestre de géométrie analytique en préalable au cours d’algèbre linéaire.

L’auteur débute par le cadre de l’algèbre linéaire via la notion d’espace vectoriel défini axiomatiquement. Des exercices permettent l’articulation avec le cadre géométrique. Ensuite, on aborde la notion de sous-espace vectoriel et les opérations entre sous-espaces. Encore une fois, l’articulation est faite avec le cadre géométrique puisque, à travers des exemples, l’auteur introduit les notions d’hyperplan et de variété linéaire affine. Il y a aussi articulation explicite avec le cadre des systèmes linéaires et celui des matrices, mais il n’y a pas de travail explicite ou implicite sur les représentations cartésiennes et paramétriques et leur articulation.

Dans cet ouvrage, le cadre de l’algèbre linéaire joue un rôle central, les autres cadres n’apparaissant qu’à travers les exemples ou comme outils pour démontrer des propriétés et des théorèmes. L’articulation des cadres est manifestée au fil de l’ouvrage, elle est explicite et se situe davantage aux niveaux théorique et technologique. Sur le plan théorique, les éléments permettant l’articulation entre points de vue cartésien et paramétrique sont présents mais ne font pas appel à la dualité. Mais il n’y a pas explicitation des deux points de vue : le passage cartésien-paramétrique est implicitement géré sur un plan technique et technologique en faisant appel à la méthode d’élimination de Gauss et le passage en sens inverse n’est pas abordé.

6. Conclusion

L’analyse de la vie institutionnelle de l’articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique en algèbre linéaire montre qu’il y a une diversité d’approches possibles et cette diversité va nécessairement influer sur la façon dont seront conçus et travaillés les points de vue cartésien et paramétrique.

Cette diversité est clairement visible dans les six ouvrages analysés, même si les trois premiers suivent une même logique que ceux de Callioli et Boldrini. Les différences sensibles se traduisent par le rôle joué par les cadres des systèmes linéaires, des matrices, de la géométrie, des déterminants et de l'algèbre linéaire.

Dans les ouvrages de Lay, Anton et Kolman le cadre dominant est celui des systèmes linéaires tandis que dans les ouvrages de Callioli, Boldrini et Lages Lima c'est le cadre de l'algèbre linéaire qui est dominant. Il est important de souligner que le travail sur le cadre des systèmes linéaires, en considérant non seulement les solutions des systèmes mais aussi les conditions pour que ces systèmes aient des solutions ainsi que l'articulation avec la représentation des sous-espaces vectoriels, peut aider les étudiants à développer des conduites telles que planifier, exécuter, justifier et contrôler le travail mathématique en jeu. Ce travail avec des systèmes linéaires favorise aussi l'utilisation de l'algèbre linéaire dans d'autres cadres, en particulier, dans le cadre des matrices qui est beaucoup utilisé en informatique.

Dans les six ouvrages, le cadre de l'algèbre linéaire est différemment développé : la dualité y apparaît ou non, sous des formes faibles et fortes, et y joue un rôle plus ou moins important. De plus, les relations avec les autres cadres mettent en jeu soit des simples rapports d'utilisation (Callioli, Boldrini), soit des rapports plus riches, par exemple dans Lages Lima où le cadre de l'algèbre linéaire est essentiel à la conceptualisation et dans Lay, Anton et Kolman où la conceptualisation s'appuie sur le cadre des systèmes linéaires. Cela semble plus adapté à un cours d'introduction à l'algèbre linéaire, puisque dans ce cas on travaille avec des espaces « concrets », c'est-à-dire les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ qui permettent aux étudiants d'en construire des images mentales.

Soulignons que les points de vue cartésien et paramétrique ne sont pas identifiés en tant que tels. Dans les ouvrages analysés, l'existence des deux points de vue reste implicite, cachée derrière les systèmes de représentation des objets.

Dans les ouvrages de Callioli, Boldrini et Lages Lima les tâches de la liste présentée auparavant sont faiblement présentes et les exercices consacrés à la résolution des systèmes. On note, de manière générale, une prédominance des exercices de simple résolution. Ces auteurs pouvaient profiter des tâches présentées ci-dessus pour articuler les techniques avec la partie cours, c'est-à-dire avec la théorie qui est proposée avant les exercices.

Pour les ouvrages de Lay, Anton et Kolman, même si les tâches de la liste sont encore faiblement présentes, on note que les exercices de résolution de systèmes exploitent aussi la détermination de l'ensemble solution ou de sous-espace solution et l'étude des systèmes avec paramètres. Dans ces mêmes ouvrages, on observe qu'il y a des tâches spécifiques pour l'application dans les autres sciences – et aussi pour l'utilisation du logiciel MATLAB dans le cas de Kolman –, qui ont besoin d'être explicitées et justifiées par un discours technologique qui permet d'articuler les différents cadres qui nous avons considérés et le cadre des applications concernées. Par exemple, pour articuler la résolution des systèmes linéaires avec des droites dans $\mathbb{R}^2$ et des droites et des plans dans $\mathbb{R}^3$ en considérant la définition de ces sous-espaces affines par des équations ou par des vecteurs générateurs et une solution particulière, il est simple de se placer au niveau technique puisqu'il faut appliquer la méthode de Gauss au système et trouver les conditions pour que les systèmes aient de solution. Mais pour définir ce sous-espace par une représentation paramétrique ou cartésienne, il faut contrôler les résultats tant au niveau technologique que théorique. Cela est évident dans l'exemple que nous avons présenté ci-dessus. [2]

Références

Anton, H. & Rorres, C. (2001). *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre, Brésil : Bookman.

Boldrini, J. L., Costa, S. I. R., Figueiredo, V. L. & Wetzler, H. G. (1980). *Álgebra Linear*. São Paulo, Brésil : Harper & Row.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

2. Étude menée dans le cadre du projet de coopération CAPES-COFECUB (n° 625/09) et plus précisément concernant l'axe sur la transition entre le secondaire et supérieur.

Callioli, C. A., Domingues, H. H. & Costa, R. C. F. (1983). *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo, Brésil : Atual Editora.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(1), 73-112.

Commission Inter-IREM Université (1990). *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année. Principes et réalisations*. Lille, France : IREM.

Dias, M. A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre les points de vue « cartesien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre lineaire* (Thèse de doctorat). Université Paris 7.

Dorier, J.-L. (1990). *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique* (Thèse de doctorat). Université Grenoble 1, France.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse d'État). Université Paris 7.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères, 6*, 132-158.

Kolman, B. & Hill, D. R. (2006). *Álgebra Linear com Aplicações*. Rio de Janeiro, Brésil : LTC.

Lages Lima, E. (1995). *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, Brésil : Sociedade Brasileira de Matemática.

Lay, D. C. (1999). *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Brazil : LTC.

Pavlopoulou, K. (1994). *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique* (Thèse de doctorat). Université de Strasbourg, France.

Robert, A. & Robinet, J. (1989). Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. *Cahier de didactique des mathématiques, 53*.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-189.

Rogalski, M. (1991). Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année. *Cahier Didirem, 11*.

Rogalski, M. (1995). *Notes du séminaire à São Paulo* [Mimeo]. São Paulo, Brésil.

Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje

Cecilio Fonseca
Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España

Alejandra Pereira
IES Escolas Proval, Pontevedra, España

José Manuel Casas
Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España

Abstract. The work presented is still experimental and is being developed at a workshop on mathematics. Our goal, from an open proposal of the concept of Study and Research Courses (SRC) developed by Chevallard, is to experiment a particular model of SRC, allowing the creation of frameworks to design learning situations capable of influencing the institutional mathematical activity where modelling and technology play an important part.

Résumé. Le travail présenté en est encore au stade expérimental et se déroule dans le cadre d'un atelier de mathématiques. À partir d'une proposition ouverte du concept de parcours d'étude et de recherche (PER) élaboré par Chevallard, notre objectif est d'expérimenter un modèle particulier de PER. Ce modèle a l'ambition de permettre la création de cadres de référence pour concevoir des situations d'apprentissage susceptibles d'influencer l'activité mathématique institutionnelle de façon à ce que la *modélisation* et la *technologie* jouent un rôle important.

Resumen. El trabajo que se presenta está en fase de experimentación y se está desarrollando en un taller de matemáticas. Nuestro objetivo es, a partir de una propuesta abierta del concepto de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) —elaborada por Chevallard— experimentar un modelo particular de REI. Se pretenden crear marcos de referencia para diseñar situaciones de aprendizaje que permitan actuar sobre la actividad matemática institucional, donde la *modelización* y la *tecnología* tengan un fuerte protagonismo

---

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 671-684)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

En el ámbito de investigación de la educación matemática, durante los últimos 25-30 años es posible observar un intento de retorno a la «modelización y aplicaciones». Esta tendencia se observa claramente, por ejemplo, en el estudio de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática, desarrollado en Kuwait en 1986, donde se reconoce explícitamente la necesidad de incorporar las «aplicaciones» de las matemáticas a la enseñanza (García, 2005).

Muchos enfoques en educación matemática, avalados por informes internacionales como PISA propugnan la *necesidad de enseñar las matemáticas como una herramienta de modelización*, centrándose en las cuestiones o situaciones que surgen fuera del ámbito de las matemáticas. Aparece también como una exigencia del Espacio Europeo de Educación Superior en cuyo ámbito se considera que la modelización puede aportar resultados positivos al problema docente.

Nuestro objetivo en este trabajo es experimentar y completar un nuevo dispositivo didáctico como son los recorridos de estudio e investigación (REI) que pueden convertirse en una herramienta para la integración en la enseñanza de la modelización matemática. El modelo de REI que estamos experimentando tiene muy en cuenta el marco institucional donde trabajamos: las escuelas de ingeniería. Nos centraremos, por problemas de espacio, en el modelo teórico que estamos diseñando y desarrollando.

2. Antecedentes

Nos situamos dentro de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997), cuya unidad mínima de análisis lo constituye lo que se llama una organización matemática (OM) formada por tipos de tareas, técnicas (o «formas de hacer»), tecnología (o «discurso» sobre la técnica) y la teoría (justificación de la tecnología). En Fonseca (2004) para estudiar la rigidez de la actividad matemática de Secundaria se formuló la siguiente conjetura general en forma de hipótesis:

> En Secundaria el estudio de las organizaciones matemáticas se centra en el bloque práctico-técnico siendo muy escasa la incidencia del bloque tecnológico-teórico sobre la actividad matemática que se realiza efectiva-

> mente. No se cuestiona hasta qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan dichas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada, ni su eficacia, ni su economía, ni sus relaciones con otras técnicas, ni sus limitaciones, ni las posibles modificaciones que podrían sufrir dichas técnicas para aumentar su eficacia en la realización de ciertas tareas. Como consecuencia, la actividad matemática que se estudia en Secundaria es *puntual*, *rígida* y *aislada* (o *poco coordinada* entre sí).

Describimos mediante cinco *conjeturas específicas* algunas de las características principales de esta rigidez:

- C1. Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica
- C2. Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado
- C3. No existen dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea
- C4. Ausencia de técnicas para realizar una tarea «inversa»
- C5. Ausencia de situaciones abiertas de modelización

El estudio que nos permitió contrastar experimentalmente estas cinco conjeturas se hizo utilizando dos tipos de datos empíricos como indicadores de las características de las OM que se reconstruyen en la institución de la enseñanza secundaria española: por un lado, un cuestionario en el que participaron varias universidades españolas y, por otra parte, los datos obtenidos del análisis de una muestra de manuales aprobados oficialmente por las autoridades educativas españolas para su uso en la enseñanza secundaria.

Los dos tipos de datos empíricos obtenidos muestran que los alumnos tienen problemas con la nomenclatura, manejan una sola técnica, no distinguen entre tarea directa y tarea inversa, no interpretan las técnicas y tienen una extraordinaria dificultad para trabajar con tareas abiertas, lo que provoca una incompletitud de la actividad matemática desarrollada y pone de manifiesto la desarticulación de las matemáticas escolares. Los resultados ponen de manifiesto que en Secundaria el contrato didáctico institucional prima una actividad matemática puntual, rígida y aislada, que dificulta e incluso impide el desarrollo de una actividad matemática funcional.

La respuesta a esta incompletitud matemática fue la creación de una herramienta didáctica, la noción de «organización matemática local relativamente completa» (OMLRC), que podemos situar en el mundo de la ingeniería matemática-didáctica y que pretende aportar soluciones a las restricciones de las organizaciones matemáticas descritas anteriormente (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

En una institución docente determinada destacamos *dos condiciones* que se deben cumplir necesariamente para que sea posible reconstruir una OMLRC. En primer lugar, constatamos que, tanto en Secundaria como en la Universidad, los problemas escolares se presentan con enunciados muy cerrados en los que figuran como «datos» todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema sin que falte ni sobre ninguno. Raramente se presenta una *situación abierta* donde el estudiante deba decidir cuáles son los datos que se necesitan para formular correctamente un problema matemático. Pocas veces se problematiza el propio enunciado de los problemas como punto de partida para *plantear nuevos problemas*. Pues bien, en el diseño de una OMLRC es necesario en primer lugar que la OM en cuestión contenga un *cuestionamiento tecnológico* pertinente, esto es, un conjunto de tareas matemáticas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas y, además, que dicho cuestionamiento incida de tal forma sobre la práctica matemática que provoque el desarrollar el momento del trabajo de la técnica en una dirección tal que produzca una actividad matemática de complejidad creciente, que provoque la ampliación del tipo de problemas que puedan abordarse.

En segundo lugar se requiere que el tipo de tareas que generan la actividad matemática esté asociado a una *cuestión matemática* «*con sentido*», esto es, que provenga de los niveles superiores de determinación didáctica y conduzca a alguna parte, que no se trate de una cuestión «muerta». La razón de ser (matemática o extramatemática) de la actividad matemática puede estar más allá de los propios contenidos matemáticos. El olvido de la razón de ser de las OM enseñadas (sea esta intra-matemática o extramatemática) lleva a presentar las citadas OM como si fueran monumentos que deben ser visitados sin ninguna funcionalidad lo que constituye un importante fenómeno didáctico que ha sido denominado «monumentalismo» por Yves Chevallard (2004).

Todas estas restricciones, que fueron puestas de manifiesto en el trabajo de Cecilio Fonseca (2004) originan una incompletitud relativa de las OM escolares y exigen la puesta en marcha de un nuevo contrato didáctico capaz de superarlas.

3. Marco teórico

En los trabajos de Y. Chevallard (2004, 2006) se introduce por primera vez un nuevo dispositivo didáctico, denominado *recorrido de estudio e investigación* (REI) para el estudio de la modelización matemática. En esa propuesta inicial un REI viene generado por el *estudio de una cuestión viva* Q_0 *y* con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas. El estudio de Q_0 y de sus cuestiones derivadas conduce a la construcción de un gran número de saberes que delimitarán el mapa de los posibles recorridos y sus límites.

Esta primera propuesta abierta del concepto de REI elaborada por Y. Chevallard y desarrollada en trabajos posteriores (García, 2005; Barquero, Bosch & Gascón, 2006; Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2006), junto con las restricciones matemáticas expuestas anteriormente, nos permitió comenzar a elaborar y experimentar un modelo de REI que se adapte a nuestro entorno institucional (escuelas de ingeniería donde impartimos la docencia).

Este modelo de REI (Fonseca, Casas & González, 2008) con el que estamos trabajando viene caracterizado por:

- Una *situación problemática* a la que tenemos que dar respuesta.
- Una *institución didáctica* concreta.
- Una *razón de ser* que explique el proceso de estudio de la actividad matemática en la que el problema en cuestión ha surgido.
- Una *situación generatriz.*
- Una *organización matemática relativamente completa*.
- Un *contrato didáctico* renovado acorde a las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior.

En la TAD se postula que, para que una cuestión matemática pueda estudiarse con «sentido» en la Escuela, es necesario:

(b) Que *conduzca a alguna parte*, esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela, sean estas matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*). Plantearemos diversas situaciones problemáticas que podemos situar en distintos sistemas (económico, físico, químico, médico, etc.) que pongan de manifiesto la necesidad de la derivada.

(c) Que provenga de *cuestiones* que la Sociedad propone que se estudien en la Escuela (*legitimidad cultural o social*). Aquí debe figurar el diseño curricular, manuales y aportaciones de organismos oficiales como, por ejemplo, el informe PISA.

(d) Que aparezca en ciertas *situaciones* «umbilicales» de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).

(e) Además de las legitimidades anteriores marcadas por la TAD, es importante estudiar los contenidos que la educación matemática considera como problemáticos *(legitimidad didáctica)*.

De entre las situaciones problemáticas con sentido, y previo acuerdo con los alumnos, estudiaremos una que sea suficientemente rica, viva y fecunda para generar una actividad matemática de complejidad creciente que obligue al alumno a un cierto compromiso personal en su resolución. A esta situación problemática concreta le llamaremos *situación generatriz*. Es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio y, se debe mantener viva a lo del mismo.

A partir de la situación generatriz plantearemos inicialmente cuestiones, cuyas respuestas están disponibles en la actividad matemática desarrollada por los alumnos, combinadas con otras para las que no disponemos de una técnica conocida que nos permita encararlas. Este posible conflicto desencadenará la creación de una OM más amplia y completa y pondrá en marcha, por un lado, un proceso de ingeniería didáctica (gestionado por los momentos didácticos) y, por otro lado, un proceso de ingeniería matemática (mide el grado de completitud de la actividad matemática. Ambos procesos se articulan alrededor de una OMLRC (Fonseca, 2004).

La aparición en el Espacio Europeo de Educación Superior del concepto de *competencia* y de crédito europeo (ECTS), junto con las restricciones puestas de manifiesto por C. Fonseca (2004) exige la puesta en marcha de un nuevo contrato didáctico. Para ello, se trasladan al alumno algunas de las responsabilidades que, sin ningún tipo de cuestionamiento institucional, estaban asignadas al profesor en exclusiva. También se rompe el contrato didáctico habitual de la «clase de problemas» según el cual se cambia de manera relativamente frecuente de un tipo de problemas a otro y que, por lo tanto, provoca cierta rigidez en el uso de las técnicas matemáticas (que deben cambiarse constantemente).

Además, se pretende que el estudiante aprenda a realizar pequeños desarrollos informáticos a partir de un trabajo práctico y que comience a ejercer como ingeniero, aportando conocimiento y nuevas respuestas que nos permita buscar una optimización del proyecto impulsado por la situación generatriz.

También se potenciará la interdisciplinariedad para hacer más visibles las matemáticas para la sociedad. Siempre que sea posible las situaciones problema a estudiar se tomarán del ámbito profesional de los ingenieros con la condición adicional de que se trate de proyectos realistas.

Es importante conseguir que el *taller de matemáticas* no sea una actividad aislada del resto de los dispositivos didácticos. En el caso de la evaluación, se pedirá a los alumnos que presenten periódicamente resultados (oralmente y por escrito) que deben ser evaluados por el profesor. Se hará una evaluación por proyectos correspondiente a cada tema determinado, cuya realización combinará el trabajo en el aula con el trabajo fuera del aula y que tendrá un peso importante en la calificación global de la asignatura.

Los REI priorizan el carácter funcional de las matemáticas situándolo como el corazón de la construcción de la actividad matemática y, como recurso didáctico, encajan muy bien en el marco institucional donde desarrollamos la docencia (escuelas de ingeniería). Por otra parte, permiten reconstruir (esto es, estudiar) organizaciones matemáticas locales relativamente completas en el sistema educativo. En la implantación efectiva de un REI el modelo didáctico es muy distinto al modelo institucional imperante, en el que primero se estudia la teoría y después se buscan aplicaciones a esa teoría. En un REI partiremos de una cuestión problemática inicial definida por la situación generatriz y, mediante sucesivos desarrollos de la actividad matemática, la iremos completando y ampliando hasta obtener una OMLRC.

4. Los REI en la construcción de secuencias de enseñanza-aprendizaje

Después de explicar el modelo de REI con el que trabajamos, a continuación explicitaremos ese modelo para un ejemplo concreto que gira alrededor del diseño y construcción de un acueducto, que forma parte de un campo de problemas más amplio relativo a la OM de la derivada, que estamos desarrollando.

Nuestro propósito es mostrar, mediante la consideración de un caso muy particular de OM, de qué manera se pueden retomar ingredientes técnicos que los alumnos han aprendido a utilizar de manera muy rígida y limitada para, a partir de una cuestión generatriz, poder generar nuevas técnicas, nuevas justificaciones y explicaciones y nuevas cuestiones, de modo que se vaya ampliando la actividad matemática de partida, que suele ser muy puntual y aislada. Uno de nuestros objetivo, que está en una fase inicial, es desarrollar diversos REI alrededor de la derivada de una función que comience en Secundaria y continúe en la Universidad, retomando los contenidos de Secundaria con el objetivo de cuestionarlos, mostrar sus limitaciones y reestructurarlos o integrarlos en organizaciones cada vez más amplias y complejas a estudiar en la etapa universitaria. Por problemas de espacio, lo que aquí figura es una versión muy resumida de un posible REI en una secuencia de enseñanza-aprendizaje que puede servir para estudiar la actividad matemática ligada a la *optimización de funciones.*

4.1. Organización global del taller y cuestión inicial

La situación problemática que se tomó como punto de partida es la de afrontar problemas que requieran la búsqueda de una solución óptima. La institución en la que nos situamos es la del primer curso de las escuelas de ingeniería técnica industrial y forestal de la Universidad de Vigo.

Para empezar, necesitamos explicar el proceso de estudio de la actividad matemática en la que el problema en cuestión ha surgido. Los alumnos tienen que explicitar en su cuaderno los diferentes tipos de legitimidad: legitimidad funcional (plantearemos diversas situaciones problemáticas extra-matemáticas), legitimidad social (programa, manuales), legitimidad matemática (cuándo y por qué de los extremos relativos) y legitimidad didáctica (el estudio de la derivada aparece como un concepto problemático) de la optimización de funciones.

De todas las situaciones problemáticas planteadas discutimos con los alumnos cuál nos parece rica y fecunda. Se acordó elegir la relativa a un sistema de ingeniería que podemos describir de la forma siguiente:

> Diseño de un acueducto para obtener el mayor caudal posible a partir de una plancha rectangular metálica (figura 1).

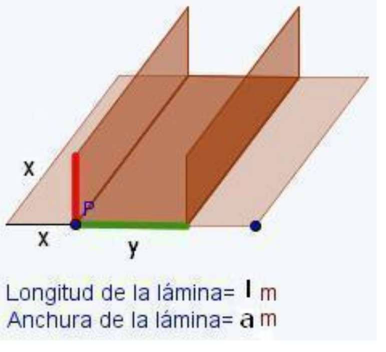


Figura 1. Esquema del acueducto

Intencionadamente se plantean enunciados muy abiertos, sin datos numéricos, rompiendo el contrato didáctico habitual, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema. Estamos pues ante una tarea matemática «abierta».

La construcción de la OM relativa a la derivada la comenzaremos a partir de tareas propuestas en el primer curso de bachillerato. Estudiaremos sus limitaciones que nos servirán para ampliar la actividad matemática de la derivada a segundo de bachillerato. Después les propondremos tareas en segundo de bachillerato, que no tienen respuesta en ese curso con las técnicas disponibles por el alumno. Este tipo de tareas que no tienen respuesta en bachillerato constituyen una posible razón de ser para el estudio de la actividad matemática desarrollada en la universidad.

Por lo que se refiere a las matemáticas en el currículo actual de bachillerato, los alumnos estudian en el primer curso la monotonía, la concavidad y convexidad de funciones polinómicas sencillas. En el segundo de bachillerato se amplían esas nociones a otras funciones como las trigonométricas, las racionales sencillas, las exponenciales, las logarítmicas, la función raíz cuadrada y todas las que resulten de transformaciones elementales de estas. Es precisamente en este ámbito en el que aparece por primera vez la optimización de funciones.

Por lo que se refiere al instrumento informático, trabajamos con un programa de geometría dinámica (*Geogebra*) y otro de cálculo simbólico (*Maxima*).

4.2. Los momentos del estudio

En el momento del primer encuentro es donde podemos concretar la situación generatriz dando unos valores concretos a los parámetros (y situándonos así inicialmente en el contrato didáctico imperante actualmente en el bachillerato):

> Un ingeniero está diseñando un acueducto y tiene que usar láminas rectangulares de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo. Quiere doblar las láminas a lo largo para formar dos ángulos rectos. Como se debe efectuar este doblaje de modo que el caudal sea máximo.

Podríamos ya abordar el problema con una primera técnica (utilizar lápiz y papel) calcular el área del acueducto para valores dados. Esta es una técnica muy rudimentaria con un coste enorme. La necesidad de buscar una técnica que disminuya el coste nos introduce en el momento exploratorio, momento en el que podemos empezar a explorar este tipo de situaciones problemáticas con una primera técnica, que puede ser un programa de geometría dinámica (Artigue, 2006).

Utilizando como instrumento informático el *Geogebra*, se puede establecer una relación entre la altura del acueducto y su área, que nos permite intuitivamente ver que el caudal crece, alcanza un valor máximo y después decrece de nuevo. Tenemos así una primera *hipótesis* pero es solo eso, una hipótesis, por el momento. La necesidad de ser rigurosos en la respuesta nos introduce en el momento del trabajo de la técnica, en donde construiremos el modelo matemático (identificar los elementos que forman parte del sistema, elegir las variables que lo determinan, la forma como se relacionan las variables y la expresión algebraica del modelo).

Una vez construido el modelo, lo utilizaremos para avanzar posibles respuestas utilizando las técnicas numéricas y gráficas. Estudiaremos debilidades y fortalezas de ambas técnicas. Las debilidades de ambas técnicas que no nos permiten dar una respuesta rigurosa, nos introduce en el momento tecnológico-teórico, en donde, justificaremos el estudio teórico de la derivada (primando el desarrollo tecnológico de acuerdo con la institución en la que trabajamos).

Volveremos a retomar el momento del trabajo de la técnica, escaparemos de la rigidez y de la puntualidad de las tareas de Bachillerato; eso quiere decir que estudiaremos no solo como varía la función, sino que también tendrán un fuerte protagonismo las funciones primera y segunda derivada, estableceremos tablas numéricas de la función y de sus derivadas, pediremos que interpreten numéricamente la primera y segunda derivadas en puntos, veremos la posibilidad de representar no solo la función, sino también las funciones primera y segunda derivadas y resolveremos con el programa de cálculo simbólico *Maxima* el cálculo del extremo relativo. Plantearemos el problema inverso: el de cómo obtener una función a partir de la gráfica de su derivada.

En su trabajo como futuros ingenieros que tienen que construir proyectos debatiremos si el modelo construido da una buena respuesta al problema y mostraremos en qué sentido continúa siendo un modelo incompleto. Aquí es donde se pone de manifiesto la naturaleza del proceso de modelización tal como se conceptualiza en la TAD: a partir de una situación generatriz se genera una actividad matemática de complejidad creciente donde cada nueva OM que aparece amplía y completa la anterior. El grado de complejidad aumenta de una forma considerable cuando se introducen parámetros, es decir cuando pasamos de un caso particular a un caso general, algo que no se hace en la enseñanza del bachillerato en España y que debemos poder hacer en la Universidad.

En el taller se plantean a los grupos de alumnos nuevas *tareas de perturbación* de la situación generatriz que permiten completar y generalizar el estudio de nuestro proyecto, algunas de las cuales figuran a continuación:

- *Primera modificación*: plancha metálica de ancho L metros y longitud cualquiera
- *Segunda modificación*: el acueducto es circular
- *Tercera modificación*: longitud de plegado x fija y variación del ángulo de plegado α
- *Cuarta modificación:* ángulo de plegado α fijo y variación de la longitud de plegado x
- *Quinta modificación*: se varían ambos parámetros simultáneamente, la longitud de plegado x además del ángulo α de plegado.

La tarea anterior nos permite completar y ampliar todavía más la actividad matemática y puede servir como una posible razón de ser para el estudio el estudio de funciones de varias variables y en particular para el estudio de sus extremos relativos.

En relación al uso de las TIC, además del instrumento informático utilizado, algo que se supone obligatorio en el mundo de la ingeniería, los alumnos disponen de una herramienta informática creada por nosotros (una wiki) que permite un trabajo colaborativo entre los propios alumnos.

En el *momento de la institucionalización* pretendemos que el alumno de ingeniería además de estudiar la herramienta teórica relativa a la derivada, de la que destacaremos su faceta tecnológica, se acostumbre a una forma de trabajo autónoma, de la que forme parte una herramienta informática, pensada para obtener información sobre un proyecto determinado que admite nuevas cuestiones distintas a una cuestión inicial previa, acompañado de un discurso racional, que le obligue a justificar, analizar e interpretar la razón de ser de la actividad matemática que desarrolla. En todo el procedimiento debe ocupar un lugar preferente el por qué y el para qué del proceso de estudio utilizado.

Por último, en el *momento de la evaluación* deben analizarse, además de las responsabilidades del profesor y del estudiante en el REI estudiado, la propia actividad matemática institucional que se ha puesto en juego.

5. Primeras conclusiones

Se pretende que los alumnos trabajen como futuros ingenieros y pasen de una respuesta muy limitada de una cuestión inicial a otra situación abierta, en forma de proyecto, donde se busca una respuesta más amplia y completa.

Aparecen problemas de encaje entre el tiempo didáctico y el tiempo institucional así como dificultades a la hora de gestionar el trabajo autónomo de los alumnos.

La implantación de REI en las instituciones escolares requiere todavía de mucha experimentación, pero los datos de que disponemos indican claramente que en la medida que los alumnos viven un Recorrido de Estudio e Investigación, la comunidad de estudio lleva a cabo una auténtica actividad matemática en el sentido de la TAD.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Artigue, M. (2006). La inteligencia del cálculo. *Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española, 2*(5). http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=327&Itemid=200

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2006). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.) *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24* (2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée (Lyon, 3-4 mai 2004)*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE/ Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Casas, J. M. & González, H. (2008). Un recorrido de estudio e investigación en torno a una tarea de modelización: el cálculo del volumen máximo de una piscina, *Actas XVI Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*. Cádiz.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 635-660). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Research and study course diagrams as an analytic tool: The case of bi-disciplinary projects combining mathematics and history

Britta Hansen and Carl Winsløw
Dept. Science Education, University of Copenhagen, Denmark

Résumé. La notion de parcours d'étude et de recherche paraît être surtout utilisée comme un dispositif d'ingénierie didactique. Nous proposons ici son usage comme outil d'analyse de certaines formes d'étude pluridisciplinaire tel le « projet de filière » au lycée danois.

Resumen. Hasta ahora los recorridos de estudio e investigación han sido principalmente utilizados como una herramienta en el diseño didáctico. En este trabajo proponemos su utilización como una herramienta para el análisis de estudios multidisciplinares como por ejemplo en el caso de los «proyectos finales» en el sistema de enseñanza secundaria danesa.

Abstract. The notion of research and study course seems to have been used mainly as a tool in didactic engineering. In this paper, we suggest that it can be most profitably employed as an analytic tool to investigate different forms of multidisciplinary students' assignments and works, such as the "final project" that Danish high school students have to complete.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 685-694)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Background

The Danish high school went through a major reform in 2005. A main feature of this reform is a much greater emphasis on students' autonomous work (individually and in groups) and on co-disciplinary work motivated by real questions (see also Chevallard, 2004) within such work. In particular every student must, in the third year, do an autonomous "final project" combining knowledge from two (or more) disciplines, chosen by the student among the major disciplines of his stream, to study a common theme presented by some broad questions. The latter are formulated by the teachers of the disciplines involved. After receiving this formulation, the student must independently produce, within two weeks (free from other school duties), a report of 15-20 pages on the theme. It should be noted that while *no* interaction with the teacher is foreseen in the two-week period during which the report is written, the student and the teacher have agreed on the general subject area long before, and in the preceding months the student has been studying this more general area, with the help of the teacher. A main objective of the final projects is to "prepare the students for advanced studies", with their higher emphasis on individually driven and realised study processes. To demand that students address some given, relatively open "questions" (beginning with developing and delimiting these questions) can also be seen as an effort to make them engage in academic, "research-like" processes, albeit closely linked to the study of a smaller set of texts.

When the first "final projects" were done (in 2007), the discipline most frequently combined with mathematics was history. This combination continues to be quite popular. Even if all Danish high school teachers are bi-disciplinary, very few have this combination. So that to construct "good" project assignments of this type represented a challenge which was new in two senses: history and mathematics teachers had to collaborate to set assignments, and these were of a new kind in high school. This makes it interesting to study the resulting process and products.

The research reported on here concerns only products. The first author obtained, as material for her master's thesis (Hansen, 2009) in mathematics (speciality: didactics), a sample of 14 project assignments together with the corresponding student reports. Now, how to analyse this material? We decided to make use of “research and study courses” (RSC) (Chevallard, 2006) as an *analytic model*, and in particular to adapt the “tree-diagram representation” (Barquero et al., 2007) to this purpose. This means that even if the final projects were not designed knowing or using ATD or RSC, we found that the products could be meaningfully analysed as (traces of) an RSC. The result of the analysis of the projects is thus “mapped” as a tree diagram beginning with the question(s) put by the teachers, continuing with the students’ derived questions (often two or three levels before reaching a question which the student can relate to praxeologies of one of the disciplines) and further on to the synthesized answers to overlying questions. Various colour codes and marks are used to distinguish questions within one of the disciplines or within three major types of “integrated problems” (the definition of which draws on other parts of ATD). Although the resulting diagrams are quite complex and do not reflect the full contents of each project, it does show major features like the autonomy with which the student has generated further questions, the degree to which the disciplines were really integrated, and the coherence of the project as a whole. Supplemented with the reconstructed set of questions and the praxeologies developed to answer them, we found that this provides a good (and, in many cases, quite revealing) picture of the projects. In this paper we present two examples.

In other projects supervised by the second author, such as Thrane (2009), the RSC model has been used to construct and test bi-disciplinary didactic organisations in high school; such work resembles more the uses of RSC which have been presented at earlier ATD conferences. The point of this paper is to show that using RSC as an analytic model for analysing “natural” practices adopting similar goals can lead to new insights. Moreover, we think that research of this type may also advance a more distant practical goal: to turn the RSC model into common, explicit and helpful tools for ordinary teachers.

2. RSC representation of work combining mathematics and history

In general, a RSC can be represented as beginning with a generative question that motivates a whole “tree” of questions (as in figure 1).

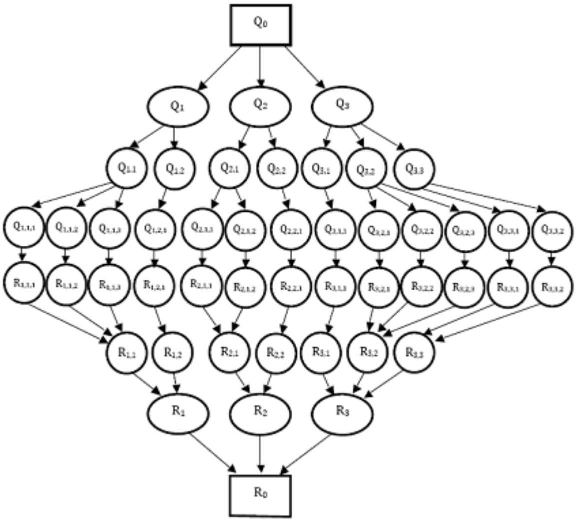


Figure 1. Double-tree representation of a RSC

The "course" is thus not a fixed menu set by the teacher but rather a "course of action" developed by students who may choose to pursue some directions, among many other possible ones. We denote the generative question as Q_0, questions which are derived from this (e.g., as parts or explications) as Q_1, Q_2, Q_3…, and so on (see figure 1). The answers may appear as a reflection of the tree, and can often be omitted if the purpose is just to show the structure (and not the detailed contents) of the RSC. In the high school projects we consider here, the generative question—and typically also the next level, where questions are closer to the high school disciplines—have to be found in the problem formulations set by the teacher, while the rest is obtained by careful analysis of the report produced by the students. Often the way the student has structured the report may be used to identify "sub-questions"; they do not always appear explicitly.

Projects combining history and mathematics (as disciplines within Danish high school) must, obviously, involve praxeologies from each of these. However, it is also clear that they must do more, and that the theme of the project must somehow necessitate not only the simultaneous presence but also the integration of these two types. We have found it useful to distinguish three major types of interdisciplinary questions or "tasks" that could arise in this combination:

Type 1, “mathematics from the past”: interpret and explain mathematical texts from the past, with regard to their mathematical contents (as one does in the history of mathematics as a research field);

Type 2, “mathematics in history”: study mathematics and mathematicians with historical methodology (and no significant attention to mathematical detail), as phenomena in human history;

Type 3, “mathematical modelling of history”: using mathematics to analyse historical phenomena.

The analysis of the projects (formulation by teachers and report by student) will then identify the *questions* which are being posed and treated. While these questions have to be formulated and the answers analysed relatively to a reference model, we found that a diagrammatic representation, a bit finer than figure 1, is very useful to give a synthesis of the project, particularly to compare and contrast several projects (as the 14 projects analysed in Hansen, 2009). In the original version of figure 2, we distinguished the mono-disciplinary and interdisciplinary types of the questions by colouring the “bubbles” of the questions (mathematics: green; history: blue; interdisciplinary questions, type 1: red, type 2: purple, type 3: yellow). We must of course distinguish the questions which are set by the teachers and those which are developed by the student (the latter are shown with dashed bubbles; see figure 2).

It is not a problem at all that disciplines as different as history and mathematics give rise to projects with clearly identifiable mono-disciplinary parts. What could be problematic is if it contains nothing more. In fact, the links are often fragile; in particular, interdisciplinarity of type 1 and 2 (by far the most common) are often achieved by loose descriptions of the historical or biographical contexts of some particular mathematical development (type 1) or by loose descriptions of the mathematical components of some technology which has been important at some point in history (type 2).

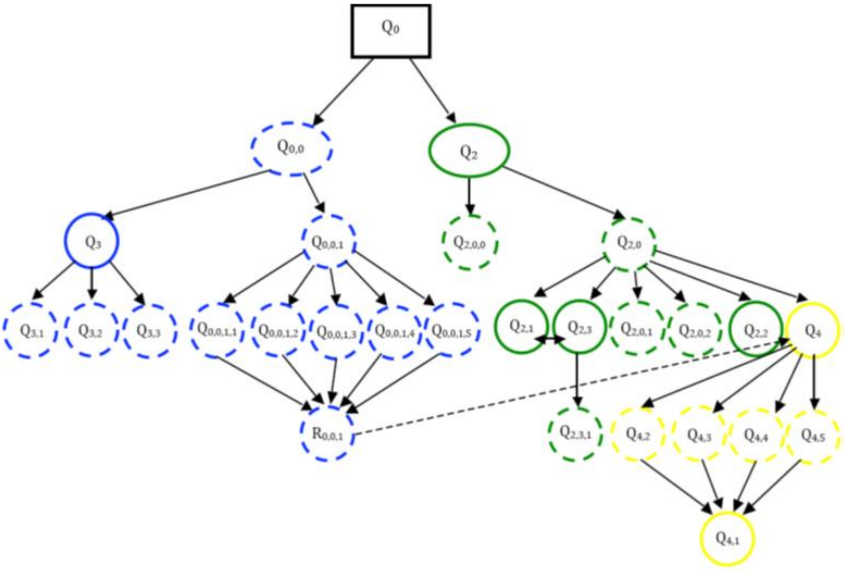


Figure 2. Analysis of the project "The Cuba crisis and game theory"

In the next section we show our analyses of two projects, including a project featuring the more rare type 3 interdisciplinarity (the corresponding tree diagram is the one shown in figure 2).

Case 1: "The Cuba crisis and game theory"

The problem formulation by the teachers contains, almost verbatim, the following:

Q_0: Model the development of the Cuba crisis using game theory.

Q_1: What motivates using mathematical games to model the decision processes in the Cuba crisis?

Q_2: Explain the relevant notions from game theory, using concrete examples.

Q_3: Explain the events leading to the Cuba crisis during the cold war, using the enclosed historical sources.

Q_4: Construct the game "The Cuba crisis" and evaluate whether the main agents made rational decisions in relation to the solution of the game.

A generative question in the sense of Chevallard (2006) is one which is of societal importance and of interest to the student(s). It could be argued that such a question (e.g., "what could guide state leaders in their decisions as a conflict threatens to become a war?") is implicit in the above questions, but this more general motivation is still fairly obvious. We believe the narrower formulations are well motivated by the institutional constraints (the student has to do the work on his own and within two weeks; moreover, it must involve and combine substantial elements of the two disciplines).

As shown in figure 2, the student essentially ignores Q_1, which is a pity since the explicit discussion of the rationale to use a particular model is an important step in mathematical modelling. The first two sections of the report (each about 8 pages) are indeed “monodisciplinary”. First, a historical section, based on Q_3 and reformulations of Q_0 ($Q_{0,0,1}$: describe the events and actions of the crisis), then a section developing answers to (sub-questions of) Q_2, following rather closely a couple of presentations written for the level of high school (and referenced in the report). But in the last four pages the student succeeds to connect some of $R_{0,0,1}$ to Q_4 and (more obviously) to parts of R_2. The model chosen is a *sequential game* (since the two parties have partially opposing interests) represented by a decision diagram where the different options are weighed according to the gains of each player. This leads to identification ($Q_{4,5}$, $R_{4,5}$) of a Nash equilibrium of the game, which is roughly a situation in which the players have chosen strategies in such a way that none of them will benefit from changing their strategy if the other player keeps his strategy. Moreover the strategy is optimal with respect to the quantified priorities of both players (including one they share, namely to avoid a nuclear war).

Case 2: “Fermat’s last theorem and Sophie Germain”

We contrast this with the analysis of another project, whose overall theme is the work of Sophie Germain on Fermat’s last theorem and her situation as a female mathematician in the 18^{th} century. It contains three almost independent parts: Q_1: discuss Fermat’s last theorem and prove the special case $n = 4$; Q_2: Describe the work and life of Sophie Germain; Q_3: Relate to the historical context of the French Revolution and its impact on the educational system in France. The main part of this project is a long account (10 pages) of Fermat’s theorem and partial proofs in the past, mainly of type 1 but also with substantial elements from number theory ($Q_{1,2,1}$: prove results needed for the proof of the special case $n = 4$). The second part is a rather superficial response to Q_2 and Q_3, with hedged enormities such as “before the Revolution, one rarely heard of mathematicians who were trained in universities or schools as we know them today”.

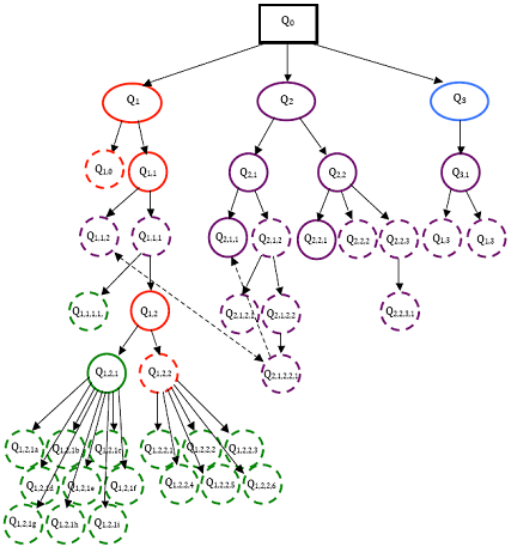


Figure 3. Analysis of the project “Fermat’s last theorem and Sophie Germain”

The only links between this type 2 part and the more substantial type 1 part is that Sophie Germain’s contribution is situated within the long list of special case proofs, and with respect to the general case. But the project has little substance from the point of view of history as a high school discipline. As such, it is typical of a number of projects in this combination in which the historical context is mainly a secondary background, if not a curiosity, at the side of a more substantial presentation of mathematics “from the past” (sometimes difficult to discern from a mono-disciplinary, mathematical presentation).

3. Discussion

According to Chevallard (2004), *in order for a S&R programme to be effective as a means to get the younger generations to tackle a number of questions of interest to them and to society, a generating question Q must not only be “crucial” (and therefore legitimate). It must also have sufficient “generative power” to engender many questions open to study* *and research.* The themes of the two projects we looked at could certainly fulfil both criteria for a significant number of students. Our analysis of the RSCs realised by students demonstrate both strengths and defects *relative to the constraints set by the institution.* We believe that this type of fine-grained analysis, and in particular the representations as in figures 2 and 3, can be useful at least for three purposes:

(1) as a concrete tool for teachers, to revise the problem formulations for later use, for instance by reducing the number of “sub-questions” (which sometimes lead to “parallel subprojects”);

(2) to identify and distinguish the variety of ways in which two very different disciplines appear and interact in a concrete student project, and to assess with precision the interdisciplinary requirements;

(3) to develop the idea of RSC in a school reality with disciplines and teachers who identify strongly with them, while struggling to adapt to the requirements of a new curriculum and in particular to collaborate with teachers who have a different disciplinary background.

The above points mostly focus on the viewpoint of the teacher. But it would seem presumptuous to require from students to realise RSCs which are only partially realisable by the teachers, and even unethical because of the high stakes for students that are linked to the assessment of their work. Therefore, at first, we have to provide *teachers* with tools to analyse, construct and complete RSCs.

References

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Nicosia: Cyprus University Press.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Communication at the *Journées de didactique comparée* 2004 (Lyon, 3-4 mai 2004). Online revised version at http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Hansen, B. (2009). *Didaktik på tværs af matematik og historie – en prakseologisk undersøgelse af de gymnasiale studeretningsprojekter* (Master's thesis). University of Copenhagen. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie10/

Thrane, T. (2009). *Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse* (Master's thesis). University of Copenhagen. http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie12/

El problema didáctico de la pérdida de sentido de los números reales en la enseñanza media

Rosa Mabel Licera, Marta Bastán
Dpto. Matemáticas, Univ. Nacional de Río Cuarto, Argentina

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universtat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma Barcelona, España

Abstract. This paper presents a summary of a master's thesis on didactics of mathematics focused on the study of the school mathematical activity around real numbers. We put forward a reference epistemological model, which is here used to analyse the institutional relationship to real numbers at secondary schools in Argentina, showing the disconnection between the introduction to real numbers and the measure of quantities.

Résumé. Cette communication présente la synthèse d'un travail de master en didactique des mathématiques, centré sur l'activité mathématique scolaire autour des nombres réels au secondaire. Nous proposons un modèle épistémologique de référence que nous utilisons ici pour analyser le rapport institutionnel aux nombres réels dans l'enseignement secondaire en Argentine, ce qui met en évidence la coupure entre l'introduction des nombres réels et la problématique de la mesure de grandeurs.

Resumen. Presentamos la síntesis de un trabajo de maestría en didáctica de la matemática centrado en el estudio de la actividad matemática escolar en torno a los números reales. Proponemos un modelo epistemológico de referencia que utilizamos para analizar la relación institucional a los números reales en la escuela media argentina, mostrando la desconexión entre la introducción de los números reales y la problemática de la medida de magnitudes.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 695-718)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

Diversas investigaciones en Educación Matemática ponen en evidencia la débil y confusa relación que establecen los alumnos de Secundaria con los números reales después de su tratamiento escolar: el estatus de número de los irracionales es cuestionado, no se reconocen *razones de ser* para $\mathbb{R}$ y no puede establecerse una clara relación entre este conjunto y los otros conjuntos numéricos.

Desde el marco teórico y metodológico que propone la *teoría antropológica de lo didáctico,* retomamos esta problemática asumiendo que, para abarcar toda su complejidad, es necesario ir más allá de los procesos de estudio escolar y sus resultados: deben investigarse las razones que originan y justifican la actividad matemática escolar. Esta perspectiva de investigación exige considerar como *unidad mínima de análisis* las reconstrucciones institucionales del saber matemático involucrado a lo largo de todas las etapas de su *transposición didáctica*. Requiere además la explicitación de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) como herramienta metodológica para tal análisis (Bosch & Gascón, 2005). En este trabajo presentamos el MER asumido en nuestra investigación y una síntesis del estudio de la *matemática sabia* y *la matemática a enseñar*, así como el aporte de tales estudios a un conocimiento más comprensivo del fenómeno abordado: la pérdida de sentido de los números reales en la escuela media.

1. Explicitación de un modelo epistemológico de referencia

Asumimos que es debido a la tarea de «cuantificar las magnitudes continuas» que, desde la ciencia, se avanzó hasta la construcción de los números reales y que es desde un modelo epistemológico que retome esta cuestión que pueden pensarse construcciones escolares significativas para los alumnos, donde los nuevos números se introduzcan como herramientas útiles para dar respuesta a cuestiones concretas.

Cuando una magnitud interviene en una actividad humana, se habla de «cantidades», referenciadas con números. El uso de unidades de medida convencionales y el hecho que a cada *cantidad de magnitud* le corresponde un *número*, forman parte de la cultura corriente. La cuestión que se plantea es la de determinar el conjunto de números que dan cuenta de la correspondencia entre cantidad de magnitud y medida, así como los alcances de dicha correspondencia en cuanto a las tareas efectivas de comparar cantidades o de determinar cantidades que se obtienen a partir de otras (al adjuntar, quitar, partir, etc.). En aplicaciones prácticas, la referencia numérica es siempre un número racional. Sin embargo el considerar la *modelización matemática* como dimensión esencial de la actividad matemática permite poner en evidencia que $\mathbb{Q}$ aporta una «respuesta incompleta» al problema planteado y pueden surgir *genuinas razones de ser* de $\mathbb{R}$ en tanto contribuyen a dar respuestas superadoras.

Partiremos de la consideración del sistema inicial extramatemático formado por el universo de las magnitudes continuas (velocidad, peso, longitud, capacidad, etc.). En él se plantean cuestiones problemáticas tales como: ¿Pesan lo mismo estos objetos? ¿Qué camino es más corto? ¿Si compramos los dos escritorios, entrarán uno al lado del otro contra el ventanal? Es decir, dada una magnitud m, consideramos un conjunto de objetos $\{O_i\}$ potencialmente susceptibles de ser comparados respecto de dicha magnitud, lo que plantea tareas problemáticas y requiere de técnicas para abordarlas. Pero rápidamente aparecen limitaciones en las técnicas, especialmente por restricciones ligadas a la manipulación de los objetos (por ejemplo, no podemos comparar longitudes de caminos y sería muy complejo llevar los escritorios bajo el ventanal para decidir su compra). La incompletitud de estas praxeologías justifica su modelización en busca de respuestas más completas.

Modelizamos este sistema inicial realidad considerando en primer lugar los tres sistemas propuestos por BAHUJAMA (2000) y Tomás Sierra (2006) que elaboran un modelo epistemológico como instrumento de análisis de una ingeniería didáctica relativa al *problema de la medida* en la educación primaria. Los tres sistemas están formados por un sistema inicial extramatemático y dos sistemas matemáticos sucesivos que modelizan el sistema inicial. En el segundo sistema los objetos son *cantidades de magnitud*, en el tercero los objetos son *los números reales*. Se consideran a su vez, asociadas a estos tres sistemas, tres praxeologías $S(m)$, $CS(m)$ y $CS(m)[\mathrm{u}]$, cada una de las cuales incluye la anterior, que representamos en el siguiente esquema:

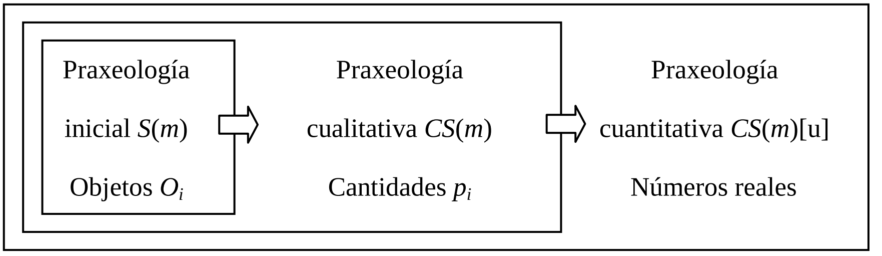


Figura 1. Sistemas involucrados en la medida de magnitudes continuas

En $CS(m)$ ya no se habla de los *objetos* O_i y de nuevos objetos construidos por adjunción de los O_i, sino de *cantidades de magnitud* p_i y de nuevas cantidades C que se pueden representar por sumas formales de los $CS(m) = \langle p_i \rangle = \sum_i n_i \cdot p_i$ (con $n_i \in \mathbb{N}$).

El adjuntar dos objetos en $S(m)$ se traduce en una tarea rutinaria en $CS(m)$: sumar dos sumas formales finitas. En cambio, la comparación de objetos en $S(m)$ se traduce en la siguiente cuestión problemática: *¿Cómo comparar dos cantidades de magnitud cualesquiera C y C′ en CS(m)? ¿Cómo decidir si son equivalentes y, si no lo son, cómo determinar el sentido de la asimetría?* Esta cuestión exige repensar la forma de representar las cantidades de manera de hacerlas «comparables». Una posible técnica inicial consiste en tomar un conjunto finito en principio arbitrario $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \{p_i\}$ de *cantidades de referencia* para escribir cualquier cantidad de $CS(m)$, es decir $CS(m) = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle_{\mathbb{N}}$ (llamamos a U «conjunto generador»).

En nuestro MER nos centramos en un *trabajo sobre esta técnica inicial de representación* para avanzar hacia técnicas que garanticen procedimientos de comparación y cálculo fiables, potentes y económicos. Partimos identificando tres limitaciones de la técnica inicial que plantean a su vez nuevas cuestiones, Q1, Q2 y Q3:

> Q1: Si las cantidades de U (con $u_1 > u_2 > \ldots > u_k$) son tomadas en forma arbitraria, no podemos garantizar la comparación de cualesquiera dos sumas formales. Por ejemplo es evidente que $2u_1 + u_2 < 3u_1 + u_2$, pero no se pueden comparar $2u_1 + u_2$ y $4u_3$ si no se pueden comparar los propios u_1, u_2 y u_3. Nos preguntamos, *¿cómo garantizar la comparación de cualesquiera dos elementos de* $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$*?*

Q2: El poder «generador» de los u_i es limitado, no necesariamente $\langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle_{\mathbb{N}}$ es igual al conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los p_i, es decir, la elección de un conjunto finito de generadores U con ($u_1 > u_2 > \ldots > u_k$) hace que muchas cantidades solo puedan representarse de manera aproximada (la cota de error es u_k) y esto por dos causas: (a) que C sea conmensurable con U pero no expresable con coeficientes naturales y (b) que C sea inconmensurable con U. El problema que se plantea entonces es: *¿cómo ampliar la capacidad generadora de los u_i?*

Q3: Observamos que pueden existir sumas formales distintas pero equivalentes. Sería bueno disponer de una escritura "canónica" para simplificar las técnicas de comparación. Por otro lado, mientras más elementos arbitrarios tenga U más compleja será la tarea de comparación. Nos planteamos: *¿cómo modificar la técnica de comparación para hacerla más económica y fiable?*

El proceso de estudio nos conduce a ir redefiniendo el conjunto de generadores. Una primera modificación consiste en definir $U = \{u/n\}_{n \in \mathbb{N}}$, siendo u una cantidad arbitraria de $\{p_i\}$. Con esta elección resolvemos no solo Q1 sino también Q2*a* y aportamos respuestas a la cuestión Q2*b*, ya que, si bien no logramos la representación exacta de las cantidades inconmensurables con U, podemos representarlas con el grado de precisión que deseemos. En cuanto a Q3, un conjunto generador de la forma $U = \{u/a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $u \in \{p_i\}$ y $a \in \mathbb{N}$ sigue teniendo las bondades del conjunto anterior pero hace más económico el proceso de comparación.

Otro aspecto que economizaría la comparación en $CS(m)$ es el establecimiento de una representación «canónica» de las cantidades. Proponemos una que modeliza la «menor cantidad de adjunciones» en el sistema inicial y se construye de la siguiente forma:

Paso 0. Se determina $a_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 u \leq C < (a_0 + 1)u$. Sea $C_0 = a_0 u$.

Si $C_0 = C$, el proceso termina; si no, $u_1 = u/a$.

Paso 1. Se determina $a_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 u_1 \leq C - C_0 < (a_1 + 1)u_1$. Sea $C_1 = a_0 u + a_1 u_1$. Si $C_1 = C$, el proceso termina; si no, $u_2 = u/a^2$.

En general, será $u_i = u/a^i$.

Paso *i*. Se determina a_i tal que se cumpla $a_i u_i \leq C - C_{i-1} < (a_i + 1)u_i$ con $C_i = a_0 u + \cdots + a_i u_i$. Si $C_i = C$, el proceso termina; de lo contrario, al disponer de un conjunto infinito de generadores, el proceso puede ser continuado potencialmente generando una «sucesión de cantidades aproximadas» a C: C_1, C_2, C_3,…, C_i…

En el paso m, si $C \neq C_m$, la representación de C mediante C_m se dirá aproximada. En este caso definimos $E_m = C - C_m$ como el *error de representación.* Al resultar E_m menor a u_m llamamos a u_m la *cota del error* cometido en la representación. La consideración de un conjunto infinito de generadores cuyas cantidades «tiendan a cero» da la posibilidad «teórica» de controlar la *cota del error*.

La siguiente modificación del conjunto generador U nos permite representar cada cantidad de $CS(m)$ con un número decimal. Si bien a puede ser cualquier natural, si $a = 10$ (base de nuestro sistema de numeración), dada la unidad de medida u, podemos identificar cada suma formal $\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{u}{10^i}$ con el número $\sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{10^i}$, que en escritura decimal se escribe como $a_0\, a_1\, a_2\, ...\, a_m$ ($a_i < 10$, $\forall i > 0$). Y entonces ya estamos en condiciones de abordar tareas inicialmente planteadas en $S(m)$ a partir de un trabajo simbólico en un sistema numérico.

Podemos pensar ahora en considerar un sistema numérico que permita representar cantidades en todos los contextos posibles, independientemente de las características particulares de cada magnitud. Tendría que tener la capacidad de modelizar procesos de medición que «no se detengan» mientras quede «un resto sin medir», aunque el proceso pueda contener infinitos pasos. Esta *abstracción* del proceso de medida efectivo permitiría ir construyendo una sucesión de aproximaciones (cada vez mejores) a la medida exacta y daría la posibilidad de determinar la *medida exacta*.

Fijada una unidad de medida u, consideramos un modelo numérico $CS(m)[u]$ que modeliza la medida exacta de cualquier cantidad de magnitud. A los elementos del sistema numérico los llamamos *números reales.* En este nuevo conjunto se establecerán operaciones y propiedades que modelizarán acciones y propiedades del sistema modelizado.

Representamos el conjunto de los *números reales* $\mathbb{R}$ con el conjunto de las expresiones decimales infinitas. Sea $x \in \mathbb{R}$ la medida exacta de una cantidad de magnitud. Se tiene:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = a_0\, a_1\, a_2 \ldots\, a_n \ldots\ (a_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_i \leq 9,\ \forall i > 0).$$

Para que resulte una construcción legítima, falta, en este proceso de modelización, una etapa esencial: volver al sistema inicial aportando respuestas concretas a las cuestiones que originan y dan sentido a todo el proceso. Por esto, retomamos el segundo interrogante planteado al caracterizar el problema de la medida: *¿Cuáles son los alcances de dicha correspondencia en cuanto a las tareas efectivas de comparar cantidades o de determinar cantidades que se obtienen a partir de otras?*

Atendiendo a la relatividad institucional de los saberes, el trabajo con expresiones decimales infinitas excede las posibilidades de su estudio en la escuela media. Sin embargo, es posible proponer en el modelo técnicas factibles de ser desarrolladas en esta institución.

El conjunto numérico que representa las medidas exactas sigue siendo $\mathbb{R}$, pero las cantidades de magnitud se identifican con una medida aproximada «más» un *error de representación*: $x = \bar{x} + e_x$, donde e_x es un objeto matemático que forma parte de la modelización. No se niega su existencia ni se considera un «objeto a eliminar» (como sucede al adoptar una postura ingenua en la representación de medidas mediante decimales). El modelo va a proveer no sólo una forma de representación de las cantidades mediante números, sino además un conjunto de técnicas para comparar y operar con ellas dando cuenta del error respecto de la medida exacta.

Esta forma de entender los números reales plantea nuevas cuestiones, como por ejemplo:

> *Cuando se realizan cálculos con medidas aproximados, ¿en qué medida influyen los errores en los datos sobre el error del resultado? ¿Se propaga de igual manera el error en cálculos matemáticamente equivalentes? (¿$e_{(x+y)z}$ es igual a e_{xz+yz}? ¿$e_{(1+a)(1+a)}$ es igual a e_{1+2a+a^2}?) En consecuencia, fijada una cota de error para el resultado de una operación, ¿Cuál es la cota de error que debe exigirse para los datos? Si comparamos solo aproximaciones a la medida exacta, ¿Cuándo consideraremos dos medidas «equivalentes»? ¿Cómo calculan las computadoras? ¿Son evitables los errores en la representación de medidas? ¿Cómo se determinan límites de precisión en la representación de medidas?*

No desarrollaremos más aquí esta breve presentación del MER. Pasaremos a utilizarlo para analizar la relación institucional a los números reales que existe actualmente en la escuela media argentina.

2. Relación institucional a los números reales: el saber sabio

En contraste con nuestro MER, investigamos la trama de organizaciones matemáticas, cuestiones y respuestas, que han ido conformando la noción de *número real* vigente hoy en el ámbito científico. Esta tarea tiene un doble objetivo. Por un lado, aportar elementos para explicar *fenómenos transpositivos,* por otro, contribuir a la justificación del propio MER.

En nuestro estudio epistemológico, identificamos dos grandes tipos cuestiones que se suceden en el tiempo. Una cuestión extramatemática: la comparación de cantidades *de magnitud continua* que lleva a la ampliación del campo numérico, y una cuestión intramatemática relativa al sistema construido: su validación científica. Como enlace entre ellas aparece otra cuestión: si no hay un sistema de representación que permita desarrollar técnicas de comparación y cálculo, no hay números.

2.1. La cuestión extramatemática: modelizar magnitudes continuas

La idea de *número natural* y de *razón entre números* como respuesta a la necesidad de comparar cantidades aparece muy temprano en la historia de la humanidad. Sin embargo, ya en el siglo V a.C. con el surgimiento de la noción de *inconmensurabilidad,* se evidencia la limitación del sistema de números construido para comparar magnitudes continuas. Desde la necesidad de responder a *cuestiones prácticas* se configura, a lo largo de varios siglos, una organización matemática que incorpora como números las razones de enteros y raíces, desarrollando técnicas de cálculo basadas en propiedades que «se heredan» de los sistemas modelizados, pero sin la presencia de un *logos* que organice y justifique la actividad.

2.2. La cuestión intermedia: los sistemas de representación

A partir del siglo XVI la matemática desarrolla fuertemente su carácter modelizador en múltiples ámbitos de estudio. La necesidad de ampliar las técnicas matemáticas obliga a tratar a los *irracionales* como «verdaderos números», sin embargo el estatus de estos objetos es dudoso debido a la inexistencia de una representación satisfactoria. Al respecto, el matemático alemán Michael Stifel (1487-1567) citado por Morris Kline (1994) señala:

> Dado que, al analizar figuras geométricas, cuando fallan los números racionales toman su lugar los irracionales y prueban exactamente las cosas que los números racionales no pudieron probar... nos vemos movidos y obligados a afirmar que son verdaderamente números; esto es, por los resultados que se siguen de su uso, resultados que percibimos como reales, ciertos y constantes. Por otra parte, otras consideraciones nos obligan a negar que los números irracionales sean números en absoluto. Esto es, cuando tratamos de someterlos a numeración… hallamos que se escapan continuamente, de forma que ninguno de ellos puede ser aprehendido precisamente en sí mismo... Y nada de tal naturaleza carente de precisión puede llamarse número. Por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una especie de nube de infinitud. (p. 337)

Se plantea así una nueva cuestión: mejorar las representaciones y las técnicas de cálculo. Simon Stevin (1548-1620), de profesión ingeniero, propone una noción de *número* derivada de la práctica generalizada de medir. La «existencia» de los números se garantiza desde la posibilidad de representarlos en forma exacta o aproximada y desde el desarrollo de algoritmos de cálculo y comparación, para esto propone una escritura muy cercana a la actual notación decimal. Pero el modelo propuesto se sustenta en un principio no expresado en términos matemáticos: la idea de continuidad.

2.3. La cuestión intramatemática: validación del saber

En los siglos XVII y XVIII los problemas que involucran magnitudes continuas se reducen a problemas de «cálculos»: de cambio relativo instantáneo; de tangentes a curvas; de máximos y mínimos de funciones; de longitudes, áreas y volúmenes. En el modelo matemático, que involucra la noción de *número real*, se desarrollan técnicas que se imponen por su utilidad, sin embargo aparecen errores tales como considerar convergentes a series que no lo son o encontrar diferentes valores para una serie según la organización de sus términos. Al mismo tiempo se masifica la enseñanza de la matemática, tarea que exige mayor rigurosidad en las justificaciones y mayor precisión en las nociones. Se plantea entonces la necesidad, al interior del modelo matemático, de establecer un *logos* que no recurra a consideraciones extramatemáticas como la idea de continuidad del tiempo, del espacio, de fenómenos que varían en el tiempo y el espacio.

En la búsqueda de respuestas a esta cuestión distinguimos dos etapas. En la primera se proponen caracterizaciones de los números reales en términos estrictamente aritméticos[1] aplicando lo que David Hilbert designó como *el método genético.* En estas construcciones los números reales se identifican con clases de equivalencia cuyos infinitos elementos son a su vez una colección infinita de números racionales. Aunque lógicamente diferentes, todas resultan isomorfas, lo que lleva a la segunda etapa en el proceso de validación, la caracterización axiomática de $\mathbb{R}$ como un *cuerpo ordenado completo*. Esta «transformación» del saber matemático *número real* tiene que ver con las ventajas encontradas al *método axiomático* tales como su rigurosidad lógica, o el permitir comparar teorías, cualidades muy valoradas a fines del siglo XIX por los matemáticos.

En la actualidad coexisten diferentes caracterizaciones de $\mathbb{R}$ de indiscutible vigencia científica, las logradas en la etapa de validación. Pero ninguna de ellas propone *razones de ser* de $\mathbb{R}$ para la escuela media donde se exige, más allá de una descripción de los saberes, que estos aparezcan como respuesta a un problema significativo para los alumnos.

Por otra parte, el evidenciar el rol central del *problema de la medida* en la génesis de la noción de número real consolida nuestra posición epistemológica que toma a este problema como la cuestión que justifica la ampliación del campo numérico en la escuela. Además, en estrecha vinculación con la posición asumida por Stevin, pensamos en una sistema de números caracterizado por las expresiones decimales infinitas donde es posible abordar las tareas de comparar y operar con estas expresiones «que no terminan» a partir del tratamiento riguroso de las medidas aproximadas, abriendo el camino a nuevas cuestiones de estudio.

1. A fines del siglo XIX, Richard Dedekind, Georg Cantor y Karl Weierstrass dan a conocer, casi simultáneamente, tres propuestas en este sentido.

3. Relación institucional a los números reales: el saber a enseñar

Realizamos un análisis exhaustivo de la propuesta curricular vigente en el sistema de enseñanza en Argentina tomando como material empírico los documentos curriculares oficiales y libros de texto de actual circulación. A su vez, basándonos en una investigación de Alain Bronner (1997) sobre elecciones transpositivas a lo largo del tiempo, ponemos en evidencia cambios importantes en el complejo proceso de transposición didáctica de los números reales. Este estudio nos permite entender «de donde viene» la propuesta curricular actual y nos habilita a pensar que podría ser diferente.

3.1. Decisiones transpositivas a través del tiempo

A. Bronner identifica en el sistema de enseñanza secundaria francesa, tres proyectos transpositivos que derivan en tres organizaciones matemáticas (OM_1, OM_2 y OM_3) con características esencialmente diferentes, ya en todas se observa la influencia decisiva de la *matemática sabia* «del momento». En el primer proyecto los números reales aparecen para dar respuesta a una cuestión extramatemática, el problema de *la medida de magnitudes continua*s. La organización matemática construida (OM_1) tiene un sólido bloque práctico respaldado por consideraciones tecno-lógicas, aunque en el bloque teórico no se llega a la construcción de un sistema de números como modelo general de las medidas. Esta presentación refleja la posición de la *matemática sabia* alrededor del año 1850, donde se tiene muy presente para qué se quieren los nuevos números pero aún se está trabajando para construir una teoría satis-factoria.

En el segundo proyecto en cambio, las cuestiones que dan origen a la ampliación del campo numérico surgen al interior de un sistema intramatemático. Los nuevos números no dan cuenta de su uso más allá de dicho sistema, el problema de la medida se ha abandonado. También acá se evidencia la influencia de la *matemática sabia* en donde la caracterización de los conjuntos numéricos en término de propiedades aparece como la más pertinente. Pero hay un cuidado especial en buscar cuestiones a las que el nuevo sistema aporte respuestas.

En el tercer proyecto la presencia de estos números en el secundario se sustenta en su importancia científica, $\mathbb{R}$ es el conjunto del cual se parte para estudiar *Análisis* por lo tanto debe ser "aprendido" previamente. A sabiendas de la poca significatividad para el alumno de estos argumentos, se propone una introducción superficial, naturalizada, donde cualquier problemática que inicie su estudio es meramente circunstancial: lo importante es «mostrarlos». La OM construida terminará siendo una colección de elementos tecnológicos y teóricos aislados que intentan cumplir con un compromiso cultural.

Vemos en este proceso un claro ejemplo donde la dialéctica entre cuestiones y respuestas (incluso cuestiones matemáticas) ha desaparecido del estudio escolar de los saberes, poniendo en evidencia lo que Yves Chevallard (2004) llama una epistemología escolar *monumentalista.*

La propuesta de reconstrucción escolar de $\mathbb{R}$ ha ido evolucionando a la par del desarrollo científico, ignorando las particularidades propias de la institución escolar. Nuestro MER, por el contrario, pretende plantear una reconstrucción de $\mathbb{R}$ que cobre sentido para los alumnos. Si bien tomamos aspectos positivos de OM_1 y OM_2; creemos que es superador en otros. Con OM_1 comparte la consideración del problema de la medida y el desarrollo de técnicas de cálculo que incluyen la consideración de errores de representación, pero es superador en tanto no plantea la dicotomía conmensurable-inconmensurable sino que —desde la abstracción de los procesos de medición efectiva— permite construir un sistema de números que modeliza todas las cantidades de magnitud. Por otro lado comparte con OM_2 la elección del sistema decimal para representar los números, pero se distingue de él en tanto que exige desarrollar técnicas efectivas de cálculo que «tomen en cuenta» las limitaciones de tal representación. Hay otra diferencia sustancial entre OM_2 y nuestro MER en cuanto a la presentación de las propiedades que caracterizan a $\mathbb{R}$: mientras que en OM_2 aparecen en forma de «axiomas», en el MER son el reflejo de propiedades presentes en el sistema modelizado.

3.2. El currículum prescripto

Puntualizamos algunas observaciones del análisis de los documentos curriculares vigentes en Argentina:

Constatamos en primer lugar que no se proponen razones de ser para $\mathbb{R}$. Se mencionan dos ámbitos donde buscar los *para qué* de los distintos conjuntos numéricos, uno extramatemático («la vida cotidiana») donde se ejemplifican razones de ser para $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, pero nada se dice de $\mathbb{R}$; otro intramatemático para el que se dice: «A estas razones de índole pragmática, la escuela ha de aportarle al alumno las de índole matemática, presentando los distintos números como raíces de diferentes tipos de ecuaciones». Observamos que esta perspectiva conduce a una introducción totalmente forzada de la condición de completitud de $\mathbb{R}$ ya que no existen clases de ecuaciones con coeficientes en **Q** que «generen» todo $\mathbb{R}$. Más adelante se expresa:

> Para que el alumno tome conciencia de la existencia de los números irracionales se podrá partir de la periodicidad de la expresión decimal de los números racionales, así como del cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado, por ejemplo de lado 1, aplicando el Teorema de Pitágoras; de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, del cálculo del número áureo trabajando con rectángulos o de algún ejemplo de la teoría de probabilidades.

Más allá de posibles razones de ser se asume que los irracionales «existen» y hay que «mostrarlos». Respecto a las posibilidades planteadas, consideramos que la introducción de $\mathbb{R}$ en un marco estrictamente sintáctico, sin el planteo de cuestiones que involucren los nuevos objetos ni un trabajo sistemático con ellos, resulta una propuesta muy débil. También resulta débil la propuesta de actividades aisladas que «muestran» los típicos ejemplos escolares de irracionales.

La segunda característica a destacar es que no se plantea cómo establecer relaciones entre los números reales y las medidas. Si bien se afirma que el bloque números se apoyará en el de mediciones, en este último se alude exclusivamente a procesos de medición efectiva y al uso de fórmulas para «ahorrar tiempo y esfuerzo». En este contexto no es posible concebir a $\mathbb{R}$.

También se trivializa la identificación de los reales con los puntos de la *recta*. Se dice que: «Un buen trabajo sobre la recta confirmará la intuición de que para cada punto de ella existe un número real y viceversa, recalcándose las propiedades de completitud…». En Sara

Scaglia y Moisés Coriat (2000) se establece como una de las representaciones más complejas de $\mathbb{R}$ y se evidencia su insuficiencia para captar en forma intuitiva las propiedades de este conjunto numérico.

Finalmente, se proponen tareas puntuales, encerradas en sí mismas (como por ejemplo representar en la recta, aproximar valores, calcular errores, distinguir clases de números por sus propiedades) están lejos de contribuir a construir un sistema de números con técnicas generales de representación, comparación y cálculo que aporten respuestas a alguna cuestión.

En síntesis, en los textos curriculares no hay una respuesta contundente al por qué y para qué enseñar los números reales en la escuela secundaria. Se pone el énfasis en cumplir con los requerimientos de rigor y formalización científicos, pero el intentar satisfacer las condiciones de supervivencia en la institución escolar deriva en una propuesta de copia empobrecida de algunos componentes teóricos de la organización matemática sabia, apareciendo expresiones contradictorias como la siguiente: «Bastará una aproximación intuitiva que dé cuenta de las propiedades de orden, discretud, densidad y/o completitud de cada conjunto». No se toma en consideración que es muy difícil distinguir $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ en términos de «densidad» y «completitud» si no hay un porqué para construir nuevas intuiciones.

4. Los números reales en los libros de texto

A partir del MER propuesto, consideramos que el estudio escolar de los *números reales* debe abarcar necesariamente una articulación profunda entre los bloques temáticos *Números* y *Medidas*. Es por esto que analizamos exhaustivamente las unidades correspondientes a estos bloques en libros de texto correspondientes al 7.º, 8.º, 9.º y 10.º año de escolaridad (eligiendo una editorial con amplia difusión a nivel nacional). En dicho análisis caracterizamos las OM en términos de *tipos de tareas* que se plantean, *técnicas* que se desarrollan y *elementos tecnológico-teóricos* que se explicitan, teniendo en cuenta el peso otorgado a cada uno de estos elementos y las relaciones que se establecen al interior de cada organización y entre organizaciones. A continuación, presentamos algunas observaciones de dicho estudio.

4.1. El lugar dado a las nociones de aproximación y error en el trabajo con números

En el texto para el séptimo año se ejemplifica y aplica la *técnica de redondeo*, apareciendo como *razón de ser* la simplificación en los cálculos; sin embargo en las tareas propuestas el cálculo exacto se puede realizar sin dificultad. En los textos para octavo y noveno año, en un ámbito estrictamente numérico, se agregan y ejemplifican la *técnica para truncar* y las definiciones de *error absoluto* y *error relativo*, estas nociones aparecen estrechamente vinculadas a números con muy pocas cifras decimales ya que las tareas que se plantean son calcular los dos tipos de errores y comparar errores producidos por redondeos y truncamiento. Finalmente en el texto para el décimo año de estudio se define la noción de *cota del error* y se comparan cotas de error al redondear o truncar números. Las nociones presentadas, salvo el «redondeo», no se vuelven a retomar a lo largo de ninguno de los textos. En síntesis, vemos la presencia de elementos praxeológicos totalmente aislados y técnicas rígidas que no participan en la búsqueda de soluciones a ninguna cuestión problemática.

Observamos que aún en un ámbito estrictamente numérico, si se abordara, por ejemplo, el análisis de las limitaciones de la *radicación* en el sentido que, con los medios disponibles (la calculadora, el tanteo), no siempre se pueden calcular las raíces exactas, aparecería una buena *razón de ser* de valores aproximados y de técnicas para aproximar, al mismo tiempo cobraría sentido la noción *error absoluto* ligada a la de *cota de error,* pero esta es una posibilidad que no se considera.

4.2. El lugar dado a las nociones de aproximación y error en el trabajo con medidas

En este ámbito aparecen dos tipos de irracionales, raíces y el número π. Observamos a lo largo de los cuatro años analizados una total naturalización y arbitrariedad respecto a la identificación de estos irracionales con aproximaciones decimales. Al analizar los resultados dados en la sección *soluciones* observamos redondeos a los enteros, décimos, centésimos, a veces indicando que se trata de una aproximación y otras veces no sin justificación de este cambio de criterios. En algunos casos inclusive aparecen resultados «racionales» que aportan una ilusión de exactitud que no existe. Para poner en evidencia la falta de coherencia en el trabajo con medidas aproximadas comentamos el siguiente ejemplo: Para calcular el volumen del cono truncado (noveno año) se muestra un ejemplo cuyo resultado es un redondeo a los décimos obtenido con una aproximación de π con más de dos cifras decimales. A continuación se pide calcular el volumen de conos truncados apareciendo en la sección *soluciones* resultados «racionales» que se obtienen al tomar como valor aproximado de π a 3,14 y al conservar todas las cifras de los resultados parciales y final (por ejemplo, «621,458333… cm^3») sin aclarar que son medidas aproximadas (en este caso ni por redondeo ni por truncamiento), sin considerar la propagación de errores en los cálculos (la medida exacta ya difiere en el orden de los enteros) y sin considerar en el contexto en el que se da la tarea cuál sería la precisión pertinente.

En cálculos que involucran raíces, estas se identifican con una aproximación (redondeo a los décimos o centésimos). En cuanto al número π, en 7.º «es» 3,14. Se escribe por ejemplo:

longitud de la circunferencia = 3,14 · diámetro

longitud de la circunferencia = π · diámetro

Los resultados que aparecen en la sección *soluciones* usan esta aproximación sin aclarar que son medidas aproximadas. Para el octavo año hay un cambio de contrato: π es el decimal con todas las cifras que muestra la calculadora, decisión absolutamente «transparente» que incluso en muchos cálculos carece de sentido, ya que estos incluyen a su vez aproximaciones de raíces a los décimos o centésimos. En noveno y décimo año no hay un criterio unificado.

En síntesis en el trabajo con medidas es manifiesta la reducción a un único aspecto: la aplicación de fórmulas de cálculo. Están totalmente ausentes el problema de la elección de aproximaciones pertinentes, la necesidad de trabajar con medidas aproximadas y el problema de la propagación de los errores en los cálculos. Los textos propician una organización didáctica en la que serán aceptados como resultados correctos valores aproximados que no «difieran demasiado» entre sí, ya que lo importante es determinar la fórmula correcta.

Vemos acá la respuesta incompleta que se da al *problema de la medida* desde $\mathbb{Q}$, vemos también que la naturalización de esta forma de trabajo hace que no cobre sentido la ampliación del campo numérico para dar respuesta al problema de «medir».

4.3. La ampliación del campo numérico

En los textos de séptimo y octavo año se van incorporando las fracciones (y su escritura decimal) para modelizar diferentes situaciones (fundamentalmente como operadores, como partes de la unidad y como partes de un todo), no diciendo «qué son» sino usándolas, es decir, viendo «para qué sirven». Finalmente en el noveno año, los números racionales se definen en un contexto estrictamente numérico como *cocientes de enteros*. Se amplían las posibilidades de uso (porcentaje, frecuencia relativa) y se revisan y generalizan técnicas de representación, comparación y cálculo al interior del modelo. Se está en presencia de una *organización matemática local* que, más allá de su grado de completitud o su falta de transparencia en diferentes aspectos (que no analizamos acá) plantea *razones de ser* para los nuevos números y consolida su estatus como tales ya que se identifican con escrituras «precisas», se pueden comparar, con ellos se opera y también aparecen como resultados de operaciones.

En cambio, la presentación de los *irracionales* y los *reales* en el noveno año plantea una ruptura significativa respecto al trabajo matemático que se venía proponiendo en el interior de los sistemas numéricos. Destacamos algunos hechos que ponen de manifiesto esta ruptura.

En primer lugar, los irracionales se presentan identificados con una escritura (con infinitos símbolos de los cuales se conocen unos pocos) sin la presencia, siquiera narrada, de posibles *razones de ser*. Se dice: «Los números irracionales son todos aquellos que no se pueden escribir como fracción. Tienen infinitas cifras decimales no periódicas». La inexistencia de *razones de ser* de los números irracionales se hace manifiesta en la actividad titulada *Conexión*[2] en la que se muestra un aforismo de once palabras que permite «recordar» los primeros once dígitos del número π y

2. Según la aclaración dada al inicio del libro, bajo este título se presentan conexiones con otras disciplinas o con la vida diaria que le dan significado a lo que se estudia.

se pide armar oraciones para recordar los primeros dígitos de otros irracionales.

En segundo lugar, se presenta un cambio de estatus de algunas expresiones en forma totalmente «transparente». En las tareas habituales las raíces «no racionales» solo han aparecido en el cálculo de medidas y el resultado siempre ha sido una aproximación del valor que devuelve la calculadora. En cuanto a π siempre se ha identificado (también en el cálculo de medidas) con un decimal. Ahora se corresponden con expresiones con puntos suspensivos: «Por ejemplo, son irracionales $\pi = 3{,}1415926\ldots$; $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$; $\sqrt{13} = 3{,}6055512\ldots$».

En tercer lugar, se imponen como números escrituras cuyas infinitas cifras decimales «siguen una regla no periódica» (Por ejemplo, 0,1101001000100001…). Estas expresiones no se retoman más a lo largo del texto. No se propone ninguna actividad matemática, vinculada a estos nuevos objetos, que les confiera estatus de número; con ellos no se opera, no provienen de operaciones, no se plantean situaciones donde estas expresiones aparezcan en relación con «alguna cosa».

Además, al abordarse la operación radicación por primera vez, aparecen raíces irracionales, pero se soslaya su «irracionalidad». En el trabajo en $\mathbb{Q}$ ha habido un total cuidado en elegir «cuentas» que arrojen siempre números racionales, si bien se ha aclarado que «si el índice es par y el radicando negativo no existe la raíz», respecto a las raíces con radicando positivo se asume implícitamente la existencia de un racional como resultado. Ahora, en cálculos en los que las raíces involucradas son racionales se pide «resolvé sin usar la calculadora» y en aquellos que involucran raíces irracionales se indica «resolvé usando la calculadora y expresá el resultado redondeado a los centésimos». Hasta ahora, en el interior de los sistemas numéricos, los cálculos se realizaban sin calculadora, ¿por qué se habilita su uso? ¿Se puede usar calculadora en todas las cuentas? ¿Es necesario su uso en algunas cuentas? ¿Cuáles son las ventajas y limitaciones de cada forma de calcular? ¿Por qué se redondea y por qué a los centésimos? Estas son cuestiones que no se abordan.

Destaquemos también que aparece de manera totalmente naturalizada una «nueva forma» de dar resultados. En el trabajo con funciones trigonométricas el sistema numérico al que se acude para dar medidas de segmentos, ángulos y funciones trigonométricas es $\mathbb{Q}$ (los resultados son los valores que devuelve la calculadora), pero en los últimos tres ejercicios del capítulo aparece «transparente» una diferencia; en la sección *soluciones* la técnica mostrada deja de lado la calculadora y llega a resultados expresados como cocientes indicados (por ejemplo, en uno donde se pide calcular todas las *razones trigonométricas* de 45º). ¿Por qué este cambio de técnica? ¿Por qué aquí se dejan «operaciones indicadas» y en el resto de las actividades *sen*, *cos* y *tg* se asocian a números decimales? Son cuestiones que no se plantean.

Respecto a la expresión *número real* aparece por primera vez en el noveno año. No se da una definición de la misma, sin embargo aparece en forma totalmente naturalizada a lo largo del texto, por ejemplo:

- En la sección *Soluciones* como respuesta a una actividad que pide calcular raíces, para $\sqrt{-25}$ y $\sqrt{-0,\widehat{1}}$ la respuesta es «No es un número real». Esta es la primera vez que aparece la expresión «número real».
- En el trabajo con inecuaciones aparecen «intervalos reales» como conjuntos de soluciones. El párrafo donde se definen comienza diciendo: «Indico todos los números reales entre *a* y *b*…». Es la segunda vez que la expresión «números reales» aparece sin haber sido definida.
- $\mathbb{R}$ aparece en afirmaciones tecnológicas en organizaciones matemáticas que involucran la noción de función, por ejemplo: «Si el dominio es $\mathbb{R}$ puedo unir los puntos con un trazo continuo», «La fórmula de una función lineal es $y = ax + b$. Si el dominio es $\mathbb{R}$, el gráfico es una recta».

Por último, al analizar los capítulos específicos del bloque *medidas*, observamos que la introducción de los nuevos números no aporta nada al trabajo matemático, se sigue considerando como sistema numérico de referencia a $\mathbb{Q}$, al estilo de los años anteriores.

4.4. Un segundo primer encuentro con $\mathbb{R}$

En el libro de texto para el décimo año los dos primeros capítulos tienen por título: «*Números reales y complejos*» y «*Números irracionales.*

Radicales». Salvo en ellos, $\mathbb{R}$ no vuelve a aparecer, salvo para realizar afirmaciones tecnológicas en el trabajo con funciones.

Los números reales se presentan a partir de la siguiente secuencia. Se da la demostración por el absurdo de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ como elemento tecnológico que garantiza la existencia de «más» números que los racionales. Se define el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como la unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbf{I}$. Finalmente se establece axiomáticamente la propiedad distintiva de $\mathbb{R}$ a partir de su identificación con el modelo de la recta: «*los reales completan la recta numérica*». Vemos en esta presentación afirmaciones poco significativas para los alumnos. En particular, la presentación una *prueba de existencia* mediante un razonamiento *por el absurdo* es un tipo de tarea complejo totalmente ajeno al trabajo matemático habitual.

Las únicas tareas que involucran números irracionales son: proponer números irracionales, representar en la recta numérica raíces cuadradas, clasificar números en racionales o irracionales y operar con radicales. No se dice nada respecto a técnicas generales para comparar y operar y prácticamente no aparecen elementos tecnológico-teóricos. Las consecuencias de esta estrategia se pueden resumir en los puntos siguientes:

– La única razón de ser que se esgrime para $\mathbb{R}$ es falsa. Al presentar los números complejos, se hace referencia a las razones de ser de los distintos conjuntos numéricos en un entorno algebraico, en lo referente a $\mathbb{R}$ se explicita «… también hay ecuaciones como $x^2 - 3 = 0$ que no tienen solución en $\mathbb{Q}$, ya que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 3; por eso se creó el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que incluye números tales como $\sqrt{3}$, que son irracionales». Si bien es un planteo bastante abstracto, resulta matemáticamente correcto en la pretensión de «generar» $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$, o $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$. Pero resulta insuficiente para generar todo $\mathbb{R}$.

– Se obliga a abandonar técnicas para operar que tenían validez institucional (la calculadora y la escritura de los resultados «redondeados») y se impone el cálculo con radicales. Al no proponerse ámbitos de aplicación, este cálculo es una tarea que se cierra en sí misma, en un marco estrictamente formal cuyos resultados en realidad «no son resultados» sino expresiones equivalentes que involucran operaciones (por ejemplo, $\sqrt{3}$ + 4). Si se abordara la problemática de la propagación en los cálculos de errores de representación cobraría sentido un sistema donde se operara «con las medidas exactas» y solo se aproximara el resultado final, pero como ya dijimos, esta cuestión no se plantea.

– No hay cuestiones problemática vinculadas con «el medir» a las cuales esta organización aporte respuestas efectivas. Si bien se presentan tareas donde se pide calcular medidas, estas son una excusa para «operar» con radicales. Por ejemplo: «calcular el área de un rectángulo de lados 1 + $\sqrt{7}$ y $\sqrt{3}$».

Vemos que la propuesta de los textos guarda total coherencia con las indicaciones curriculares generando fuertes restricciones transpositivas.

5. A modo de conclusión

A partir del estudio realizado podemos afirmar que la matemática a enseñar respecto al tema de los números reales se presenta como un conjunto de elementos praxeológicos desarticulados. Dicha desarticulación se manifiesta en diferentes niveles. En el interior de las organizaciones matemáticas solo aparecen tareas aisladas, técnicas rígidas de corto alcance y elementos tecnológico-teóricos presentados para cumplir con un compromiso formal con la matemática sabia. A su vez, se evidencia la total desarticulación «horizontal» entre las organizaciones matemáticas correspondientes a los bloques de estudio números y medidas, apareciendo claras diferencias en las técnicas de cálculo propuestas en uno y en otro. Finalmente, al interior de ambos bloques se presenta una desarticulación «vertical» entre las propuestas presentes en distintos años de escolaridad.

También ponemos al descubierto la ausencia de *razones de ser* para la ampliación del campo numérico. Esta ausencia tiene que ver con el «olvido» de la *actividad modelizadora* como actividad matemática esencial, que da sentido a los sistemas matemáticos en tanto aportan respuestas a problemas planteados en los sistemas modelizados. Los elementos praxeológicos presentados no responden a ninguna cuestión que exija ampliar el conjunto de los números racionales al no integrarse en ninguna tarea de modelización.

Haciendo referencia a los *niveles de codeterminación didáctica*, podemos decir que esta realidad evidencia un fenómeno de desarticulación escolar que se origina a nivel de la disciplina matemática —con el poco énfasis puesto en el *problema de la medida* y la relegación a lo numérico como «fundamento» del edificio matemático por construir— y se pone de manifiesto en el nivel de las *áreas y sectores*, es decir, de los *bloques temáticos* del diseño curricular. Este diseño conforma una realidad absolutamente «naturalizada» imponiendo restricciones a la tarea que el profesor, abrumado por la tarea cotidiana de tomar decisiones a nivel tema y cuestión, no alcanza a percibir.

Nuestra propuesta de MER sitúa, por el contrario, la problemática de la medida y el trabajo con medidas aproximadas —con la consideración del error como objeto matemático a tratar— en el corazón mismo del trabajo con números, generando así tanto una razón de ser para *R* como una OM relativamente completa y articulada en torno al cálculo con medidas. En este sentido, creemos que el MER presentado debería permitir sustentar el diseño y experimentación de posibles itinerarios didácticos alternativos a lo instituido para la reconstrucción de *R* en la escuela media.

Desde el marco teórico y metodológico propuesto por la TAD hemos logrado una mirada más comprensiva del problema didáctico abordado en el sentido que trasciende el detectar los «errores» de los alumnos o las «deficiencias» de los profesores, permitiendo indagar sobre restricciones transpositivas y necesidades del sistema educativo en su conjunto, lo que contribuye al abordaje del problema de formación del profesorado tal como lo plantean Marianna Bosch y Josep Gascón (2007) al considerar que dicha formación debe estar estructurada en torno al estudio de cuestiones problemáticas que el profesor enfrentará al incorporarse a la profesión docente. Se plantea así como problema de investigación didáctica qué lugar debe ocupar en la formación de profesores el problema de la enseñanza de $\mathbb{R}$ en la escuela media. Este es el trabajo pendiente que estamos iniciando.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Andrés, M. & Elizondo, M. (2002). *Matemática 7 EGB*. Buenos Aires: Santillana.

BAHUJAMA (2000). Análisis didáctico del artículo «El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM» en el marco de la teoría antropológica. *XIV Jornadas del SI-IDM, Cangas do Morrazo*. http://www.ugr.es/~jgodino/si-idm

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La miseria del generalismo pedagógico ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 201-240). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée* (Tesis doctoral no publicada). Université Joseph Fourier. Grenoble, Francia.

Coriat, M. & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(1), 25-34.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée (Lyon, 3-4 mai 2004)*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Kaczor, P. & Machiunas, M. (2002). *Matemática 8 EGB*. Buenos Aires: Santillana.

Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. & Díaz, B. (2004). *Matemática I. Polimodal*. Buenos Aires: Santillana.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (3 volúmenes). Madrid: Alianza Editorial.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina (1995). *Contenidos básicos comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires: Consejo Federal de Cultura y Educación.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Argentina (1997). *Contenidos básicos para la Educación Polimodal*. Buenos Aires: Consejo Federal de Cultura y Educación.

Piñeiro, G. & Serrano, G. (2003). *Matemática 9 EGB.* Buenos Aires: Santillana.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Complutense de Madrid.
http://www.ucm.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t%2029075.pdf

Praxeologías didácticas en la universidad y el fenómeno del «encierro»: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones

Verónica Ester Parra y María Rita Otero
Dpto. Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA, Argentina

Abstract. In this work we describe the didactic praxeologies in a first year mathematic course at university. It is a descriptive case study that uses the framework of the anthropological theory of the didactic. The didactic phenomenon that we have called "confinement in evaluable questions" is characterized and identified. This "confinement" seems to be deepened by the devices used in the course for "solving" the problems concerning the limit and continuity of functions identified at university.

Résumé. Dans ce travail, nous analysons les praxéologies didactiques mises en œuvre lors d'un cours de mathématiques en première année d'université. Pour cette étude de cas, nous utilisons comme cadre théorique la théorie anthropologique du didactique et il s'agit d'identifier et de caractériser le phénomène didactique que nous avons appelé l'« enfermement dans les questions évaluables ». Cet « enfermement » semble aggravé par les dispositifs mis en œuvre pendant le cours pour « résoudre » les problèmes relatifs aux liens entre limites et continuité de fonctions identifiés à l'université.

Resumen. En este trabajo se describe la praxeología didáctica disponible en la universidad, en un curso de matemática del primer año de este nivel. Es un estudio de caso descriptivo que utiliza como referencial teórico la teoría antropológica de lo didáctico. Se identifica y se caracteriza el fenómeno didáctico que hemos denominado «encierro en las cuestiones evaluables». Este «encierro» parecería profundizarse por los dispositivos implementados en el curso para «resolver» los problemas que se identifican en la universidad con relación al límite y la continuidad de funciones.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 719-741)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. El fenómeno del autismo temático del profesor, autismo temático de la institución y autismo disciplinar

Proceso de estudio, organización matemática (OM) y organización didáctica (OD) son tres aspectos inseparables del trabajo matemático. El proceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción matemática. El resultado de esa construcción es una OM y, finalmente, la manera en que esa organización se construye, una OD. En efecto y tal como lo sostienen Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997), *los hechos didácticos y los hechos matemáticos son inseparables.*

Chevallard (2001) describe esta interrelación entre las OM y las OD como un «isomorfismo didáctico-matemático» y propone una jerarquía de niveles de codeterminación entre las OM y las correspondientes OD, esto es, entre las formas de estructurar las cuestiones matemáticas a estudiar y la manera de organizar el estudio de las distintas cuestiones. Esta jerarquía se puede esquematizar como se ve en la figura 1.

Civilización
$\Updownarrow$
Sociedad
$\Updownarrow$
Escuela
$\Updownarrow$
Pedagogía
$\Updownarrow$
Disciplina
$\Updownarrow$
Área
$\Updownarrow$
Sector
$\Updownarrow$
Tema
$\Updownarrow$
Cuestión

Figura 1. Escala de los niveles de codeterminación didáctica

En este esquema cada nivel corresponde a un nivel de estructuración de la OM. La jerarquía de entidades debe ser interpretada así: para estudiar conocimientos sobre cierta cuestión, la que figura en el último eslabón, hay que recorrer un camino que empieza en la civilización, continúa por la sociedad, luego por la escuela, continúa por el nivel de pedagogías, sigue por cierta área dentro de una disciplina en la que se estudia la cuestión, por cierto sector dentro del área y por cierto tema del sector. En cada una de estas etapas se imponen restricciones y condiciones que acaban definiendo lo que es posible hacer para estudiar la cuestión considerada, es decir para crear y construir una praxeología que sea la respuesta esperada a la cuestión: una OM si se trata de una cuestión de matemáticas (Chevallard, 2001). Como indica Y. Chevallard (2001), se observa de manera general un abandono, por parte del profesor, de los niveles superiores de la OD, desde el de la sociedad y la escuela hasta el nivel de los sectores, lo que provoca un retraimiento de su acción sobre el nivel de los temas generando el fenómeno del «autismo temático del profesor».

J. Gascón (2003), en cambio, propone hablar de «autismo temático de la institución» o «autismo institucional» pues antes de que el profesor se encierre en los temas, puede observarse cómo el currículo oficial que proponen las sucesivas reformas, los documentos de las administraciones educativas, y los libros de texto aprobados por estas, consideran implícitamente que, más allá del nivel de la organización de los temas, todo es transparente e incuestionable.

En la universidad, el autismo institucional se manifiesta en que la enseñanza universitaria es considerada, tanto por los integrantes de la institución como por la sociedad, como «la» adecuada, entendida como transparente e incuestionable. Así, es frecuente que se aluda al nivel del secundario [1] como inadecuado, porque los estudiantes no se adaptan a las exigencias y requisitos de la Universidad, y en consecuencia, no consiguen permanecer en ella.[2] También se asume explícita o implícitamente que la escuela secundaria debería tener como principal objetivo preparar a los estudiantes para realizar estudios universitarios, como si este nivel fuese la única razón de ser del nivel anterior.

El autismo temático y el autismo institucional no son los únicos tipos de autismo que existen en los niveles de codeterminación entre las OM y las OD. Otro tipo de autismo es el «autismo disciplinar». Según Chevallard (2001) cada disciplina puede ser más o menos abierta para el estudio de cuestiones que no le pertenecen propiamente. Pero parece que, a largo plazo, cada una de ellas define sus cuestiones emblemáticas, excluyendo el estudio de las demás e incluso prohibiendo a las otras disciplinas interesarse por las cuestiones que, en cierta forma, monopoliza. Es muy común, por ejemplo, considerar que la matemática existe por sí misma y para sí misma. Este es un ejemplo de autismo disciplinar, en este caso, de la matemática.

El fenómeno del autismo temático del profesor, del autismo institucional y del autismo disciplinar, deben ser considerados, por tanto, como

1. En la sección 3 se describe la estructura del sistema educativo argentino.

2. El ingreso a las universidades públicas en Argentina es irrestricto; esto coexiste con una tasa de deserción muy elevada en los dos primeros años del sistema universitario.

fenómenos que condicionan el conjunto de las cuestiones matemáticas que pueden ser estudiadas en la escuela y, sobre todo, las posibles formas de estudiar dichas cuestiones (Gascón, 2003, pp. 31-33).

Adoptando las ideas de Y. Chevallard (2001) y de J. Gascón (2003), se describe en este trabajo un fenómeno que provoca el retraimiento de la acción del profesor universitario al nivel de las cuestiones que él sabe que serán evaluadas. Este fenómeno, que hemos denominado *encierro en las cuestiones evaluables*, sería una reacción o respuesta al tipo de restricciones institucionales vigentes en la universidad. Conviene aclarar aquí que, si bien este trabajo consiste en el análisis de un caso, este fenómeno se advierte en gran parte de los cursos universitarios, siendo implícito en algunos y explícito en otros.

Reconocer los distintos tipos de autismo y otros fenómenos didácticos es importante ya que estos condicionan la práctica docente. Así, el fenómeno del *encierro en las cuestiones evaluables* presente en la universidad emerge al describir la práctica docente en un curso universitario.

2. Metodología de la investigación

Esta investigación consiste en el análisis de un caso y se realizó en un curso denominado «Análisis matemático y sus aplicaciones», para estudiantes del primer año de una carrera universitaria del área Economía y Administración de Empresas. Básicamente se trata de una disciplina relativa al Cálculo en funciones de una y dos variables reales. El investigador permaneció en el campo durante un cuatrimestre realizando observación no participante del proceso de estudio con dos grupos de aproximadamente 50 alumnos cada uno.

Se realizaron registros en video, audio y notas de campo. También se recogieron las evaluaciones y los resultados obtenidos por los estudiantes. Las clases tenían una periodicidad semanal y una duración de tres horas cada una. Nos interesó el grupo de estudio dirigido por el profesor que elaboró el material teórico-práctico que utilizan alumnos y profesores del curso. El análisis presentado aquí se circunscribe a las cuatro clases relativas a *límite y continuidad de funciones* de uno de los grupos de estudio observados. Según lo expresado por el profesor responsable, en este curso es en el que más se intenta la integración entre «la teoría» y «la práctica». Debemos aclarar aquí que los profesores del curso son matemáticos sin una formación en el marco de la TAD, por lo cual no debe interpretarse la concepción que estos profesores tienen respecto de lo que es «teoría» y lo que es «práctica» como la noción de logos y praxis que se concibe en nuestro referente teórico adoptado. Para estos profesores, una clase de «teoría» es, por ejemplo, enunciar y demostrar un teorema sin analizar ni estudiar qué técnicas estos justifican e interpretan.

3. Caracterización y selección del caso

La estructura del sistema educativo argentino comprende los niveles de educación inicial, educación primaria, educación secundaria y educación superior. Conviene aclarar que no existe aquí un período de articulación entre los niveles de la escuela secundaria y la educación superior y, por consiguiente, podría decirse que la adaptación de los estudiantes a la universidad se realiza durante los dos primeros años de tránsito por este nivel. Respecto a las atribuciones del nivel superior, las instituciones universitarias tienen autonomía académica e institucional que les permite establecer el régimen de admisión, permanencia y promoción de los estudiantes, entre otros. Por ejemplo, los estatutos que rigen el funcionamiento de las universidades públicas establecen que el ingreso a las mismas es irrestricto.

Respecto a la estructura de las clases universitarias, predomina el dispositivo didáctico que separa las clases de matemáticas, y de otras disciplinas, en «clase teórica» y «clase práctica» o «clase de problemas» (Gascón, 2002). Estas clases se llevan a cabo en diferentes horarios y se encuentran dirigidas por profesores diferentes.

El sistema de evaluación asociado a este dispositivo y que opera en general en las universidades argentinas es el siguiente: evaluar las producciones de los alumnos en dos instancias diferentes. Una primera se denomina «examen parcial». Allí se evalúan, al finalizar el curso, los tipos de problemas y las técnicas desarrolladas en la «clase de problemas». La segunda instancia, a la cual solo pueden acceder aquellos estudiantes que hayan aprobado el examen parcial, corresponde al «examen final», y es aquí donde se evalúan las tecnologías y teorías que se demuestran y presentan en la «clase teórica». Este último examen es el que decide la aprobación definitiva del curso en cuestión.

El curso de matemática que hemos elegido como caso es interesante para nuestro estudio porque su diseño intenta romper con el dispositivo predominante en la universidad y con la forma de evaluación asociada al mismo. En efecto, los profesores de matemática del caso proponen que las clases no se separen en «clase teórica» y «clase práctica». Por el contrario, intentan una forma de trabajo denominada «teórico-práctica» que tiene por objetivo integrar la teoría y la práctica dentro de cada una de las clases. Bajo esta modalidad, el curso de matemática se encuentra dirigido por un único profesor, el cuál intenta integrar la teoría y la práctica. Nuevamente debemos aclarar que la integración a la cual se refieren estos profesores no debe ser entendida como la organización e interrelación de objetos que propone la TAD. En el caso, los profesores sostienen que la integración puede ocurrir si un mismo profesor, en una misma clase, se ocupa de enunciar y demostrar teoremas y/o proposiciones conjuntamente con la resolución de tareas matemáticas. En cambio, en la TAD, se considera que las tecnologías y teorías emergen como una necesidad de justificar, interpretar, explicar y aclarar las técnicas.

En el caso elegido y en este contexto, la modalidad de evaluación se denomina «por promoción». Este sistema exige a los alumnos realizar los dos «exámenes parciales» y si aprueban cada uno de estos exámenes con una nota superior a siete puntos, se excluye la evaluación de «examen final». Por consiguiente, si se pretende evaluar cada uno de los componentes de las OM que se enseñan, el objetivo pertinente del sistema por promoción sería que cada uno de los exámenes contuviera tareas práctico-técnicas y también, tecnologías y teorías. Es decir, lo más apropiado no solo sería evaluar cuestiones del tipo *cómo* resolver ciertas tareas sino también, cuestiones relativas al *por qué* de determinadas maneras de hacer.

En este trabajo se describe la OD disponible en un curso de matemática universitario y se analiza cómo ocurre —si es que efectivamente ocurre— la integración entre la teoría y la práctica durante las clases relativas al límite y la continuidad de funciones. El análisis intenta mostrar también la emergencia del fenómeno antes denominado *encierro* *en las cuestiones evaluables*. En la sección siguiente, se describen las categorías de análisis generadas para la descripción del proceso de estudio dirigido por este profesor.

4. Categorías para la descripción del proceso de estudio

Se realizó la transcripción de cada una de las clases teniendo en cuenta los turnos de habla del profesor, lo turnos de habla de los alumnos y lo escrito en cada pizarra. Estos registros de clase fueron segmentados en diferentes episodios (E) con distintas líneas secuenciales. Se considera que existe un cambio de episodio cuando se introduce una nueva noción matemática, cuando se resuelve una nueva tarea o cuándo se introducen nuevos elementos tecnológico-teóricos. En cada uno de los episodios de clase se identifica quién es el actor principal, cuál es el género de tareas [3] estudiado, cuál es el momento predominante, qué forma de validación existe y cuál es el tipo de representación semiótica utilizada. A continuación se detallan las categorías de análisis, algunas generadas a partir de la TAD, y otras, teniendo en cuenta las características propias del caso:

(a) Actor principal (AP) de cada episodio de la clase: si es el profesor (P) o el alumno (A).

(b) Géneros de tareas predominantes (GT): esta categoría se relaciona con la cuestión ¿Cuál es el género de tareas desarrollado en cada episodio de clase? Hemos considerado:

- Calcular (C). Se incluyen en este género las tareas que se refieren al cálculo de límites y a encontrar puntos de discontinuidad de funciones de una y dos variables.
- Justificar o verificar (J/V). Se incluyen aquí las tareas relativas a «justificar» o «verificar» que efectivamente el límite de una función es el valor *L*, sea *L* finito o infinito.

3. Un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado (Chevallard,1999). Así, por ejemplo, un género de tareas sería «calcular»; un tipo de tareas dentro de ese género sería «calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a un valor finito» y finalmente, una tarea que forma parte del tipo anterior sería «calcular el límite de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ cuando x tiende a 3».

- Analizar (A). Se incluyen en este género las tareas referidas al análisis de la continuidad de funciones en un punto dado o en un subconjunto del dominio de la función.
- Definir (D). Se incluyen aquí las tareas de definir cierta noción matemática o enumerar propiedades del límite y de las funciones continuas.
- Redefinir (Rd). Se incluyen en este género las tareas relacionadas con redefinir funciones que presentan continuidades evitables.

(c) Momentos predominantes (MP). Esta categoría responde a la cuestión ¿Cuál o cuáles de los seis momentos del estudio ocurren en cada episodio de clase? Los designaremos como sigue:

- PE: momento del primer encuentro con la OM que se estudia.
- ETT: momento de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica relativa a ese tipo de tareas.
- CETT: momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo al tipo de tareas.
- TT: momento del trabajo de la técnica.
- I: momento de la institucionalización de la OM.
- E: momento de la evaluación.

Las categorías descritas hasta aquí fueron definidas considerando algunos de los conceptos y supuestos clave que nos ofrece el marco teórico de la TAD. Entre ellos, la noción de géneros de tareas y la teoría de los momentos del estudio. Las categorías d) y e) no se derivan explícitamente del marco de la TAD, pero hemos considerado necesario incluirlas, pues permiten describir una dimensión de la actividad matemática fundamental para el proceso de enseñanza-aprendizaje, como son las cuestiones referidas a formas de validación y a tipos de representaciones semióticas.

(d) Formas de validación (FV). La validación es una instancia en la que se trata de lograr la adhesión de un público a un enunciado, a una teoría, etc. Así, el proceso de validación se convierte en la necesidad de «convencer» de la verdad a otro. En el sentido de validación antes mencionado, se consideran para el análisis del caso las siguientes formas de validación:

- Deductiva. Relativa a validar a través de razonamientos lógicamente correctos. Es decir, obtener resultados a partir de propiedades, proposiciones, teoremas, etc.
- Inductiva. Referida a generalizaciones a partir de ejemplos prototípicos.
- Visual-ostensiva. Incluimos aquí las validaciones ostensivas. En efecto, por ostensivo se entiende normalmente aquello que se puede mostrar, aquí y ahora, a otra persona.

(e) Tipos de representaciones semióticas (RS). Se relaciona con la cuestión ¿qué tipos de representaciones semióticas se identifican en la acción del profesor y de los estudiantes? Se consideran los siguientes sistemas de representaciones semióticas:

- Representaciones numéricas. Asociadas a cualquier expresión que involucre números y operaciones entre ellos.
- Representaciones algebraicas. Referidas a las expresiones que involucran representaciones de objetos matemáticos a través de letras.
- Representaciones verbales. Incluyen expresiones en lengua natural, ya sea hablada o escrita.
- Representaciones pictóricas conceptuales. Se incluyen aquí solo las representaciones geométricas y/o diagramas que sean bosquejo de ciertas gráficas.

(f) Indicadores del fenómeno denominado «encierro en las cuestiones evaluables» (ECE): [4] Se considerará un indicador de este fenómeno cualquier acción o referencia por parte del profesor y de los alumnos en el momento de la evaluación. Por ejemplo, cuando el profesor o los alumnos mencionan las tareas, técnicas y tecnologías que pueden, o no, ser evaluadas en el examen parcial. Dentro de esta categoría se distinguen dos subcategorías:

- ECE_P. El profesor es quien menciona las tareas que pueden ser evaluadas.

4. Esta categoría se generó a partir de los registros de clase, pues allí hemos identificado continuas alusiones al examen parcial tanto por parte del profesor como de los alumnos. Esta categoría nos permitirá fundamentar e identificar cuestiones referidas al encierro en las cuestiones evaluables.

– ECE_A. Los alumnos son quienes preguntan sobre las tareas que pueden ser evaluadas.

(g) Tipo de actividad matemática (TAM). Esta última categoría fue generada a partir de la lectura del programa analítico y luego de realizar entrevistas a los profesores a cargo del curso (el profesor observado y el responsable de la asignatura). En ambas instancias, tanto en la lectura del programa analítico como en las entrevistas, los profesores propusieron una nueva modalidad de trabajo («nueva» pues intenta romper con el dispositivo didáctico predominante en las universidades argentinas) debido a que, según los profesores, los alumnos no logran integrar la teoría y la práctica. Consideramos entonces dos subcategorías para el análisis del tipo de actividad matemática:

– TP. Integración entre Teoría y Práctica. Esta subcategoría se identifica cuando el profesor dice integrar «la teoría y la práctica».
– T vs. P: Separación entre Teoría y Práctica. Esta subcategoría se identifica cuando el profesor hace explícita la distinción entre «la teoría» y «la práctica».

E	Noción matemática	GT	AP	MP	FV	RS	ECE	TAM

Tabla 1. Principales características del proceso de estudio según las categorías y subcategorías de análisis

En la primera columna de la tabla 1 se indica el número del episodio de clase. La segunda columna explicita las nociones matemáticas referidas al límite y continuidad de funciones estudiadas o definidas en cada episodio. Las columnas tres, cuatro, cinco, seis y siete informan, respectivamente, sobre: el género de tareas (GT); el actor principal (AP); el o los momentos del estudio (MP); la forma de validar (FV), si es que existe validación, y el tipo de representación semiótica (RS) que se identifica en cada uno de los episodios de clase.

La columna ocho se refiere a la existencia de indicadores del fenómeno del encierro en las cuestiones evaluables (ECE) durante el proceso de estudio. Es decir, en aquellos episodios donde el profesor o los alumnos se hayan referido a los componentes de las OM posibles de ser evaluados, la columna ocho contendrá las siglas ECE_P y/o ECE_A**.** En la columna nueve, se destacan los episodios de clase en los cuales el profesor menciona la separación o la integración entre teoría y práctica. Por ejemplo, las celdas que poseen la sigla T vs. P significa que, en ese episodio, el profesor hizo una clara distinción entre la teoría y la práctica.

Para tener una visión más detallada del proceso de estudio, la tabla 1 fue dividida en dos. Cada una de ellas contiene información sobre cada una de las clases y sobre ciertas categorías. Una de las tablas abarca desde las nociones matemáticas de cada episodio de clase hasta los tipos de representaciones semióticas (RS), y la segunda tabla contiene información sobre el encierro en las cuestiones evaluables (ECE) y el tipo de actividad matemática desarrollada (TAM).

5. Descripción de la OD universitaria: características de la práctica docente

Como se acaba de mencionar, la tabla 1 se dividió en dos tablas que abarcan aspectos diferentes del proceso de estudio del grupo observado. A continuación, se presenta la tabla 2, que contiene cada número de clase con el total de episodios que la componen. La columna dos contiene las nociones matemáticas estudiadas. La columna tres, los géneros de tareas predominantes. La columna cuatro informa sobre el actor principal de cada clase. La columna cinco contiene los dos momentos del proceso de estudio dominantes. La columna seis informa sobre la forma de validación más destacada, y la última columna, los dos tipos de representaciones semióticas predominantes. En cada uno de estos casos, seguido a la categoría correspondiente, se anota la cantidad de episodios de cada clase que le corresponden a esa categoría, solo a los efectos de proporcionar una idea de cómo se caracteriza el proceso de estudio.

Episodios	Noción matemática	GT	AP	MP	FV	RS
1 (23)	Continuidad, límites laterales, límite, límites finitos, límites infinitos, propiedades	C (13) Df(5)	P	TT(14) PE(6)	D(3)	N(12) A(12)
2 (22)	Límite por definición, límites laterales, límites en el infinito, límites infinitos, asíntotas	C(11) Df(7)	P	TT(10) PE(7)	D(5)	A(20) V(15)
3 (24)	Límites especiales, límite doble, límites sucesivos	C(16) Df(5)	P	TT(12) ETT(5)	D(2) V(2)	A(21) V(21)
4 (32)	Límite doble por definición, propiedades, continuidad, discontinuidad, límites radiales, costo total	A(15) Df(10)	P	TT(23) ETT(3)	D(2)	V(29) A(19)

Tabla 2. Síntesis de las características del proceso de estudio por clases

A partir de la tabla 2 se aprecia que el *profesor* es el actor principal del proceso de estudio, pues lo es en cada uno y en todos los episodios de clase. Las intervenciones de los alumnos son pocas —el número de alumnos posibilitaría su participación— y cuando lo hacen, solo es para responder a las preguntas que el profesor realiza. El género de tareas predominante es el de *calcular*. El profesor constantemente resuelve tareas y manipula técnicas referidas al cálculo de límites. Del total de los 101 episodios de las clases, 40 corresponden a este género. El momento predominante en todas las clases es el del *trabajo de la técnica*, con énfasis en las técnicas referidas al cálculo de límites de funciones reales de una variable en un punto.

En los pocos momentos dedicados a la validación predominan las justificaciones *deductivas.* Por ejemplo, cuando el profesor utiliza las propiedades del límite de funciones para hallar el valor de un límite o cuando utiliza las propiedades del valor absoluto para justificar un límite usando la definición. Tanto las propiedades del límite de funciones como las del valor absoluto garantizan que la verificación del límite sea correcta.

Las representaciones algebraicas y verbales son las más utilizadas. Las primeras se usan en la mayoría de las tareas, particularmente en el cálculo de límites. Las segundas se utilizan en la definición de ciertas nociones matemáticas. Por ejemplo, cuando el profesor enuncia la definición de función continua en un punto para funciones reales de dos variables, utilizando el lenguaje natural. De esta manera, desaparece la formalidad matemática en la formulación de tal definición con la consecuente pérdida de su legitimidad matemática. A continuación se transcribe el episodio 12 (E12) de la Clase 4 (líneas 109 a 111) donde el profesor formula la definición de continuidad siendo *f* una función de dos variables reales:

E12 [Clase 4]:

[109] Profesor: *Continuidad de funciones de dos variables independientes*

[110] Alumno: *¿Cuál es la diferencia entre primera y segunda especie?*

[111] Profesor: *En la primera especie existen los límites laterales pero son distintos, y acá no existen. Quiere decir que te dé infinito. Fíjate, si tendés a dos por derecha te da más infinito y si tendés por izquierda a menos infinito.* (Señala la pizarra.) *Continuidad de funciones de dos variables independientes. ¿Qué va a tener que existir? La función en el punto, van a tener que existir el límite doble y van a tener que ser iguales.*

Respecto del momento del *primer encuentro* con la OM relativa al límite de funciones, en el caso de funciones de una variable real ocurre cuando el profesor formula la definición. En cambio, para la continuidad de funciones, sucede a través de una tarea que involucra una función racional.

El hecho de que la mayoría de las técnicas se presenten sin justificación es un indicador de la ausencia del momento de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* durante el proceso de estudio. En consecuencia, tampoco existen preguntas referidas al porqué de determinadas maneras de hacer. Preguntas del tipo: ¿por qué tal tarea se resuelve así y no de otra manera? no tienen su lugar en este contexto, donde predominan las preguntas de los tipos «cómo calcular» o «cómo realizar cierta clase de tareas».

5.1. El fenómeno del encierro en las cuestiones evaluables y el tipo de actividad matemática

Las tareas que pueden o no ser evaluadas son constantemente mencionadas por el profesor y por los alumnos durante todo el proceso de estudio. Cuando lo hace el profesor, ese episodio se señala con la sigla ECE_P; cuando lo hace el alumno, se señala el episodio con la sigla ECE_A. La tabla 3 muestra el número de episodios de cada clase en las que se identificaron alusiones al momento del examen parcial. Cuando en un mismo episodio de una misma clase, el profesor o los alumnos se refirieron al examen parcial en dos oportunidades, se coloca en la celda correspondiente dos veces el mismo episodio. Esto ocurre, por ejemplo, con el episodio 11 (E11) de la clase 1 y con el episodio 12 (E12) de la clase 3.

Clases	**Encierro en las cuestiones evaluables (ECE)**		**Modalidad de las clases (TAM)**	
	ECE_P	**ECE_A**	**T vs. P**	**TP**
1 (23)	E1; E11; E11; E14; E15; E18; E20; E22.	E7; E15	E15; E17	
2 (22)	E1; E3; E10; E21	E4; E21	E5; E10	
3 (24)	E1; E3; E12; E12; E17	E5; E10; E11; E19	E5	
4 (32)	E13; E14	E2	E1; E13	

Tabla 3. Episodios relacionados con el encierro en las cuestiones evaluables y la modalidad de las clases

En todas las clases, el profesor y los alumnos mencionaron la instancia del examen parcial. El número total de estos episodios es 28 y existen más alusiones por parte del profesor (en 19 episodios) que por parte de los alumnos (en 9 episodios). A continuación se presentan, a modo de ejemplo, algunos de estos episodios de clase:

E11 [Clase 1]:

[60] Profesor: […] *Yo quiero probar ese límite por definición, que es lo que les pueden llegar a pedir a ustedes en el examen; seguro. ¿Les van a pedir de una variable?*

[61] Alumno: *No*.

[62] Profesor: *Les van a pedir de dos, seguro*. […]

E15 [Clase 1]:

[107] Alumno: *¿Cuántas propiedades hay? ¿Las toman?*

> [108] Profesor: *No. Pero ustedes tienen suerte porque las propiedades no se las toman. Antes, en el dos mil, en el noventa y nueve, les tomábamos las demostraciones y ahora no las tomamos.*

E11 y E15 permiten apreciar que el profesor institucionaliza la tarea «demostrar límites por definición» remarcando que será evaluada, mientras señala que la demostración de propiedades del límite de funciones no lo será, a diferencia de lo que sucedía años atrás. El abandono de tareas que requieren la construcción de un entorno tecnológico-teórico, en aras de obtener algún suceso en la evaluación, es otro indicador del encierro en las cuestiones a evaluar.

Aquí el profesor menciona nuevamente que «los límites por definición» serán evaluados: «[…] es muy probable que los límites por definición después lo tengan que hacer. ¿Cuándo? En el parcial […]».

En los episodios anteriores, el profesor destaca qué tareas suelen o no formar parte del examen parcial —solo algunos de los que se mencionan en la tabla 3—. Esta insistencia en torno a lo que puede resultar evaluado nos conduce a pensar que la evaluación podría funcionar como eje central, alrededor del cual se articula todo el proceso de estudio. Podríamos suponer además que el examen parcial determina qué se estudia y qué se desarrolla durante cada una de las clases, interpretando esto como un ejemplo de lo que se denomina «pérdida de sentido matemático». Este sentido es necesario puesto que resulta funcional a la construcción del saber.

A continuación se transcribe un fragmento del protocolo correspondiente al episodio tres (E3) de la clase 3. En este caso, se advierte lo mismo que en los episodios 11 y 15 (E11 y E15) de la clase 2. Nuevamente aquí, se abandona una posible construcción de un entorno tecnológico-teórico, pues no será evaluado. En este nuevo episodio E3 de la clase 3, el profesor se refiere al número *e* como $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Este límite especial es utilizado cómo técnica para resolver otros límites. Aunque el profesor justifica inductivamente el límite anterior, y dedica esfuerzo y trabajo numérico a esta cuestión, inmediatamente (línea 20) deslegitima esta búsqueda de sentido argumentando que no tratará la «demostración», pues esta no suele ser evaluada.

E3 [Clase 3]

[16] Profesor: *Después viene el número e. ¿Saben lo que es el número e? ¿Lo leyeron? Bueno, eso es el número e* (escribe en la pizarra $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$). *El número e es la base de los logaritmos naturales. Es una expresión que tiene estos decimales: e igual a* 2,7182818281828459 (sic). *Aparentemente es un número periódico, pero no, no es verdad; pareciera que el período es mil ochocientos veinte ocho, pero después de estas tres veces que aparece el mil ochocientos veinte ocho aparece un cuatrocientos cincuenta y nueve, entonces esa expresión no es periódica. La base de los logaritmos naturales… los logaritmos decimales tienen base diez, los logaritmos naturales tienen base e. ¿Sí? Es lo que figura en la calculadora con ele ene, ese ele ene, es «ele ene». Eso es el logaritmo en base e, que se simboliza así:* ln. *También se les llama logaritmos neperianos. ¿Por qué? Porque los descubrió un señor que se llamaba Neper. Bueno, ¿qué pasa si equis vale uno? ¿Qué pasa con esta expresión?* (Señala la expresión $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y prueba con diferentes valores de *x*.) *Ven que el dos, la primera parte, la parte entera, la tenemos. Ahora nos falta aproximar la parte decimal; ¿qué pasa? Tengo que tomar valores de equis muy grandotes. Esto puedo seguir los cálculos, si equis vale cuatro, cinco, seis… Supongan que equis vale cien.* (Resuelve la expresión del *e* para *x* igual a 100 y les pide a los alumnos que resuelvan en la calculadora cuánto es 1,01 elevado a la 100.) *Va a valer dos coma y pico ¿Apareció el siete?*

[17] Alumno: *Dos coma setenta.*

[18] Profesor: *Ven que apreció el siete. Si equis es igual a mil, sería uno coma cero cero uno elevado a la mil. Esta expresión es dos coma siete…y es probable que aparezca el uno. Es decir, a medida que equis se hace más grande, si equis tiende a infinito, esta expresión tiende a ¿qué número?*

[19] Alumno: *A e.*

[20] Profesor: *Esto se puede escribir en forma de límite. Podemos decir que el límite para equis tendiendo a infinito de uno más uno sobre equis, todo elevado a las equis me da, por definición, el número e, la base de los*

> *logaritmos naturales. La demostración de esto no se la voy a dar, porque teóricamente, no la toman. El tema es, si la tomas… vamos, todos muertos… hay que leerla, interpretarla; no es difícil, está en la página noventa y cinco y noventa y seis.* (El profesor hace referencia a las páginas 95 y 96 del material que ha escrito para el curso de matemática.)

Resignar la construcción del entorno tecnológico-teórico relativo a una técnica matemática, porque no sería evaluada, priva de sentido al trabajo realizado por el profesor para legitimar el uso de este límite en el cálculo de otros, lo cual puede interpretarse como otro indicador del encierro en las cuestiones que pueden ser evaluadas. ¿Por qué se priorizan tanto las cuestiones relativas a *cómo proceder para calcular cierto límite*, desplazando a las cuestiones relativas a *por qué es tal límite*, o *para qué se estudian los límites*? La TAD permite explicar esto a partir del análisis de ciertos tipos de restricciones institucionales que, como señalan Berta Barquero, Marianna Bosch y Josep Gascón (2007):

> [Las restricciones] pueden ser generadas por la necesidad de evaluar la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje, provocando generalmente una automatización o mecanización de las técnicas enseñadas con la consiguiente pérdida de funcionalidad del saber matemático; las restricciones impuestas por el tiempo didáctico del proceso de estudio, conjuntamente con la exigencia de un aprendizaje rápido o en un tiempo muy limitado, que puede llevar al aprendizaje «momentáneo» y las restricciones que provienen de la necesidad de que todo saber enseñado debe aparecer como transparente e incuestionable, lo cual impide retomar las OM del nivel medio e integrarlas en OM regionales o de complejidad creciente. (pp. 3-4)

En este caso, operan los tres tipos de restricciones mencionadas anteriormente, pues la necesidad de que los alumnos aprueben los exámenes, conjuntamente con la restricción del tiempo didáctico —que es escaso— nos conduce a suponer que la única alternativa del profesor es limitar las tareas y las cuestiones a aquello que será incluido en el examen.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que el profesor se limita a proponer solo tareas similares a las que serán evaluadas, pues entiende que de esa manera podrá responder a las exigencias institucionales que la universidad le demanda: «lograr la permanencia y aprobación de los estudiantes». Creemos que el profesor se «encierra» en el nivel de las cuestiones no de manera voluntaria sino como un mecanismo de respuesta ante ciertas exigencias institucionales.

Los protocolos antes presentados permiten mostrar el tiempo, esfuerzo y énfasis otorgado a responder cuestiones relativas al *¿cómo?*, abandonando explícitamente las referidas al *¿por qué?* y al *¿para qué?* del saber matemático. Consideramos que este «encierro en las cuestiones evaluables» es un fenómeno que condiciona la práctica docente y que merece ser estudiado.

Otro indicador del fenómeno del «encierro» es la existencia de OM puntuales. En trabajos anteriores hemos reconstruido y descrito las distintas OM en torno al límite de funciones que conviven en el curso «Análisis matemático y sus aplicaciones » (Parra & Otero, 2007; Parra, 2008). Hemos reconstruido una posible OM de referencia, dos OM propuestas para enseñar (una OM propuesta para enseñar por los libros de texto que los profesores recomiendan a los alumnos, y otra OM propuesta para enseñar en el material teórico-práctico que el profesor del caso diseñó y editó para los alumnos de su curso) y, además, describimos la OM efectivamente reconstruida en el aula. Una de las conclusiones obtenidas a partir de esta descripción, es que las OM no llegan a integrarse en OM locales pues no existen elementos tecnológicos-teóricos suficientes para ello y, menos aún, llegan a articularse en OM regionales. La OM efectivamente reconstruida se centra en calcular el límite de funciones de una variable real en torno a un valor finito, dejando de lado las cuestiones relativas a la verificación de límites y al análisis de la existencia de los mismos.

Con relación al tipo de actividad matemática, el mayor tiempo de clase se utiliza para que el profesor presente reiteradamente técnicas relacionadas con las tareas del examen parcial. Consideramos que estas acciones podrían reducir fuertemente el *topos* del alumno durante las clases y no contribuirían al desarrollo de su autonomía.

En síntesis, la restricción institucional que demanda aprobación del examen parcial para evitar la deserción de los alumnos, entendemos que conduce al encierro del profesor en el nivel de las cuestiones que él sabe que serán evaluadas, transformando las clases en esencialmente prácticas. Desde el punto de vista de la TAD, la praxis sin logos es un «sinsentido matemático», ya que el saber matemático necesita discursos racionales que expliquen, justifiquen y muestren las limitaciones y los alcances de ciertas maneras de hacer, o, dicho de otro modo, que justifiquen por qué procedemos de una manera y no de otra. Esta imposibilidad de «ver más allá» de las cuestiones relativas a la evaluación podría fomentar el estudio de OM puntuales y subyace al fenómeno que hemos denominado como «encierro en las cuestiones evaluables».

Se concluye además que la OD disponible en esta institución tiene algunas características que, en general, se atribuyen como propias de la OD de la escuela secundaria. En este caso, ocurre que:

- El examen parcial actúa como eje alrededor del cual gira todo el proceso de estudio, determinando lo que efectivamente se estudia y desarrolla durante las clases.
- La actividad matemática es controlada y dirigida por el profesor restringiendo fuertemente el lugar del alumno en la exploración de tareas y en el trabajo de la técnica, e inhibiendo la participación del alumno en la constitución de algún posible entorno tecnológico-teórico.
- Los estudiantes no logran así construir medios eficaces para ser sus propios directores del proceso de estudio y, por lo tanto, no alcanzan la autonomía que el nivel superior les exige, e inhibe su participación en el desarrollo de la responsabilidad matemática de aprender.
- La actividad matemática desarrollada durante todo el proceso de estudio resulta ser puramente práctica, sin alcanzar un nivel tecnológico-teórico necesario y suficiente para justificar e interpretar las técnicas. Estos hechos generan un predominio del bloque práctico-técnico sobre el momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a las técnicas matemáticas utilizadas y presentadas.

Las cuestiones que hemos mencionado en esta última parte se relacionan ampliamente con los resultados obtenidos por Cecilio Fonseca (2004) y C. Fonseca, M. Bosch y J. Gascón (2004), quienes han analizado profundamente las discontinuidades matemáticas y didácticas en el paso de la enseñanza secundaria a la universitaria y, en particular, han estudiado la ausencia de praxeologías matemáticas locales relativamente completas en el ámbito de la matemática escolar, tanto en la secundaria como en la universitaria. Además, se relaciona con los resultados presentados por J. Gascón (1997) respecto a los cambios en el contrato didáctico en la transición de la escuela secundaria a la universidad.

6. Consideraciones generales

Este trabajo permitió reconocer y describir la presencia del fenómeno del autismo en la universidad, desde el institucional hasta el temático y también el fenómeno que hemos denominado «encierro en las cuestiones evaluables», a la luz de las formulaciones propuestas por Y. Chevallard (1999) y J. Gascón (2002, 2003, 2004) en el marco de la TAD. Aunque las restricciones a las que está sujeto el profesor de matemática universitario, parecerían diferentes a las que operarían en la secundaria, las características encontradas en la OD, muestran mayor continuidad que la esperada en la manera de organizar el estudio de la matemática en la escuela secundaria con respecto al primer año de la universidad.

En la universidad operan restricciones institucionales que acaban determinando lo que es posible construir o estudiar en una clase de matemática. En este caso, se advierten restricciones impuestas por el tiempo didáctico y por la necesidad de que los alumnos aprueben las instancias de evaluación, limitando así la acción del profesor hacia el estudio de las cuestiones que él sabe serán evaluadas. El proceso de estudio está dirigido a responder una única cuestión generatriz —aquí explícita— ¿cómo resolver las tareas que probablemente serán evaluadas? Así se gesta la pérdida de *sentido matemático* de diversas nociones, pues las que no forman parte del examen parcial no son estudiadas durante las clases.

El caso analizado también muestra cómo se intenta romper el dispositivo que separa las clases en «teoría» y «práctica», que se interpreta como un factor negativo para los estudiantes. Sin embargo, aunque los profesores se proponen integrar lo que ellos entienden por teoría y práctica, no consiguen sino reducir las acciones didácticas al nivel de la praxis. Esto podría ser interpretado a la luz de este marco teórico de la siguiente manera: las clases transcurren sin construir un entorno tecnológico-teórico que dé sentido matemático a las técnicas utilizadas, y el profesor puede ser visto como «encerrado» en el nivel de las cuestiones que él supone serán evaluadas. El fenómeno del encierro es un fenómeno didáctico y por lo tanto debe ser tratado como tal.

Respecto a las características de la OD universitaria y a las relaciones con el fenómeno del encierro en las cuestiones evaluables, podría decirse que el profesor es un protagonista privilegiado, que controla y dirige el desarrollo de todo el proceso de estudio, instalando constante y explícitamente el examen parcial. Este modo de actuar del profesor impide al alumno «tomar su lugar» durante las clases, y obstaculiza el acceso a los medios necesarios para que el estudiante ejerza y desarrolle la responsabilidad didáctico-matemática de aprender. Así, la ruptura del dispositivo teoría-práctica, característico de la institución universitaria, realizada en nombre de los problemas del alumno, solo ha profundizado las dificultades del profesor para darle lugar en las clases.

La descripción realizada permite dimensionar las dificultades que tiene el profesor universitario para responder a los problemas didácticos que se le presentan, tales como el autismo temático. La teoría antropológica de lo didáctico resulta un referencial pertinente para analizar las praxeologías didácticas en la universidad, y explica cómo las restricciones institucionales operan a tal punto que las únicas acciones que el profesor puede realizar, acaban en el fenómeno del «encierro». El trabajo también permite cuestionarnos acerca de la posibilidad de implementar un recorrido de estudio e investigación (REI) y si sería viable en un curso universitario con estas características.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2.3), 205-250.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2000). La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes. En M. Bailleul (Ed.), *Actes de la X^e^ école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 98-112). Caen, Francia: ARDM y IUFM de Caen.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Huesca. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Fonseca, C., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la «regla de Ruffini». En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 139-158). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. *SUMA*, *26*, 11-21.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *5*(3), 673-702.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *SUMA*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, *45*, 41-52.

Parra, V. (2008). *Praxeologías matemáticas y didácticas en la universidad: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Parra, V. & Otero, M. R. (2007). Organizaciones Matemáticas en la Universidad en torno a las nociones de límite y continuidad de funciones: un estudio de caso. *Revista Electrónica de Educación en Ciencias*. http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/ano-2-nro-2

Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización

Noemí Ruiz-Munzón
Escola Universitària del Maresme, España

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. The aim of this work is to coordinate and complete the papers we presented at the first two conferences on the ATD. We propose a reference epistemological model that is "global" enough to provide a basis for the school genesis of algebra as a modelling tool and to support a progressive development of the algebraisation process of school mathematics leading to functional modelling.

Résumé. L'objectif de ce travail est d'articuler et de compléter les communications que nous avons présentées dans les deux premiers congrès sur la TAD. Nous proposons un modèle épistémologique de référence « global », au sens où il sert de fondement à la genèse scolaire de l'algèbre comme instrument de modélisation et où, en même temps, il soutient un développement progressif des étapes successives du processus d'algébrisation des mathématiques scolaires qui aboutit à la modélisation fonctionnelle.

Resumen. El objetivo de este trabajo es el de articular y completar las comunicaciones que presentamos en los dos primeros congresos sobre la TAD. Proponemos un modelo epistemológico de referencia «global» en el sentido que permite fundamentar la génesis escolar del álgebra como instrumento de modelización y, al mismo tiempo, sustentar un desarrollo progresivo de las sucesivas etapas del proceso de algebrización de la matemática escolar que desemboca en la modelización funcional.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra

En trabajos anteriores (Gascón 1993, 1993-94, 1999) en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (en adelante, TAD) se ha analizado el fenómeno de la *aritmetización escolar del álgebra*, mostrando que dicho fenómeno responde a la interpretación dominante en la institución escolar del álgebra elemental como *aritmética generalizada*. En esta interpretación se identifica el álgebra con el simbolismo o «lenguaje algebraico» que generaliza, al tiempo que se opone a, un supuesto «lenguaje aritmético». En el trabajo de tesis de Pilar Bolea (2003) se destacan algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra elemental como aritmética generalizada:

(a) El álgebra elemental se construye exclusivamente en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales. Se le considera como un mero epifenómeno de la aritmética.

(b) Se considera, de manera simplista, que las expresiones algebraicas surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos; se supone que esta es su razón de ser.

(c) En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre los datos conocidos por un lado y las incógnitas por otro.

(d) Se tiende a reducir las tareas específicamente «algebraicas» a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números (lo que se suele denominar «cálculo algebraico») y a la resolución de ecuaciones.

(e) Se interpretan las ecuaciones como igualdades numéricas que se cumplen para algunos valores concretos de las incógnitas.

En un trabajo posterior de Pilar Bolea, Marianna Bosch y Josep Gascón (2004), se muestra que una de las consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra elemental es la *ausencia del álgebra como instrumento de modelización* en las matemáticas que se estudian en la enseñanza secundaria. Trabajos posteriores en el ámbito de la TAD han mostrado las conexiones de este fenómeno con la *incompletitud* de las organizaciones matemáticas (en adelante, OM) que se estudian en secundaria (Fonseca, 2004) y con el fenómeno de la *desarticulación* de la matemática escolar (García, 2005).

Investigaciones más recientes en esta misma línea apuntan asimismo que el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las *discontinuidades* observadas en el sistema educativo español, entre las matemáticas de la educación secundaria obligatoria (en adelante, ESO, con alumnos entre 12 y 16 años) y las del bachillerato (alumnos entre 16 y 18 años). Más concretamente, la ausencia del uso del instrumento algebraico en la ESO dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional en el tránsito al bachillerato, lo que obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al cálculo diferencial (Ruiz-Munzón, 2006). Una vez constatada la importancia didáctica del *carácter prealgebraico* de las matemáticas que se estudian en secundaria y el alcance de los fenómenos didácticos relacionados con la aritmetización del álgebra escolar, se plantea el problema de *cómo introducir el álgebra* en la educación secundaria como un *instrumento de modelización*, sin reducirla, como pasa habitualmente en España, a la *manipulación formal* de expresiones algebraicas, a la resolución de ecuaciones y a la resolución de ciertos prototipos de «problemas de planteo».

En la primera parte de este trabajo nos proponemos mostrar que es posible introducir el instrumento algebraico en la enseñanza obligatoria de manera *funcional*, proponiendo una posible «razón de ser» del álgebra escolar, esto es, explicitando un tipo de cuestiones que viene a resolver la modelización algebraica y que pueden dar sentido a la introducción del álgebra en la primera etapa de la ESO (12-14 años). Además, dado que pretendemos iniciar a los alumnos en el uso de la modelización algebraica, deberemos elegir un sistema inicial para modelizar, apropiado para que su modelización requiera la construcción de las distintas herramientas que componen el álgebra elemental. Este planteamiento se puede resumir en el cuestionamiento siguiente:

> ¿Es didácticamente viable, en el actual sistema de enseñanza de las matemáticas, iniciar a los alumnos de la primera etapa de la ESO en el uso funcional del instrumento algebraico? ¿Qué OM puede tomarse como

> sistema inicial a modelizar? ¿Qué cuestiones problemáticas pueden dar sentido a dicho proceso de estudio, esto es, qué cuestiones planteables en dicho sistema requieren de manera ineludible el uso del instrumento algebraico?

En la segunda parte de este trabajo, ampliaremos el modelo epistemológico sobre el álgebra elemental para articularlo con la modelización algebraica con parámetros. Veremos también cómo su desarrollo conduce a la modelización algebraico-funcional y al uso de las técnicas del cálculo infinitesimal. El cuestionamiento asociado a esta segunda ampliación del proceso de algebrización puede formularse en los términos siguientes:

> Una vez que los alumnos estén en posesión del instrumento algebraico, ¿qué ampliaciones progresivas de las OM disponibles se requerirán para avanzar en las *sucesivas etapas del proceso de algebrización*? ¿Qué nuevos dispositivos didácticos se requerirán para llevarlo a cabo? A medida que avance el proceso de algebrización, ¿cómo se modificará el estudio del resto de las OM escolares y, en particular, cómo se avanzará hacia el estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes y la introducción del cálculo diferencial e integral?

El trabajo que presentamos a continuación pretende aportar algunos elementos de respuesta a estas cuestiones, proponiendo una descripción del proceso de algebrización en términos de ampliaciones sucesivas de determinadas praxeologías matemáticas.

2. Génesis escolar del instrumento algebraico

Partiremos de la noción clásica de «problema aritmético» como un problema que puede resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Tanto las cantidades que resultan de las operaciones intermedias como la cantidad incógnita, tienen que poder ser interpretadas en el contexto del enunciado del problema.

Podemos considerar que las técnicas clásicas de resolución de los problemas aritméticos escolares se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita. Los elementos tecnológico-teóricos que permiten describir, justificar e interpretar esta práctica aritmética elemental consisten esencialmente en las propiedades de los diferentes sistemas de números (naturales y racionales), en las propiedades de las operaciones aritméticas con estos números y en las operaciones elementales entre cantidades de magnitudes, a lo que se podría añadir, en el nivel teórico, el discurso implícito que describe e interpreta el «patrón de análisis-síntesis» (Gascón, 1993).

Para fundamentar una génesis escolar *funcional* del instrumento algebraico, tomaremos como sistema inicial a modelizar una OM en torno a los *problemas aritméticos*. Será esta misma OM la que consideraremos en la segunda parte del trabajo para ejemplificar el desarrollo del álgebra como *instrumento de modelización*. En esta primera parte del trabajo, centrada en la génesis del álgebra, utilizaremos un tipo de problemas aritméticos especialmente sencillos (que más tarde, por motivos obvios, denominaremos «lineales») y, dado que se trata de poner de manifiesto la necesidad inicial del instrumento algebraico, no iremos más allá de lo que después denominaremos y caracterizaremos como «*primera etapa* del proceso de algebrización».

Partimos, por lo tanto, de un problema aritmético resoluble mediante el patrón de análisis-síntesis como, por ejemplo, el siguiente:

> T_0: *Noelia piensa un número, lo multiplica por* 3*, le resta* 18 *y acaba dividiendo el resultado entre* 9*. Si el resultado final es* 7*, ¿qué número había pensado Noelia?*
>
> La resolución aritmética (verbal) de este problema podría ser:
>
> Antes de dividir entre 9, el resultado era $7 \cdot 9 = 63$; antes de restar 18 el resultado era $63 + 18 = 81$; y antes de multiplicar por 3 el número (pensado) era $81/3 = 27$.

También podemos escribir «en línea» esta cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas que constituyen la síntesis del proceso de resolución (Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2005) y que, siguiendo la propuesta de Yves Chevallard (2004), llamaremos *programa de cálculo aritmético* (en adelante, PCA):

$$\mathrm{PCA}(7, 9, 18, 3) = (7 \cdot 9 + 18) / 3.$$

En general, un PCA puede depender no solo de argumentos numéricos concretos (a_j) sino también de otros argumentos que hacen el papel de *parámetros* o *incógnitas* (x_i). Esto significa que la formulación escrita de un PCA tomará, en general, la forma de una cadena de operaciones aritméticas en función de x_i y a_j. Nos referiremos a dicha cadena usando la escritura

$$\mathrm{PCA}(x_1,\ldots, x_m, a_1,\ldots, a_n).$$

Lo que, en el álgebra escolar, se conoce como una «expresión algebraica» corresponde a esta escritura simbólica de un PCA que, en general, sirve para modelizar tanto el proceso de resolución de un problema aritmético como su *estructura*. Si asociamos a un problema aritmético el PCA que materializa su proceso de resolución, podemos preguntar qué tipo de problemas aritméticos puede servir como sistema inicial para sustentar la génesis del instrumento algebraico. Postulamos que, dadas las restricciones institucionales que aparecen en la primera etapa de la ESO (12-14 años), debemos limitarnos a aquellos problemas cuyo PCA asociado, una vez simplificado, puede expresarse simbólicamente en la siguiente forma canónica[1]:

$$\mathrm{PCA}(n_1,\ldots,n_m,a_0,\ldots,a_k) \equiv b_0 + b_1\, n_1 + \cdots + b_m\, n_m$$

$$\text{con } n_i \in \mathbf{N} \text{ desconocidos y } a_i,\, b_i \in \mathbf{Z} \text{ conocidos.}$$

¿Qué cuestiones problemáticas, planteables en la OM en torno a los problemas aritméticos, requieren del uso del instrumento algebraico para ser respondidas y, por lo tanto, podrían posibilitar la génesis funcional del mismo? Postulamos que deben ser cuestiones acerca de las *relaciones* que deben darse entre los argumentos de dos PCA para que estos proporcionen *resultados equivalentes o relacionados de una determinada forma*. Recíprocamente, suponiendo que se da cierta relación entre los resultados de dos PCA, las cuestiones versarán sobre el tipo de relaciones que deben darse entre los argumentos de dichos PCA. Veamos unos ejemplos:

1. Esta estructura canónica es la que justifica que denominemos «lineales» a los correspondientes problemas.

T_{11}: *Noelia y Marga piensan, independientemente, sendos números. Noelia multiplica su número por* 3*, resta* 18 *y acaba dividiendo este resultado entre* 9*. Por su parte, Marga empieza restando* 4 *unidades al número que pensó, a continuación multiplica el resultado por* 5 *y acaba dividiendo el resultado por* 10*. Si, casualmente, obtienen el mismo resultado final, ¿qué relación hay entre los números pensados por Noelia y Marga?*

Si denotamos por n el número pensado por Noelia y por m el pensado por Marga, los resultados obtenidos después de aplicar los respectivos PCA son:

$$\text{PCA}(n, 3, 18, 9) = \frac{n\cdot 3 - 18}{9} \equiv \frac{n}{3} - 2;$$

$$\text{PCA}(m, 4, 5, 10) = \frac{(m-4)\,5}{10} \equiv \frac{m}{2} - 2.$$

Igualando los dos PCA ya simplificados se obtiene $n/3 = m/2$, es decir, $n = 1{,}5\,m$: el número pensado por Noelia es una vez y media el número que pensó Marga.

Otros especímenes del mismo tipo de problemas podrían ser los siguientes, que solo enunciaremos aquí:

T_{11}': Si el resultado final obtenido por Marga es la mitad del que ha obtenido Noelia, ¿podrías decir qué relación hay entre los números que pensaron?

T_{11}'': Si Noelia pensó el número 9 y ambas obtienen el mismo resultado final, ¿qué número pensó Marga?

En el trabajo de Eva Cid presentado en este mismo libro se propone un proceso de estudio experimentado a lo largo de dos cursos académicos con alumnos de la primera etapa de la ESO, dirigido a desarrollar las técnicas de simplificación de expresiones algebraicas como *paso previo* para resolver el tipo de problemas mencionado (ejemplificados aquí por T_{11}, T_{11}' y T_{11}'') que se sitúa en la primera etapa del proceso de algebrización. Dicho trabajo muestra que es únicamente en este *ámbito algebraico* en el que es posible llevar a cabo, con sentido, la introducción, primero «operatoria» y después «conceptual», de los números negativos.

3. Tres etapas del proceso de algebrización de las OM escolares

Para avanzar en nuestra descripción del proceso de algebrización tal como hemos iniciado en el apartado anterior, supongamos ahora que los alumnos están en posesión del instrumento algebraico y tomemos como punto de partida un problema aritmético con una estructura más compleja (no «lineal») para ejemplificar con mayor claridad los «saltos» en el tipo de actividad matemática que aparecen progresivamente en las sucesivas etapas del proceso de algebrización. Para ello trabajaremos con el *sistema de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia*. En dicho sistema pueden plantearse inicialmente problemas «aritméticos» resolubles mediante la ejecución de un PCA en forma retórica y el patrón de análisis-síntesis. Estos problemas forman parte de un sistema *S* mucho más amplio que definimos como aquella OM que incluye los problemas aritméticos en el sentido definido anteriormente y la posibilidad de ejecutar PCA de forma retórica. Veamos un ejemplo concreto:

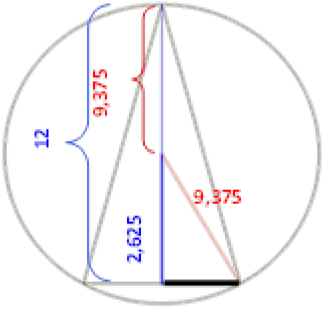


Figura 1. Triángulo isósceles inscrito en una circunferencia

P_0: *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio* 6 *cm. Si la altura relativa al lado desigual del triángulo mide* 9 *cm, ¿cuánto vale el área del triángulo?*

La resolución aritmética (verbal) apoyada en la figura 1 sería la siguiente: si restamos el radio a la longitud de la altura relativa al lado desigual, obtenemos un segmento de 2,625 cm, como muestra la figura; utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que la mitad del lado desigual del triángulo es $\sqrt{9{,}375^2 - (2{,}625)^2}$, operando obtenemos 9 cm; el área del triángulo se obtiene de multiplicar la longitud de la base ($9 \times 2 = 18$) por la altura (12) y dividirla entre dos; obtenemos por lo tanto que el área del triángulo es de 108 cm^2.

En este sistema *S* se pueden plantear una serie de cuestiones de naturaleza tecnológica relativas a *por qué* se obtiene el tipo de resultado que se obtiene, a la *interpretación* de estos resultados, al alcance o *dominio de validez* de las técnicas y a la delimitación de los tipos de problemas que se resuelven con un mismo PCA, a las *condiciones* que se requieren (en términos de relaciones entre los datos) para que un tipo de problemas tenga solución o esta sea única, a la *estructura* del conjunto de las soluciones de los diferentes tipos de problemas, etc. Este cuestionamiento provoca la *necesidad de ampliar el sistema inicial mediante progresivas modelizaciones* que expondremos a continuación.

3.1. Primera etapa del proceso de algebrización

Identificamos la *primera etapa del proceso de algebrización* con el momento en que es necesario considerar el PCA como un todo, traducir la *formulación retórica* del PCA a una *formulación escrita* (simbólica) y manipularlo globalmente. En esta etapa aparece la necesidad de utilizar nuevas técnicas, esencialmente de «simplificación», para resolver los nuevos problemas [2]. El paso de la formulación retórica de un PCA a su formulación simbólica pone en juego la necesidad de escribir la secuencia de operaciones en una única línea, explicitando su estructura de forma global y, por lo tanto, tomando en consideración la jerarquía de las operaciones, las reglas del uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre ellas (elementos tecnológicos).

Denotaremos por M_1 la OM en la que se lleva a cabo esta primera etapa del proceso de algebrización y que constituye una primera ampliación de *S*, lo que resume la figura 2.

2. Por «simplificar un PCA» se entiende la operación de transformarlo en otro *equivalente* que, en cierto sentido, sea más «sencillo» o, mejor, más «adaptado» o «adecuado» para utilizarlo en una actividad matemática concreta. Para ello, se introducen algunos *símbolos* que permiten identificar y explicitar los argumentos que juegan el papel de parámetros del PCA y cuyo ámbito numérico debe delimitarse.

S: OM en torno a los problemas aritméticos + PCA (en forma retórica) + patrón análisis-síntesis

M_2: Problemas que requieren la manipulación de PCA escritos $P(x, a_1,\ldots, a_k)$ + técnicas de manipulación

Figura 2. Primera etapa del proceso de algebrización

Veamos como una pequeña modificación de los datos [3] del problema P_0 da lugar a una tarea que se sitúa en M_1 porque requiere de la explicitación del proceso de resolución:

> **P_1:** *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia y la altura relativa al lado desigual del triángulo mide* 3/2 *del radio de la circunferencia. ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita?*

En el ejemplo anterior, al conocer la longitud del radio (9,375) y la altura relativa al lado desigual (12) podíamos ejecutar el programa de cálculo siguiente:

$$A = \mathrm{PCA}(9{,}375;\, 12) = \frac{12\cdot\left(2\cdot\sqrt{(9{,}375)^2-(12-9{,}375)^2}\right)}{2}.$$

En P_0 los argumentos de los que depende el PCA son datos numéricos conocidos y A es la incógnita, es decir, el área del triángulo que estamos buscando. En P_1 los datos no son numéricos y, por lo tanto, no es posible la resolución aritmética anterior. Pero se puede utilizar la escritura en línea del PCA utilizando letras en lugar de las longitudes dadas y, por medio de la simplificación, responder a la cuestión planteada:

$$A = \mathrm{PCA}(R;\, 3\cdot R/2) = \frac{\frac{3\cdot R}{2}\left(2\cdot\sqrt{(R)^2-\left(\frac{3\cdot R}{2}-R\right)^2}\right)}{2} \equiv \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot R^2}{4}.$$

El área del triángulo es el valor del radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado multiplicado por $3\sqrt{3}$ y dividido entre cuatro.

En P_0 los argumentos de los que depende el PCA son datos numéricos conocidos y el área del triángulo buscada es también una cantidad de magnitud. En P_1 los datos no son numéricos (son relaciones) y, además, la incógnita tampoco es numérica (es otra relación), por lo que no es

3. La elección de los datos a modificar es relativamente arbitraria y, evidentemente, no es única.

posible una resolución aritmética. Esta es, esencialmente, la caracterización de los problemas que se sitúan en la *primera etapa del proceso de algebrización*.

Es en esta primera etapa donde se sitúan, también, aquellos problemas cuya resolución requiere *resolver una ecuación*[4] tal que *la incógnita aparece únicamente en uno de los miembros.* Denotamos por M_1' a la OM que contiene este tipo de problemas y que está incluida en M_1 ya que los problemas que forman parte de M_1' se obtienen a partir de los problemas de M_1 sin más que dar un valor numérico concreto a una de las variables que en M_1 hacía el papel de parámetro o incógnita. Proponemos a continuación un problema P_1' de M_1' obtenido a partir de P_1:

> **P_1':** *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia, la altura relativa al lado desigual del triángulo mide* 3/2 *del radio de la circunferencia y el área del triángulo es de* $3\sqrt{3}\ cm^2$. *¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita?*
>
> Solución: Partimos del PCA escrito y simplificado del problema P_1:
>
> $$A = \text{PCA}(R;\ 3\cdot R/2) = \frac{\frac{3\cdot R}{2}\left(2\cdot\sqrt{(R)^2-\left(\frac{3\cdot R}{2}-R\right)^2}\right)}{2} \equiv \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot R^2}{4}.$$
>
> Sabiendo que $A = 3\sqrt{3}$, se puede aplicar la técnica inversa a la ecuación anterior y obtener el valor del radio $R = 2$.

Queremos remarcar que en los problemas de M_1' la ecuación se construye utilizando únicamente técnicas de *simplificación* (no hay que utilizar técnicas de *cancelación* puesto que la incógnita aparece únicamente en uno de los dos miembros de la ecuación). En el caso particular de los *problemas lineales*, la simplificación siempre culmina en una *forma canónica* que hace innecesarias las técnicas ecuacionales propiamente dichas, puesto que la ecuación resultante después de la simplificación puede resolverse utilizando el patrón de análisis-síntesis. De todos modos, también podemos encontrar problemas *no lineales* sencillos situados en M_1' cuya resolución no requiere de técnicas ecuacionales (véase el ejemplo anterior P_1').

4. El significado de la noción de *ecuación* es el usual y puede expresarse como la igualdad entre dos programas de cálculo aritmético que contienen (al menos uno de ellos) una o más incógnitas.

3.2. Segunda etapa del proceso de algebrización

El paso a la *segunda etapa del proceso de algebrización* se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que contienen los dos mismos argumentos no numéricos (x_1, x_2):

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Q}(x_1, x_2, b_1, \ldots, b_s).$$

Se requiere de nuevas técnicas, las *técnicas de cancelación*, puesto que hay que manipular una igualdad de dos PCA como un nuevo objeto matemático (ecuación). El uso de dichas técnicas tiene por objetivo obtener *ecuaciones equivalentes* y no solo PCA equivalentes como pasaba con las técnicas de simplificación características de M_1. Aparece así un segundo modelo M_2 que, además de aumentar el nivel de algebrización, amplía y completa M_1, como resume la figura 3:

$\mathbf{M_1}$: Problemas que requieren la manipulación de PCA del tipo $\mathrm{P}(x, a_1, \ldots, a_k)$

→

$\mathbf{M_2}$: Problemas que requieren una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos + técnicas de cancelación

Figura 3. Segunda etapa del proceso de algebrización

Un ejemplo de problema en M_2 podría ser el siguiente:

$\mathbf{P_2}$: *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios R_1 y R_2. Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en* 1 *cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área, ¿qué relación hay en cada caso entre la altura del triángulo y el radio de la circunferencia circunscrita?*

Si denominamos por h_1, h_2 a las alturas, R_1, R_2 a los radios y A_1, A_2 a las áreas respectivamente, podemos expresar ambas áreas mediante los siguientes PCA:

$$A_1 = \mathrm{PCA}(R_1, h_1) = h_1\cdot\sqrt{(R_1)^2 - (h_1 - R_1)^2}$$

$$A_2 = \mathrm{PCA}(R_2, h_2) = h_2\cdot\sqrt{(R_2)^2 - (h_2 - R_2)^2}$$

Utilizando las relaciones dadas por el enunciado, $h_2 = 2h_1$ y $R_2 = R_1 + 1$, e igualando los dos PCA, obtenemos:

$$h_1\cdot\sqrt{(R_1)^2 - (h_1 - R_1)^2} = 2\cdot h_1\cdot\sqrt{(R_1 + 1)^2 - (2\cdot h_1 - (R_1 + 1))^2}$$

que equivale a $14R_1h_1 - 15h_1{}^2 + 16h_1 = 0$. Así para el primer triángulo tenemos que la relación entre la altura y el radio es $h_1 = \dfrac{14 \cdot R_1 + 16}{15}$ y la relación para el segundo triángulo es $h_2 = \dfrac{28 \cdot R_2 + 4}{15}$.

A continuación describiremos una OM incluida en M_2 que tiene una presencia muy destacada en la matemática escolar española. La denominaremos M_2' y tiene la misma relación con M_2 que M_1' tenía con M_1. Se trata de la OM que contiene las tareas resolubles mediante *ecuaciones con una incógnita*. Veamos un ejemplo de tarea matemática de P_2' en $M_2' \subset M_2$:

P_2': *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios R_1 y R_2. Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en* 1 *cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área y la altura del primer triángulo es de* 2 *cm. ¿cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo?*

Utilizaremos aquí la relación $14R_1h_1 - 15h_1^2 + 16h_1 = 0$ encontrada anteriormente. Si substituimos el valor de h_1 por 2 y llevamos a cabo la resolución de la ecuación de primer grado obtenemos una única solución: $R_1 = 1$ cm.

Queremos apuntar que existe el peligro de identificar *la razón de ser* del álgebra escolar con la resolución de los problemas situados en M_2'. En nuestro MER la OM en la que tiene lugar la segunda etapa del proceso de algebrización, M_2, contiene ampliamente a M_2' (puesto que los problemas de M_2' se obtienen sin más que dar un valor numérico concreto a una de las variables que en M_2 hacia el papel de parámetro o incógnita) y, además, la razón de ser del álgebra escolar no se manifiesta plenamente hasta culminar en la tercera etapa del proceso de algebrización. Postulamos que el modelo dominante del álgebra escolar como *aritmética generalizada* y la correspondiente obligación de que el resultado de una tarea sea numérico es un factor que puede haber llevado a considerar que las tareas de M_2' (la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones con una incógnita) constituyen la culminación del álgebra escolar.

3.3. Tercera etapa del proceso de algebrización

La *tercera etapa del proceso de algebrización* corresponde al momento en que se requiere una fuerte *generalización* del cálculo ecuacional debido a la necesidad de no limitar el número de variables y de no hacer ningún tipo de distinción entre *incógnitas* y *parámetros*. El tipo de cuestiones que provoca esta ampliación tiene relación con el estudio de la variación conjunta de dos o más variables y su repercusión sobre la variación del PCA. Las técnicas para abordar estas cuestiones en el ámbito puramente algebraico son bastante limitadas. Son eficaces en casos sencillos: por ejemplo, si sabemos que $R = x{\cdot}y/z$, podemos afirmar que el valor de R aumenta cuando x o y aumentan y que disminuye cuando z aumenta. Pero cuando el PCA es más complejo aparecen «fórmulas» mucho más difíciles de analizar si solo disponemos de técnicas algebraicas. Veamos dos ejemplos:

> **P$_3$:** *¿Se puede determinar un triángulo isósceles por su área A y la longitud del lado igual c? ¿Cuánto mide el radio R de la circunferencia donde se inscribe el triángulo? ¿Cómo depende R de la variación conjunta de los lados b y c?*
>
> Si denominamos h a la altura y c a la magnitud de los lados iguales, utilizando el teorema de Pitágoras tenemos que la longitud del lado desigual del triángulo es $b = 2\sqrt{c^2 - h^2}$. El área del triángulo viene entonces dada por $A = \mathrm{PCA}(c, h) = \left(h{\cdot}2\sqrt{c^2 - h^2}\right) / 2$. Despejando h de la ecuación, obtenemos el valor de la altura en función de los parámetros c y A:
>
> $$H = \pm\sqrt{\frac{c^2 \pm\sqrt{c^4 - 4{\cdot}A^2}}{2}}.$$

Hemos determinado las dimensiones del triángulo (h y b) en función de los datos iniciales y podemos concluir que: si el valor de A es mayor que $c^2/2$ no existe ningún triángulo que verifique las condiciones del enunciado; si el valor de A es igual que $c^2/2$ existe un único triángulo que cumpla las condiciones requeridas; y, finalmente, si A es menor que $c^2/2$ existen dos triángulos con área A y lados iguales c.

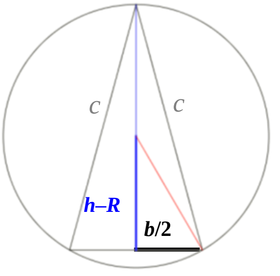


Figura 4. Triángulo isósceles dada el área A y lado igual c

Veamos ahora cual es la relación con el valor de R. De la fórmula del área deducimos que $b = 2A/h$. Observando la figura 4 y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la igualdad siguiente [5]:

$$(h - R)^2 + (b/2)^2 = (h - R)^2 + (A/h)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Deducimos entonces que $R = \dfrac{h^4 + A^2}{2h^3}$.

Para el caso de A menor que $c^2/2$, en el que existen dos triángulos, los radios de las circunferencias respectivas son $\dfrac{h^4 + A^2}{\sqrt{2}\cdot h\cdot\sqrt{A^2 + h^4 + |A^2 - h^4|}}$ y $\dfrac{h^4 + A^2}{\sqrt{2}\cdot h\cdot\sqrt{A^2 + h^4 - |A^2 - h^4|}}$. El valor de los dos radios solo es igual cuando $A = c^2/2$, que corresponde al caso en que únicamente existe un triángulo.

Para estudiar cómo depende R de la variación conjunta de b y c, podemos partir de la igualdad (*) combinada con $h^2 + (b/2)^2 = c^2$ para obtener la expresión: $R = \dfrac{c^2}{\sqrt{4c^2 - b^2}}$. Deducimos que siempre que $2c > b$, tendremos $R > 0$ y, por lo tanto, existirá una única circunferencia circunscrita al triángulo.

En la resolución que se ha iniciado con el problema P_0 hasta su desarrollo que ha desembocado en el problema P_3 se ha llevado a cabo la ejemplificación de un proceso completo de modelización algebraica que permite dar información acerca de la estructura misma del tipo de problemas que emergen del sistema considerado. Es en esta tercera etapa, cuyo ámbito de trabajo es una OM más amplia y completa que M_2 y que denotaremos por M_3, donde se encuentran las *fórmulas algebraicas* y donde consi-

5. En el caso de que $h < R$, la igualdad sería $(R - h)^2 + (b/2)^2 = R^2$ y el razonamiento no sufriría ningún cambio.

deramos que culmina el proceso de algebrización elemental, como se resume en la figura 5.

M_2: Problemas que requieren el uso de una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos + técnicas de cancelación

→

M_3: Problemas que requieren el uso de una *fórmula algebraica* + técnicas para estudiar cómo depende cada variable de la fórmula de las restantes

Figura 5. Tercera etapa del proceso de algebrización

4. El desarrollo del instrumento algebraico: la modelización algebraico-funcional

Vamos a describir a continuación la modelización algebraico-funcional mostrando en qué sentido se puede considerar como un desarrollo de la modelización algebraica. Denominamos *primer nivel de modelización algebraico-funcional* de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan mediante *funciones aisladas de una única variable* y las correspondientes *ecuaciones* (*e inecuaciones*) *asociadas*. El paso al primer nivel de modelización algebraico-funcional es provocado por tipos de cuestiones que hacen referencia a la variación de una magnitud del sistema en función de otra. Dichas cuestiones pueden surgir del trabajo en M_2 (segunda etapa del proceso de algebrización) pero no pueden ser completamente resolubles ni en M_2 ni en M_3. Requieren el uso de nuevas técnicas (que llamaremos «funcionales» y «gráficas») y que se sitúan en una nueva ampliación de M_2 que designaremos en adelante por $OM_{f(x)}$, como resume la figura 6.

M_2: Problemas que requieren el uso de una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos + técnicas de cancelación

→

$OM_{f(x)}$: Problemas que requieren el uso de funciones aisladas de una única variable + técnicas gráficas + cálculo diferencial en una variable

Figura 6. Primer nivel del proceso de modelización algebraico-funcional

El tipo de tareas matemáticas que forman parte de $OM_{f(x)}$ son las requeridas para estudiar *funciones aisladas*, es decir, para descubrir las relaciones internas entre los elementos de una misma función y para analizar su comportamiento global. Siguiendo con el estudio del sistema de los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, podemos tomar el siguiente ejemplo de problema situado en $OM_{f(x)}$:

P_4: *Un triángulo isósceles está inscrito en circunferencias de radio* $R = 2$ *cm. ¿Qué dimensiones tendrá el triángulo de área máxima? ¿Cuántos triángulos inscritos en la circunferencia de radio* 2 *existen que tengan una área A dada?*

Para determinar el triángulo de área máxima inscrito en la circunferencia, trabajaremos con el modelo que hemos obtenido en el problema P_2:

$$A = \text{PCA}(2, h) = (h\cdot(2\cdot\sqrt{2^2 - (h-2)^2}\,))/2 \equiv h\cdot\sqrt{4h - h^2}.$$

R es un parámetro fijado por el enunciado; por lo tanto, podemos pensar que el área A es una función que depende de h:

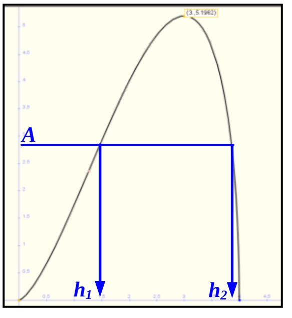


Figura 7. Relación entre el área A del triángulo y su altura h

$A(h) = h\cdot\sqrt{4h - h^2}$. Usando una técnica gráfica de la figura 7 podemos determinar de forma aproximada [6] el valor máximo del área, que se alcanza cuando $h = 3$ (y $b = 2\sqrt{3}$) y es $A(3) = 6\sqrt{3}$. Observamos que el valor del lado igual c, que se obtiene de la igualdad $h^2 + (b/2)^2 = c^2$, mide $2\sqrt{3}$ cm, es decir, coincide con la base del triángulo; así el triángulo de área máxima es un triángulo equilátero.

La gráfica de la función $A(h)$ también nos permite responder a la segunda cuestión planteada. Para un valor A fijado del área, menor que el valor del área máxima, existen dos posibles alturas de triángulos (h_1 y h_2) como se

6. También podría usarse la técnica de derivación y calcular $A'(h)$ e igualar la función resultado a cero.

indica en la figura de la derecha, es decir, existen dos triángulos diferentes inscritos en la circunferencia de radio 2 con la misma área.[7]

Denominamos *segundo nivel de modelización algebraico-funcional* de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan precisamente mediante familias de funciones de una variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) paramétricas asociadas. En este segundo nivel de modelización se distingue entre «parámetros» y «variables» ya que se trabaja con familias de funciones de una variable, pero no con funciones de dos variables. Denominaremos $\mathrm{OM}_{f_p(x)}$ a la OM que amplía $\mathrm{OM}_{f(x)}$ para contener estos nuevos problemas:

$\mathrm{OM}_{f(x)}$: Problemas que requieren el uso de funciones aisladas de una única variable + técnicas gráficas + cálculo diferencial en una variable

$\mathrm{OM}_{f_p(x)}$: Problemas que requieren el uso de una familia de funciones $f_p(x, y) = 0$, donde una de las variables puede aislarse $y = F_p(x)$ + teoría de familias de funciones de una variable

Figura 8. Segundo nivel del proceso de modelización algebraico-funcional

Un ejemplo de problema que se situaría en este segundo nivel es:

P_5: *¿El perímetro y el área de un triángulo isósceles determinan sus dimensiones? En caso afirmativo, ¿cuál es el radio R de la circunferencia circunscrita?*

Para dar respuesta a esta cuestión se requiere explicitar la ecuación del problema en función de los parámetros A (área) y P (perímetro). De la definición de perímetro obtenemos la relación $c = (P - b)/2$. Utilizando dos relaciones usadas en los problemas anteriores ($A = hb/2$ y $h^2 + (b/2)^2 = c^2$), llegamos a $- 2Pb + Pb^2 - 16A^2 = 0$. No parece sencillo, a partir de aquí, estudiar con técnicas algebraicas cómo depende b de los valores de A y P, situación que motiva el uso de estrategias funcionales

7. Se podría llegar a la misma conclusión a partir del estudio del signo de la derivada de la función y usando algunos de los teoremas de continuidad de funciones de una variable real. Con el uso de técnicas de aproximación numéricas para el cálculo de raíces (método de bisección, de Newton-Raphson, etc.) es posible calcular h_1 y h_2 para cada valor concreto de $A > 0$.

para abordar el problema planteado, utilizando la familia de funciones $f_A(P, b) = -2Pb^3 + P^2b^2 - 16A^2$. Ahora el problema se traduce al estudio de cuántas veces interseca nuestra función con el eje de abscisas, problema que puede resolverse calculando la derivada parcial de f respecto de la variable b:

$$-6Pb^2 + 2P^2b.$$

Igualando esta derivada a cero, deducimos que en $b = 0$ se sitúa el mínimo relativo de la función y, por lo tanto, nunca existirán tres triángulos isósceles diferentes con el mismo perímetro y área, ya que existe siempre un punto de corte negativo con el eje de abscisas. En $b = P/3$ hay un máximo relativo para el que se tiene: $f_A(P, P/3) = P^4/27 - 16A^2$. Si $f_A(P, P/3) = P^4/27 - 16A^2 = 0$, es decir, si $A = \dfrac{P^2}{12\sqrt{3}}$, existe un único triángulo isósceles (que será también equilátero) con área A y perímetro P. Si $A > \dfrac{P^2}{12\cdot\sqrt{3}}$ no existe ningún triangulo isósceles y si $A < \dfrac{P^2}{12\cdot\sqrt{3}}$ existen dos triángulos isósceles.

Denominamos *tercer nivel de modelización algebraico-funcional* de un sistema, el que se materializa en modelos que se expresan mediante *familias de funciones de dos o más variables* y las correspondientes *fórmulas asociadas*. En este tercer nivel de modelización el papel de los parámetros y de las variables es intercambiable. Se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función. Esta tarea puede plantearse en $\mathrm{OM}_{f_p(x)}$ aunque, como ha pasado en los casos anteriores, no existen técnicas en esta OM que permitan su completa resolución.

Denominaremos $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ la OM que incluye las nuevas técnicas que se requieren para resolver estos nuevos tipos de problemas:

$\mathrm{OM}_{f_p(x)}$: Problemas que requieren el uso de una familia de funciones $f_p(x, y) = 0$ + cálculo de funciones de una variable

→

$\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$: Problemas que requieren el uso de funciones de dos o más variables + cálculo diferencial de funciones de varias variables

Figura 9. Tercer nivel del proceso de modelización algebraico-funcional

Para finalizar veamos a continuación el tercer nivel de modelización algebraico-funcional plasmado en nuestro ejemplo:

> **P_6:** *Dado un triángulo isósceles de área A inscrito en una circunferencia de radio R, estudiar la variación del perímetro en función de A y R.*
>
> Sea b el lado desigual del triángulo, h la altura relativa a este lado y c el lado igual. Despejando b de la fórmula del área de un triángulo tenemos que $b = 2A/h$ y, por lo tanto, el perímetro viene dado por $P = 2c + b = 2c + 2A/h$. Basándonos en la resolución del problema **P_3**, se obtienen las dos igualdades siguientes:
>
> $$(h - R)^2 + (b/2)^2 = R^2 \quad \text{y} \quad h^2 + (b/2)^2 = c^2,$$
>
> de donde se deduce que $c = \sqrt{2Rh}$.
>
> Podemos expresar el perímetro como un programa de cálculo con varios parámetros:
>
> $$\mathrm{P}(R, A, h) = 2\sqrt{2Rh} + A/h,$$
>
> donde $0 \le A \le 3\sqrt{3}\,R^2/2$ y $A/R \le h \le 2R$, y estudiar la variación de esta función con las técnicas de cálculo de varias variables.

Si retomamos el problema P_3 en genérico, se puede calcular que el valor del área máxima se obtiene cuando $h = 3R/2$; por lo tanto, cuando A sea un valor menor que el valor del área máxima, que corresponde a $3\sqrt{3}\,R^2/2$, las alturas de los dos triángulos solución h_1, h_2 verificarán la relación siguiente: $h_1 < 3R/2 < h_2$. Así para el triángulo de altura h_2 siempre se verificará $R < (3R/2)^3 < h_2^3/2$; por lo tanto, una variación de una unidad de R provocará siempre mayor variación de la longitud del perímetro del triángulo.

> En cambio, para el triángulo de h_1 no podemos dar una respuesta única, ya que dependerá del resultado numérico.

Como hemos visto, la línea de evolución del proceso de estudio nos ha llevado a la construcción de funciones de varias variables. Es importante remarcar que *muchos* de los problemas que se sitúan en $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$, esto es, en el tercer nivel de modelización algebraico-funcional, pueden expresarse mediante un PCA similar al de los problemas de la tercera etapa, M_3, del proceso de modelización algebraica, esto es, mediante un PCA del tipo:

$$\mathrm{PCA}(x_1,\ldots, x_m, a_1,\ldots, a_n) = 0.$$

Pero, considerada como organización matemática, $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ contiene y completa ampliamente a M_3 por dos motivos principales. En primer lugar, porque $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ incluye el trabajo con funciones de varias variables que no sean «algebraicas» (por ejemplo aquellas definidas mediante la composición de funciones logarítmicas, exponenciales, circulares, etc.) y, en segundo lugar, aunque nos restrinjamos dentro de $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ a problemas definidos mediante funciones «algebraicas». No hay que olvidar que $\mathrm{OM}_{f(x_1,\ldots,x_n)}$ contiene tareas, técnicas matemáticas y elementos tecnológico-teóricos que no existen en M_3 y, por lo tanto, permite plantear (y responder) cuestiones matemáticas no abordables con los instrumentos matemáticos de M_3. En términos generales podríamos decir que, mientras las tareas propias de la modelización algebraica se caracterizan por el hecho de que los datos son *relaciones algebraicas* y la incógnita es también una *relación algebraica*, las tareas específicas de la modelización funcional se caracterizan por incluir el estudio de la *variación continua* de una variable respecto de otra u otras, lo que requiere el uso de técnicas funcionales y, en particular, de las técnicas y el discurso tecnológico-teórico que proporciona el cálculo diferencial.

Acabamos de describir una herramienta que debería facilitar y organizar el diseño y análisis posterior de diferentes propuestas didácticas integradas para llevar a cabo la génesis didáctica y el desarrollo del álgebra como instrumento de modelización en la enseñanza secundaria. Por otra parte, ya hemos realizado algunas experimentaciones situadas en la primera y segunda etapa del proceso de algebrización con alumnos de primer ciclo de la ESO y también en el primer y segundo nivel de modelización algebraico-funcional con alumnos de segundo ciclo de la ESO y bachillerato. Creemos que el cambio de visión sobre el álgebra escolar que proponemos será el punto de partida para dar solución a algunos fenómenos didácticos ya mencionados anteriormente y articular algunas de las organizaciones matemáticas que aparecen (o podrían aparecer) en Secundaria. Pero deberemos esperar al cuarto congreso de la TAD para empezar a mostrar algunos resultados en esta línea de investigación.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14,* 125-133.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP 168* (pp. 239-263). París: APMEP.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática. 11*(1), 77-88.

Ruiz-Munzón, N. (2006). *Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y* *matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 677-702). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 649-669). Montpellier, Francia: IUFM.

Eje 4
La dialéctica de los media y los medios

Axe 4
La dialectique des médias et des milieux

Axis 4
The dialectic of media and milieus

Intégration des PER dans l'équipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale

Michèle Artaud
UMR P3 ADEF, Université de Provence (IUFM), France

Gisèle Cirade
UMR P3 ADEF et GRIDIFE, Univ. Toulouse 2 (IUFM), France

Michel Jullien
Université de Provence (IUFM), France

Abstract. The presence of the notion of study and research courses (SRC) in the training of mathematics teachers for the past six years at the IUFM in Aix-Marseille has caused that teachers develop praxeologies around SRC. By means of an appropriate dialectic of media and milieus, this communication is intended, on the one hand, to analyze those parts of praxeologies which show traces through several types of material (*possibilistic problems*); on the other hand, to highlight the conditions and constraints that hinder or promote the development of these praxeologies—both in theory and in practice—(*basic problematics*).

Resumen. La presencia del concepto de REI en la formación inicial de profesores de matemáticas, los últimos seis años al IUFM de Aix-Marsella, ha llevado a lo que estos profesores elaboran praxeologías en torno a este concepto. Esta comunicación tiene por objeto, por una dialéctica de los media y los medios conveniente, en primer lugar, analizar elementos de estas praxeologías que muestra las huellas a través de varios tipos de materiales (*problemática posibilista*); y en segundo lugar, de poner de relieve las condiciones y las restricciones que pesan sobre, o que favorecen, la elaboración de estas praxeologías —tanto en la teoría como en la práctica— (*problemática básica*).

Résumé. La présence de la notion de PER dans la formation initiale des professeurs de mathématiques, depuis maintenant six ans à l'IUFM d'Aix-Marseille, conduit à ce que ces professeurs élaborent des praxéologies autour de cette notion. Cette communication a pour objet, par une dialectique des médias et des milieux appropriée, d'une part, d'analyser des éléments de ces praxéologies dont on voit les traces à travers plusieurs types de matériels (*problématique possibiliste*) ; d'autre part, de mettre en évidence des conditions et des contraintes qui pèsent sur, ou qui favorisent, l'élaboration – au double plan théorique et pratique – de ces praxéologies (*problématique de base*).

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 769-794)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 4. *La dialéctica de los media y los medios*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Les PER et l'ingénierie didactique

Selon Yves Chevallard (1982), « poser le problème de l'ingénierie didactique c'est poser, en le rapportant au développement actuel et à venir de la didactique des mathématiques, le problème de l'action et des moyens de l'action sur le système d'enseignement ». Si l'on suit cette définition de l'ingénierie didactique, la question des conditions de la réception (adéquate) par les professeurs du dispositif des parcours d'étude et de recherche (PER) est un problème d'ingénierie didactique dès lors que la notion de PER est un produit de la recherche qui peut vivre dans le système d'enseignement parce qu'il permet au moins d'atténuer certaines difficultés qui y sont rencontrées : nous développerons ce point dans la troisième partie de cette communication.

On notera que ce produit de la recherche que l'on veut faire vivre dans les classes – rappelons que, actuellement, on œuvre principalement dans une perspective de connaissance finalisée par l'amélioration du système d'enseignement (Chevallard, 2011) –, n'est pas soigneusement élaboré dans le laboratoire puis importé, en peu d'exemplaires, dans le système d'enseignement : il est élaboré « au chevet du système », par « touches successives », et son élaboration, donc, s'accompagne d'une *clinique du système* à laquelle elle s'articule. En effet, l'élaboration par « touches successives » suppose que l'on recueille, de manière régulière et quasi systématique, des *matériels* [1] qui permettent d'analyser et d'évaluer les produits de l'ingénierie qui vivent dans le système d'enseignement de façon à pouvoir les développer. C'est ainsi que la formation des professeurs de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille a été pensée pour permettre cette clinique, les matériaux produits pour et par la formation (notes du séminaire de didactique, observations et analyses réalisées lors de visites, questions de la semaine, etc.) devenant des matériels pour la recherche (Cirade, 2006). C'est dans cette perspective que nous nous situons ici, en débutant donc l'étude de la question des

1. On utilisera *matériel* dans un sens analogue à celui proposé par Jean Laplanche et Jean-Bertrand Pontalis dans leur *Vocabulaire de la psychanalyse* (1967) : « Terme utilisé couramment en psychanalyse pour désigner l'ensemble des paroles et des comportements du patient en tant qu'ils constituent une sorte de matière première offerte aux interprétations et constructions » (p. 232).

conditions de la réception (adéquate) par les professeurs de la notion de PER en considérant des professeurs en formation initiale.

2. Problématique possibiliste : concevoir un PER

Nous nous placerons dans un premier temps dans le cadre de la *problématique possibiliste* telle qu'Yves Chevallard l'a présentée, par exemple, dans le cours qu'il a donné à la XV^{e} école d'été de didactique des mathématiques (Chevallard, 2011) ; autrement dit, étant donné un certain nombre de conditions et de contraintes auxquelles l'institution considérée est soumise – il s'agit ici des diverses promotions de PCL2 de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille [2] –, à quels systèmes praxéologiques relatifs à la notion de PER est-il possible que cette institution accède ? Nous examinerons les systèmes praxéologiques relatifs aux PER à travers le type de tâches, *T*, « Concevoir un PER », observé par l'intermédiaire du matériel constitué des mémoires professionnels que les élèves professeurs rédigent dans le cadre de leur formation : le travail d'étude et de recherche qu'ils réalisent s'appuie sur l'observation d'une séance et se compose, d'une part, d'une analyse et d'une évaluation de cette séance, d'autre part, d'un développement de l'un des points jugés négativement [3]. Le mémoire professionnel qui constituera notre pierre de touche est celui réalisé par trois élèves professeurs de la promotion 2008-2009 – Souad Benhadi, Sihame El Kaine et David Félix (2009) –, sur l'enseignement des fonctions en seconde. Voici ce que proposent les auteurs de ce mémoire lorsqu'ils présentent la structure de la séance qu'ils ont observée :

> Le premier épisode de durée très courte concerne l'entrée des élèves en classe et leur mise en place. Le deuxième épisode de 45 minutes consiste

2. Le sigle PLC2 signifie *professeurs de lycée et collège 2^{e} année* ; il désigne les professeurs en deuxième année de formation initiale à l'IUFM (institut universitaire de formation des maîtres).
3. Pour une présentation du mémoire, on peut consulter la présentation de la formation et de la validation des PLC2 de mathématiques (pp. 7-8), disponible sur Internet : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/pcl2/2009-2010_l/formation_2009_2010.pdf.

> en la recherche d'un problème donné/posé dans l'espace ordinaire. Cette activité a pour but d'introduire la notion de fonction.
> Le troisième épisode qui occupe les dix minutes restantes utilise les TICE, plus exactement la calculatrice, pour conjecturer une réponse à la question cherchée et donc, au passage, mettre en place des connaissances sur l'utilisation de la calculatrice. (pp. 14-15)

Partant de l'analyse et de l'évaluation de cette séance en classe de seconde, ils se proposent ainsi, pour développer la dynamique de l'étude qui leur paraît insuffisante dans la séance observée et, en particulier, améliorer le *topos* de l'élève, de mettre en place un PER dont la question génératrice, *Q*, serait « Comment optimiser une grandeur ? » :

> ... en ce qui concerne la notion de fonction étudiée ici, l'enseignant doit pouvoir montrer aux élèves son utilité en donnant une activité explicitant une de ses raisons d'être (optimiser une grandeur). (p. 30)

On notera que cette question génératrice avait été proposée dans la formation et que la conception d'un PER initié par cette question y avait été explorée sans toutefois aller jusqu'à mettre en forme un PER ou un argument de PER à ce propos. On voit donc ces élèves professeurs reprendre à leur compte la question génératrice et sa légitimation par le fait qu'elle motive l'étude de la notion de fonction.

Le développement proposé prend la forme d'un « guide de recherche du problème » – en fait, une suite de questions cruciales permettant d'aboutir à la solution –, assorti d'un « compte rendu fictif », qui est une des formes de développement présentes dans les notes du séminaire et que ces élèves professeurs ont choisi pour rendre compte de leur travail. Ils ont ainsi acquis le fait qu'il s'agit, pour concevoir un PER, de partir d'une question qui permette de générer une organisation mathématique au niveau du *secteur* et de la concrétiser par des situations problématiques, non découpées a priori mais dont la dynamique de l'étude est prévue par l'intermédiaire d'une arborescence de questions cruciales. Le choix du compte rendu fictif peut laisser penser qu'ils ont également intégré que la conception doit se penser en articulation avec la réalisation prévue du PER, mais le fait que l'arborescence de questions cruciales prenne ici la forme d'une suite nuance cette affirmation, l'enchaînement séquentiel des questions rigidifiant quelque peu la réalisation prévue (voir infra).

Les auteurs vont faire émerger la question *Q* de la situation problématique suivante :

> Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 160 mètres de longueur. Il veut délimiter une surface de baignade de forme rectangulaire. Comment peut-il disposer le cordon ? (p. 40)

Ainsi qu'on peut le constater, l'énoncé proposé à la classe ne pose pas d'emblée la question de la maximisation de l'aire de la baignade. Les auteurs prévoient de réaliser le moment de première rencontre avec le type de tâches enjeu de l'étude en faisant émerger la question au début de la séance fictive. Celle-ci commence ainsi :

> P demande quel est l'objectif dans cette activité.
>
> Un élève répond : « Trouver comment poser le cordon. »
>
> P acquiesce mais voudrait que l'élève aille un peu plus loin dans sa réponse et demande :
>
> **Question cruciale n° 1 :** « Quelles sont les contraintes qui s'imposent au maître nageur ? » (p. 40)

Un élève indique que « le cordon mesure 160 m de longueur » et qu'on « peut le disposer de plusieurs manières possibles », tandis qu'un autre rappelle qu'il faut que « la surface délimitée soit de forme rectangulaire ». Le professeur pose alors la question de la grandeur de l'aire de baignade : « D'accord, mais considérons en plus de tout ça que c'est un jour d'été et qu'il y a beaucoup de personnes sur la plage » avant de demander si l'on est « capable de trouver des rectangles correspondants à des surfaces de baignades possibles ». Il s'ensuit une phase d'échanges sur la position du cordon lors de laquelle la classe s'accorde sur le fait que « ça sert à rien de mettre du cordon devant, on en gaspille pour rien puisqu'il y a déjà le bord de la plage pour délimiter » ; deux cas sont ensuite proposés et un élève suggère de prendre « celle où il y a le plus de place pour nager », car « il y a beaucoup de monde ».

On remarquera d'abord, à propos de cet épisode du moment de première rencontre, qu'il n'y a pas de temps de travail en autonomie des élèves, le professeur travaillant en dialogue avec la classe. Ce trait se retrouve tout au long du compte rendu fictif (qui s'étend sur deux séances) et on ne trouvera que quatre épisodes où il est explicitement prévu que les élèves travaillent en autonomie. On soulignera aussi que la première question cruciale arrive trop tôt – ou du moins que sa formulation est trop précise – et qu'elle est amenée par le professeur sans que cela prenne appui sur le travail des élèves. Après la reformulation du problème posé, « Trouver comment poser le cordon », on aurait pu s'attendre à des questions du type « Est-ce qu'il y a d'autres propositions ? », « Comment peut-il s'y prendre ? » ou encore « Est-ce que le cordon peut être disposé n'importe comment ? » avant que la question des contraintes soit posée si les interrogations précédentes n'aboutissent pas. On peut penser à cet égard que la forme de diffusion choisie, le compte rendu fictif, a figé la suite de questions cruciales proposées, mais aussi que ces professeurs n'ont pas encore intégré dans leur équipement praxéologique le fait que l'ensemble de questions cruciales prévues devait être « large » et « à géométrie variable », de façon à pouvoir s'adapter à la concrétisation de l'étude et à ses aléas dans une classe donnée.

2.1. La structuration de l'étude prévue

L'étude du problème est prévue en deux étapes : une première étape qui permettra d'aboutir à la modélisation de l'aire de la zone de baignade en fonction de l'un de ses côtés ; une seconde qui partira de l'expression de l'aire pour en déterminer le maximum. Les élèves professeurs prévoient la réalisation de ces deux étapes en deux séances distinctes. La première séance voit la mise en forme (sous forme d'épisodes distincts) des bilans suivants :

> – On dit ainsi qu'on a défini une fonction, c'est-à-dire un procédé qui à x, la largeur du rectangle, associe l'aire de ce rectangle. On note pour montrer que l'aire dépend de x : $A(x) = 160x - 2x^2$.
>
> – La fonction A est définie sur l'intervalle [0 ; 80].
>
> – L'image par une fonction f d'un élément x est le réel qui lui est associé par cette fonction f.
>
> Les antécédents par la fonction f du nombre réel y sont les éléments dont y est l'image par f. (pp. 45-47)

Les auteurs prévoient alors des séances permettant la synthèse et le travail de l'organisation mathématique (OM) relativement aux notions étudiées. Ils introduisent ainsi une rupture dans la dynamique de l'étude, ce dont ils sont conscients puisque le compte rendu fictif de la première séance se termine par l'échange suivant :

> P. Maintenant qu'on a revu toutes ces notions, on va pouvoir les écrire dans la partie synthèse.
>
> E. Mais madame on n'a pas trouvé comment le maître nageur devait placer son cordon pour avoir la plus grande surface de baignade.
>
> P. Tu as raison, mais nous reprendrons cette activité plus tard.

La justification de cette rupture doit sans doute être cherchée dans des structures prégnantes de la profession qui se dessinent à travers les questions suivantes, issues de la formation des élèves professeurs de l'IUFM d'Aix-Marseille (AM) et de l'IUFM Midi-Pyrénées (MP) [4] :

- Lors d'une activité, peut-on l'entrecouper de synthèses ponctuelles (*écrites* dans la partie synthèse) ou doit-on terminer l'activité pour écrire la synthèse ? (2de & 1re ES option, MP, 2008-2009, semaine 2)
- La séance qui servira de référence pour le mémoire doit-elle uniquement contenir une AER ? (5^{e} & 4^{e}, MP, 2008-2009, semaine 7)
- Est-ce un défaut si, en analysant une activité, on s'aperçoit que le moment exploratoire survient après une suite de questions élémentaires mais longues à traiter, repoussant ce moment en fin de séance (ce qui laisse ensuite peu de place pour les autres moments) ? (5^{e} & 4^{e}, MP, 2008-2009, semaine 20)
- Dans une séance, a-t-on le temps de faire l'activité, d'écrire la synthèse au tableau et de résoudre ensemble un exercice d'application pour que les élèves aient ensuite tous les éléments nécessaires pour résoudre les exercices à faire à la maison ? (3^{e}, AM, 2009-2010, semaine 1)
- Comment bien répartir les différentes parties du cours (activités, synthèses, exercices) ? (5^{e} & 4^{e}, AM, 2009-2010, semaine 2)

---

4. Les questions présentées (chronologiquement) sont suivies de l'information codée suivante : classe(s) en responsabilité, IUFM, année de la formation, semaine dans l'année.

– Comment bien organiser une séance de 55 minutes ? Quelle part de temps consacrer à l’AER ? À la synthèse ? Aux exercices d’application ? (4^e & 3^e, AM, 2009-2010, semaine 2)
– Comment prévoir les différents temps d’enseignement pour organiser sa séance ? (2^{de}, MP, 2009-2010, semaine 2)

On voit ainsi apparaître que les éléments développés par la formation se heurtent à une norme de la profession : la synthèse intervient « tout de suite » après l’activité et de préférence pendant la même heure. En dehors du problème de gestion du temps didactique que cela introduit en contraignant par exemple une AER à durer « moins d’une heure », cela nuit au travail même de synthèse, comme Michèle Artaud et Michel Jullien (2009, 2010) l’ont mis en évidence par ailleurs ; déjà, au niveau thématique, cela gêne la mise en place de synthèses avec une institutionnalisation d’organisations mathématiques locales (OML) diffractées, peu amalgamées ; mais on le voit davantage encore au niveau du secteur, voire du domaine, les synthèses de ce niveau étant généralement absentes.

On notera à cet égard que l’OM que les élèves professeurs veulent faire émerger est, relativement au programme de seconde, une OML, le principal type de tâches identifié durant les séances, déterminer le maximum d’une fonction, *f*, sur un intervalle, *I*, s’accomplissant suivant une technique que l’on peut analyser ainsi :

τ_{max}^{graf}. Représenter graphiquement la fonction *f* sur l’intervalle *I* ; lire l’ordonnée du point le plus haut sur la représentation graphique ; le vérifier, lorsque l’on a l’expression algébrique de *f*, avec une table de valeurs [5].

Cette technique repose principalement sur la définition du maximum d’une fonction et de sa courbe représentative.

Cette OML devrait venir s’amalgamer à d’autres pour créer une organisation mathématique régionale (OMR) dans laquelle la technique τ

5. Dans le compte rendu fictif proposé par les auteurs du mémoire, la lecture graphique de la valeur du maximum est considérée comme transparente, alors que dans le cas considéré elle nécessite un travail non négligeable, notamment dans le choix des fenêtres graphiques. On notera aussi qu’ils n’ont pas proposé d’utiliser la fonction « maximum » du module graphique de la calculatrice, ce qui aurait permis d’obtenir le résultat cherché.

viendrait s'intégrer comme étape expérimentale pour certaines fonctions au sein d'une technique comme la suivante, τ_{max} :

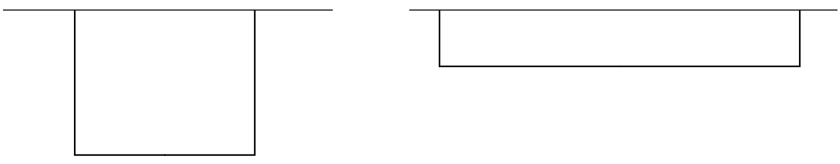
1) Si la fonction est homographique, du second degré voire trigonométrique,
   a) τ_{max}^{graf} ;
   b) déduire de la théorie fonctionnelle disponible la valeur du maximum identifié.
2) Sinon, τ_{max}^{graf}.

Cet ingrédient de la conception d'un PER, qui relève de la gestion d'un temps didactique « à plus long terme », n'est à l'évidence pas maîtrisé encore par les élèves professeurs qui ne le mentionnent pas, même comme horizon : on ne peut cependant pas en déduire qu'ils l'ignorent puisque l'ambition du mémoire professionnel est « limitée » à l'amélioration de la séance observée sur un aspect jugé négativement – il ne s'agit en aucun cas de développer un PER. Nous nous centrerons dans la suite sur ce qui est au cœur du travail de développement proposé dans le mémoire : le moment exploratoire et son articulation avec le moment technologico-théorique.

2.2. Le moment exploratoire et son articulation avec le moment technologico-théorique

Comme nous l'avons déjà signalé, le compte rendu fictif débute par un épisode de dévolution de la tâche problématique, qui va permettre de faire rencontrer le type de tâches enjeu de l'étude : maximiser l'aire d'un système. L'exploration de ce type de tâches constitue l'essentiel de la première séance prévue, et permet d'aboutir à la mise en évidence d'un premier embryon de technique : il s'agit d'exprimer cette grandeur, l'aire, en fonction d'une autre grandeur, exogène, attachée au système. On y trouve aussi un début de constitution de l'environnement technologico-théorique (les notions de fonction et d'intervalle de définition) ; nous y reviendrons. Ce moment exploratoire se poursuit dans la « deuxième » séance développée dans le mémoire, qui voit la constitution de la technique tandis que le moment technologico-théorique y est, quant à lui, fort peu développé.

On examinera d'abord ci-après le début du travail exploratoire, que l'on peut considérer inauguré par la deuxième question cruciale envisagée : « Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ? » (p. 41). On l’a vu plus haut, ce moment exploratoire débute par un épisode expérimental qui aboutit d’abord à un premier modèle géométrico-numérique de la situation proposée, sous la forme des deux spécimens suivants (figure 1) :



50 + 60 + 50 = 160 20 + 120 + 20 = 160

Figure 1. Un premier modèle géométrico-numérique

Les élèves professeurs enchaînent alors assez rapidement les troisième, quatrième, cinquième, sixième et septième questions cruciales.

Bilan :	*Rectangle* 1	*largeur* = 50 *m*	*longueur* = 60 *m*
	Rectangle 2	*largeur* = 20 *m*	*longueur* = 120 *m*

Question cruciale n° 3 : Parmi les propositions précédentes comment le maître nageur va-t-il alors choisir de poser le cordon ?

E : Comme il y a beaucoup de monde, on prend celle où il y a le plus de place pour nager.

E′ : Mais c’est le même cordon toutes les surfaces de baignade qu’on fera auront la même aire.

E″ : Mais non !

P : On a qu’à vérifier avec les deux propositions qui sont au tableau.

Question cruciale n° 4 : Quelle est l’aire des deux rectangles au tableau ?

Un élève va au tableau pour rédiger la réponse :

Rectangle 1 : 50 × 60 = 3000 L’aire est de 3000 m^2

Rectangle 2 : 120 × 20 = 2400 L’aire est de 2400 m^2

E : Donc même si on a le même cordon, la surface de baignade qu’on délimite n’est pas forcément la même.

Bilan : L’aire du rectangle 1 *est de* 3000 *m*^{2} *et celle du rectangle* 2 *est de* 2400 *m*^{2}. *L’aire varie.*

Question cruciale n° 5 : De quoi dépend l'aire ?

E : De la largeur et la longueur du rectangle.

P : Oui, et alors le maître nageur on lui conseille quelle proposition ?

E : Ben la première parce que l'aire est plus grande.

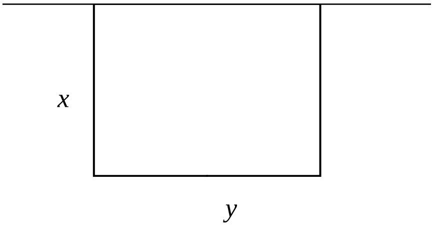
P : Et on peut trouver mieux, c'est à dire un plus grande surface de baignade avec le même cordon ?

E : Ben sûrement.

Question cruciale n° 6 : Comment on pourrait faire pour trouver la meilleure proposition ?

E : On calcule dans le cas général.

E : Comme l'aire dépend de la largeur et de la longueur, on pose x la largeur du rectangle et y sa longueur.



Bilan : Posons x la largeur du rectangle et y sa longueur.

Question cruciale n° 7 : Comment mettre en équation les données du problème ? (pp. 42-43)

Rien ne justifie, du point de vue de l'expérimentation, la limitation à deux exemples de rectangle, tout au contraire : il s'agit ici d'obtenir un rectangle d'aire maximale et on peut d'abord essayer de faire davantage fonctionner le modèle précédent. On pourrait par exemple obtenir assez vite sans doute les égalités complémentaires suivantes et les valeurs des aires correspondantes[6] :

10 m + 140 m + 10 m = 160 m ; aire = 1400 m^2 // 30 m + 100 m + 30 m = 160 m ; aire = 3000 m^2 // 40 m + 80 m + 40 m = 160 m ; aire = 3200 m^2 // 60 m + 40 m + 60 m = 160 m ; aire = 2400 m^2 // 70 m + 20 m + 70 m = 160 m ; aire = 1400 m^2.

6. Nous avons systématiquement indiqué toutes les unités, alors qu'elles ne figurent pas toujours dans le compte rendu fictif proposé par les élèves professeurs.

On pourrait voir ainsi que, apparemment, l'aire augmente, puis diminue, ou encore que parmi les données produites, la valeur maximale de l'aire est 3200 m^2. C'est ce type de travail que les élèves professeurs éludent : la technique qu'ils envisagent pour mettre en place l'expression de l'aire en fonction de la longueur, à savoir la « résolution du système »

$$\begin{cases} A = x \times y \\ 2x + y = 160 \end{cases}$$

paraît trop éloignée de la dynamique de l'étude et inutilement compliquée. En effet, si le travail exploratoire avait été davantage développé, on aurait pu s'attendre à ce que la classe obtienne d'abord un tableau de résultats du type suivant (tableau 1), où « côté 1 » désigne la longueur commune aux deux parties du cordon qui donnent sur la plage :

Côté 1	10 m	20 m	30 m	40 m	50 m	60 m	70 m
Côté 2	140 m	120 m	100 m	80 m	60 m	40 m	20 m
Aire	1400 m^2	2400 m^2	3000 m^2	3200 m^2	3000 m^2	2400 m^2	1400 m^2

Tableau 1. Tableau donnant l'aire en fonction des côtés

Il s'agirait ensuite de mettre ces assertions à l'épreuve (ou l'une d'entre elles si les deux n'émergent pas), par exemple en convoquant un tableur ; on trouvera dans le tableau 2 les traces d'une telle expérimentation.

De plus, la répétition du calcul du deuxième côté à partir du premier ferait apparaître le fait que côté 2 = 160 m – 2 × côté 1, ce qui permettrait, quand cela s'avère nécessaire, d'exprimer l'aire en fonction du premier côté. (Suivant la modélisation, il pourrait bien entendu apparaître également le fait que le premier coté est la moitié de la différence entre le périmètre et le deuxième côté.)

Côté 1	Côté 2 160 – 2*côté 1	Aire Côté 1 * coté 2
1	158	158
5	150	750
10	140	1400
15	130	1950
20	120	2400
25	110	2750
30	100	3000
35	90	3150
40	80	3200
45	70	3150
50	60	3000
55	50	2750
60	40	2400
65	30	1950
70	20	1400
75	10	750
80	0	0

Côté 1	Côté 2 160 – 2*côté 1	Aire Côté 1 * coté 2
30	100	3000
31	98	3038
32	96	3072
33	94	3102
34	92	3128
35	90	3150
36	88	3168
37	86	3182
38	84	3192
39	82	3198
40	80	3200
41	78	3198
42	76	3192
43	74	3182
44	72	3168
45	70	3150
46	68	3128

Côté 1	Côté 2 160 – 2*côté 1	Aire Côté 1 * coté 2
37,0	86	3182,0
37,5	85	3187,5
38,0	84	3192,0
38,5	83	3195,5
39,0	82	3198,0
39,5	81	3199,5
40,0	80	3200,0
40,5	79	3199,5
41,0	78	3198,0
41,5	77	3195,5
42,0	76	3192,0
42,5	75	3187,5
43,0	74	3182,0

Côté 1	Côté 2 160 – 2*côté 1	Aire Côté 1 * coté 2
39,0	82,00	3198,00
39,1	81,80	3198,38
39,2	81,60	3198,72
39,3	81,40	3199,02
39,4	81,20	3199,28
39,5	81,00	3199,50
39,6	80,80	3199,68
39,7	80,60	3199,82
39,8	80,40	3199,92
39,9	80,20	3199,98
40,0	80,00	3200,00
40,1	79,80	3199,98
40,2	79,60	3199,92
40,3	79,40	3199,82
40,4	79,20	3199,68
40,5	79,00	3199,50

Tableau 2. Traces de l'expérimentation sur un tableur

On voit ainsi se dessiner une arborescence de questions cruciales qui pourrait être la suivante :

Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ?

Si certains rencontrent des problèmes : comment s'y prend-on pour trouver un rectangle qui convient ?

Si l'expression de l'un des côtés en fonction de l'autre apparaît, la mettre à l'épreuve : est-ce que cette technique de détermination des côtés fonctionne ?

> Peut-on trouver d'autres rectangles ? (Pour relancer éventuellement la fabrication de données.)
>
> Parmi les rectangles dont on dispose, lequel correspond à la plus grande surface de baignade ? Peut-on en trouver une plus grande ?
>
> > Si la proposition de faire le travail avec le tableur n'émerge pas : comment pourrait-on obtenir davantage de données plus rapidement ?
>
> Etc.

Par contraste, on voit poindre dans le compte rendu fictif proposé une introduction opportuniste d'objets mathématiques alors que le traitement de la situation ne l'exige pas, ce qui révèle certains manques dans l'équipement praxéologique de ces professeurs. On citera en particulier la technique d'*exploration du type de tâches* qui semble clairement trop peu développée, avec notamment une dialectique des médias et des milieux trop pauvre. Explorer un type de tâches devrait en effet amener à se donner un corpus de données « suffisant », qui puisse constituer un fragment de médias et de milieux pour permettre ou favoriser l'émergence de la technique : il s'agit de « faire parler » ce corpus ou, pour le dire autrement, de produire des assertions à propos de ce corpus de données et de les mettre à l'épreuve, quitte à enrichir le corpus de données pour cela, mais sans anticiper, c'est-à-dire sans utiliser des ingrédients mathématiques que les élèves n'ont pas à connaître ou n'ont pas encore étudiés. (Une telle anticipation pourrait être ici de faire remarquer la « symétrie » des données par rapport à 40 alors qu'elle n'apparaît pas encore dans le corpus de données que les élèves se sont rendu disponible ou qu'ils ne la voient pas en ces termes.)

Ce travail exploratoire doit être effectué par la classe, mais aussi, au préalable, par *les professeurs* qui doivent en explorer tous les aspects possibles, parce que c'est ce travail qui va permettre de produire une arborescence de questions cruciales, comme on en a vu les prémisses plus haut. Manifestement, ici, la suite de questions cruciales n'est pas issue d'une étude de ce type mais ressemble, particulièrement à partir de la septième question cruciale, à une étude lacunaire « standard ».

Nous pensons que l'atrophie de la technique de conception du moment exploratoire tient sans doute à plusieurs facteurs. L'un d'entre eux pourrait être la crainte que l'exploration ne tue le problème posé en en donnant une réponse rapide, le maximum étant atteint pour la valeur 40 m de la largeur de la zone de baignade. On peut voir là un déficit dans l'équipement praxéologique de ces professeurs du point de vue de la liaison dialectique entre les deux aspects de l'activité mathématique : se convaincre expérimentalement de la véracité d'un fait (numérique, graphique, spatial, etc.) d'une part ; le déduire de la théorie dont on dispose, éventuellement augmentée d'un petit nombre de résultats déduits ou pris comme axiomes une fois leur véracité mise à l'épreuve, d'autre part. Il s'agit en effet non seulement d'obtenir une réponse au problème posé mais encore de faire « œuvre de mathématicien », c'est-à-dire d'enrichir la théorie mathématique disponible des éléments éventuellement nécessaires à la résolution du problème posé. Cet aspect, qui relève à proprement parler de la réalisation du moment technologico-théorique, n'est clairement pas pris en charge dans le compte rendu fictif développé. La définition d'un maximum, notamment, n'est pas mise en relation avec la modélisation graphique proposée (le point le plus haut de la courbe) qui, elle-même, est considérée comme allant de soi. Pour le dire autrement, aucune question cruciale ne pose le problème de la mise à l'épreuve des assertions formulées, ce qui empêche la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique. On notera que cela handicape également la mise en forme de l'organisation mathématique étudiée : si la distinction faite dans le mémoire entre les bilans d'étape et la synthèse est pertinente pour permettre l'institutionnalisation d'organisations mathématiques suffisamment amalgamées, la synthèse visée manque les fonctions technologiques des propriétés qui y sont enregistrées.

En outre, en ce qui concerne la réalisation du moment technologico-théorique, rien n'oblige à mettre en œuvre la déduction à propos du spécimen du type de tâches étudié. On pourrait explorer encore un autre spécimen du même type de tâches à propos du même système mais en faisant varier le paramètre « longueur du cordon ». Le traitement d'autres longueurs de cordon, comme 185 m par exemple où le maximum est atteint pour une largeur de 46,25 m, permettrait de mettre en œuvre les éléments de la technique ayant déjà émergé et de faire émerger certains autres ingrédients, notamment les éléments technologico-théoriques.

Parmi les conditions ou les contraintes favorisant l'atrophie de la technique de conception du moment exploratoire, on peut citer la prégnance chez ces jeunes professeurs d'un rapport inadéquat à l'activité mathématique elle-même. Ce rapport, issu de leurs études universitaires et que la préparation aux concours n'a en général pas battu en brèche, minore quand il ne l'ignore pas le travail expérimental (pourtant au cœur de la production mathématique, même si le domaine de réalité sur lequel on expérimente peut alors être fort abstrait...) parce qu'il ne tient pas compte, justement, de la production des mathématiques : les mathématiques, « c'est là et ça se met en œuvre... » Cela conduit à regarder par exemple, ici, la situation comme étant modélisée par une fonction de deux variables, choix poussé en avant par la légitimité épistémologique de cet objet pour ces jeunes professionnels.

3. Problématique de base : conditions et contraintes

Dans cette section, c'est dans le cadre de la *problématique de base* (Chevallard, 2011) que nous nous placerons : « Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quels ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique telle entité praxéologique désignée ? » Avant d'examiner cette question dans le cas qui nous intéresse ici, notons tout d'abord, toujours en suivant Y. Chevallard (2011), que dans le cas de la problématique de base « il convient généralement de *créer* les conditions *C* pour pouvoir en observer les effets » et que « le chercheur devra observer, non plus des systèmes didactiques “libres” (par rapport à lui), mais des systèmes didactiques qu'il aura délibérément “perturbés”, voire largement “créés”, même si cette perturbation ou cette création passe généralement par l'intermédiaire de [l'instance d'aide à l'étude] ».

Nous allons tout d'abord nous intéresser plus particulièrement à la promotion de l'année 2008-2009 pour tracer les contours de quelques conditions mises en place par la responsable de la formation pour les besoins de la recherche et présenter les dispositifs utilisés pour observer le système didactique qui aura ainsi été délibérément « perturbé ». Nous prendrons comme point de départ la quatrième séance du séminaire de didactique de l'année ; à cette époque, les élèves professeurs ont travaillé pour l'essentiel sur les notions de praxéologies mathématiques et didactiques dans le but de construire quelques éléments de réponse à la question suivante, qui constitue le cœur de la formation dispensée : « Comment concevoir et réaliser un enseignement de mathématiques sur un thème donné dans une classe de la scolarité obligatoire ? » La notion de PER a été abordée dès la première séance de travail, brièvement, pour commenter le passage suivant de la notice « Première rentrée des classes » qui y a été distribuée.

> Par contraste, l'activité que l'on qualifiera ici d'*activité d'étude et de recherche* (AER), qui doit laisser une large place à l'action et à la réflexion *des élèves*, est *le cœur de la vie mathématique de la classe*. C'est là, en effet, que se construisent les mathématiques que le professeur doit enseigner et que les élèves doivent apprendre : toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l'émergence de notions et outils mathématiques visés et se situer au sein d'un *parcours d'étude et de recherche* (PER) qui lui donne un sens plus global tout en permettant l'articulation des mathématiques produites par l'AER aux mathématiques déjà construites.

Elle a ensuite été reprise dans la quatrième séance de travail en liaison avec deux aspects relatifs aux AER : d'une part, la réalisation du moment de la première rencontre, où se fait notamment la dévolution du problème proposé à l'étude et pour laquelle l'inscription des AER dans un PER permet à la fois un gain de temps et une motivation plus authentique des mathématiques étudiées ; d'autre part, la question de l'amalgamation des organisations mathématiques, déjà présente dans la notice de la première rentrée des classes. Le premier aspect a été initié par un travail portant sur l'observation d'une séance en classe qui voyait la réalisation d'une AER, et était développé dans une seconde notice « le temps de l'étude »[7], distribuée lors de cette séance.

En 2009-2010, la notion de PER a été abordée dans des conditions analogues même si, compte tenu de la dynamique de l'étude, c'est à la

7. Voir http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fc/encyclopedie/volume2/2006-2007/le_temps_de_letude_2006.pdf

septième séance de travail que la notion de PER a été reprise et développée. Dans chacun des cas, à l'issue de ce travail la formatrice a demandé à chacun des élèves professeurs de mettre par écrit un point qui lui semblait positif et un point qui lui semblait négatif dans la mise en œuvre de la notion de PER. Ce sont ainsi 41 élèves professeurs qui ont répondu en 2008-2009 et 45 en 2009-2010. L'analyse des réponses apportées permet de mettre en lumière certaines conditions ou contraintes pesant sur la réception de la notion PER dans la formation, mais aussi, plus largement, dans le système d'enseignement. En effet, d'après les travaux réalisés par Gisèle Cirade (2006) dans sa thèse, les réponses des élèves professeurs portent en elles et révèlent des normes de la profession, de manière d'autant plus lisible que ces professeurs en formation initiale s'affrontent à une foule d'objets non familiers. Pour faciliter la lecture, nous avons précédé les réponses[8] apportées comme point positif par ☺ et celles apportées comme point négatif par ☹.

Un premier point doit être souligné : penser la notion de PER se révèle difficile pour les élèves professeurs. Cela transparait notamment dans la mise en avant de difficultés supposées pour les élèves : plus d'un tiers des points négatifs évoquent ainsi *les élèves* – ce qui, en quelque sorte, dédouane le professeur de mettre en place un tel dispositif –, ainsi qu'en témoignent les réponses suivantes (dans toute la suite, c'est nous qui soulignons) :

☹ Le travail sur des supports différents pourrait permettre de mieux différencier chaque type de tâches. (Risque d'amalgame par les *élèves* des praxéologies étudiées dans le PER.)

☹ Trop de choses à assimiler en même temps peut perturber les *élèves*.

☹ Un PER peut créer des confusions chez des *élèves* d'un niveau plutôt faible.

☹ Les PER peuvent perdre les *élèves*, voire les impressionner avec un sens trop général. Les *élèves* peuvent trouver « obscurs ou compliqués » une notion, un PER trop vague. Il conviendra alors de bien dévoluer le PER avec les *élèves*.

8. Les réponses de l'année 2009-2010 sont repérées par un astérisque (☺* ou ☹*).

☹*La rigidité éventuelle d'une telle organisation, le sentiment de routine que cela peut provoquer à la longue chez l'*élève*.

☹*Un PER étant plus long sur la durée peut lasser les *élèves*.

☹*Si c'est trop long cela peut « perdre » les *élèves*.

☹*Les *élèves* sont confrontés à des problèmes « qui se ressemblent ». Ils ont donc moins l'opportunité d'utiliser des outils mathématiques dans des cadres variés.

☹*Morceler dans le temps peut perdre ou ennuyer les *élèves*, ou revenir au même genre de problème peut être lassant.

Derrière cette volonté affichée de protéger les élèves, on peut voir se dessiner la crainte pour ces jeunes professionnels d'avoir à gérer un dispositif qui leur semble de grande envergure et fort complexe ; certaines réponses le mentionnent d'ailleurs explicitement, mais de façon lapidaire, comme la suivante : « ☹* Dur à concevoir et à mettre en place pour les enseignants débutants. » Cela les conduit à éviter de poser le problème de la constitution de techniques didactiques appropriées, contrairement à la réponse suivante qui met en évidence le problème de la *conception* et de la *réalisation* d'une AER et d'un PER : « ☹* Comment mettre en place un PER ? Il est difficile de mettre en place une AER convenable, alors comment construire un PER de façon convenable ? » On notera que, pour les AER, la difficulté soulevée est celle de la réalisation alors que pour les PER, c'est le problème de la conception qui, dans un deuxième temps, est mis en avant. L'analyse du compte rendu fictif présenté dans le développement du mémoire montre bien cependant les difficultés qui surgissent lors de la conception d'une AER, et on peut voir dans cette distinction le fait que la notion d'AER paraît à cette époque de l'année plus familière aux élèves professeurs.

Revenons maintenant à la toute première réponse citée plus haut, qui indique que « le travail sur des supports différents pourrait permettre de mieux différencier chaque type de tâches » mais qu'il y a un « risque d'amalgame par les élèves des praxéologies étudiées dans le PER ». Elle fait apparaître de manière exemplaire l'une des raisons mêmes de l'introduction des PER : la systématisation par les élèves professeurs de la construction d'AER « millimétrées ». On y voit également, en creux, un rapport davantage structurel que fonctionnel à la notion de type de tâches, venant justifier la pratique des « AER millimétrées » – cela permettrait de « différencier chaque type de tâches » – qui va à l'encontre du travail d'institutionnalisation permettant de mettre en forme une organisation mathématique régionale, voire locale (Artaud, 2010). Ce point se retrouve dans d'autres réponses, telles les suivantes :

- ☹ S'il faut faire *une AER pour chaque méthode importante de résolution* en laissant du temps pour la recherche, etc., cela représente un grand investissement en temps, peut-être *trop* important.
- ☺ Chaque notion est introduite par une mini AER, il y a donc *une réflexion pour chaque notion*.
- ☺* Permet de donner du sens à l'introduction de *chaque nouvelle notion*, donc de motiver les élèves.

Outre la correspondance une AER pour chaque technique ou encore pour chaque notion, certaines réponses font apparaître une condition essentielle, celle du *temps*, vu ici négativement : un PER consommerait trop de temps. Cette question du temps est présente dans d'autres réponses : les PER peuvent apparaître comme permettant de gagner du temps ou au contraire, plus fréquemment, comme contraignant le professeur à une dépense trop grande de ce temps d'horloge si précieux.

- ☺ Un PER permet d'aborder plusieurs notions en même temps et d'*avancer plus rapidement dans le programme*.
- ☹ Pour exploiter l'effet structurant du PER, il faudrait que les AER qui lui sont rattachées soient exécutées les unes après les autres. On risque alors de *passer trop de temps* sur un même thème, en contradiction avec le principe de mener plusieurs thèmes de front.
- ☹* Temps de préparation pour le professeur, et le temps pris en classe pour ce genre d'activité sera *du temps que l'on ne pourra plus prendre pour traiter le programme*.

Par contraste, nombre de réponses positives mettent en avant les arguments développés dans la formation, et notamment l'amélioration de la motivation de l'organisation mathématique ainsi produite, même si certaines réponses, comme par exemple « ☺ On obtient une plus grande motivation des élèves et ils sentent la nécessité d'avoir la nouvelle notion dans leurs bagages. », *font porter la motivation sur les élèves* et montrent ainsi que la compréhension est encore incertaine :

- ☺ Un PER permet de mettre en place *une suite d'AER ayant un lien entre elles*. Celles-ci semblent ainsi moins « parachutées » et cela facilite peut-être la dévolution du problème.
- ☺ Cela permet d'avoir un suivi de l'étude et donne *un enchaînement dans la continuité*. Un PER peut donc servir de fil conducteur à l'étude.
- ☺ Dispositif permettant de *motiver les AER qui elles-mêmes motivent les OML étudiées*, réduisant ainsi l'énergie nécessaire à l'avancement de l'étude, au fur et à mesure que celle-ci avance dans l'année.
- ☺*PER permet *une continuité dans l'étude*. On n'oublie pas ce qui a été fait au début, étant donné qu'un fil rouge est mis en place par l'instauration d'une question initiale.
- ☺*C'est une organisation qui potentiellement peut beaucoup *aider les élèves à avoir les raisons d'être des savoirs* et mieux les retenir.

D'autres se font l'écho d'une meilleure *amalgamation* des organisations mathématiques construites par le biais de PER, d'une meilleure organisation du savoir : les PER sont vus comme permettant de « tisser un lien entre différentes notions ou chapitres », d'« établir des passerelles entre plusieurs chapitres », de « créer une synthèse en liant plusieurs domaines mathématiques », etc. On mettra ces réponses en relation avec le travail réalisé dans le mémoire à propos de la synthèse qui intervenait comme une *rupture* dans le processus d'étude ; les élèves professeurs disposent sans doute de certains éléments technologico-théoriques, mais ils n'ont pas encore les moyens de les mettre en œuvre pour produire des techniques didactiques idoines ou, du moins, pour entendre et contrôler celles qui sont coconstruites dans la formation.

Mais, là encore, des points d'achoppement se révèlent, et spécialement la *restriction thématique* de l'organisation mathématique devant surgir d'un PER. Cette restriction thématique est largement présente dans les réponses apportées : elle se manifeste souvent par la mention des types de tâches et des techniques, sans que l'environnement technologique soit évoqué. Ainsi en va-t-il dans la réponse suivante : « ☺ La mise en œuvre de la notion de PER permet aux élèves d'utiliser plusieurs méthodes pour réaliser un même type de problèmes. Ils peuvent faire le lien entre celles-ci. » On la trouve également sous la forme de l'évocation de la « notion » enjeu de l'étude : « ☺ Les PER offrent un cap, un objectif dans l'étude d'une notion et motivent donc le travail effectué. » Les réponses citées ci-dessous apparaissent, par contraste, manifester une vision *au moins sectorielle*, ce qui reste encore marginal :

☺ Cela permet en outre de *brasser différents thèmes du programme* en suivant une même démarche et donc de donner des points de repère aux élèves sur les différents types de problèmes.

☺ Le PER permet d'installer un réel fil conducteur durant l'étude autour d'un véritable problème. Le problème met en jeu différents outils et peut même *mobiliser différents domaines* des mathématiques. Les élèves gardent la raison d'être de l'étude et sont sécurisés par la continuité du fil conducteur.

☺* Étudier plusieurs situations, problèmes comparables peut permettre aux élèves d'établir des liens entre différents éléments théoriques, de *décloisonner les chapitres*.

☺* Un PER sur plusieurs chapitres peut permettre un réinvestissement des notions déjà abordées et de voir *les liens entre les domaines mathématiques*.

D'autres réponses, négatives, témoignent d'une vision plus large que celle du thème mais mettent en avant la difficulté que cela peut présenter pour le professeur *débutant*, avec la mise en avant de la nécessité d'une vision « globale » du programme et, donc, du recul que cela nécessite :

☹ Il faut *beaucoup de recul sur les enseignements* pour pouvoir les relier. C'est un travail difficile à mettre en œuvre en début de carrière.

☹* Difficile à mettre en œuvre dans le sens où il faut avoir *énormément de recul sur le programme* et maitriser parfaitement la progression pendant l'année. Ce n'est donc certainement pas envisageable pour un enseignant n'ayant pas une grosse expérience.

☹* Déjà que trouver des raisons d'être aux différentes notions est difficile, le fait que toutes ces raisons doivent être en grand nombre, être «similaires », ou présentées de la même façon, relève du défi…

Semble difficilement envisageable dès la première année au vu du *recul nécessaire sur le programme*.

☹* Difficulté de mise en œuvre ; demande *un point de vue global de toute l'année* que l'on n'a pas forcement au début de l'année.

Les réponses mentionnent également la gestion du temps didactique : cette dernière apparaît positivement, faisant écho aux arguments développés dans la formation (bien qu'encore marquée par la restriction thématique déjà signalée), mais aussi négativement, un PER étant supposé rendre la gestion de la dynamique de l'étude ou encore de la mémoire didactique difficile, avec le risque d'une certaine « lassitude », d'un certain ennui dû à la « répétition ».

☺ On utilise un même support de départ pour étudier tout ou partie d'une praxéologie associée à un thème, alternant phases d'étude et de recherche et phases d'institutionnalisation, ce qui donne un point de vue plus global et *dynamique de l'étude*.

☹ Un PER nécessite de *nombreux « aller-retour » entre deux parties distinctes de la structure ternaire de l'étude* d'un thème, ce qui nécessite une bonne organisation d'une part, et laisse un risque de confusion de la part des élèves d'autre part.

☹ Difficile à organiser. De plus, s'il se déroule sur plusieurs séances, obligation de faire un rappel sur ce qui a déjà été vu, pour pouvoir redémarrer.

☹ Les élèves ne se souviennent pas forcement des « anciennes » activités. (Il faut toujours rafraîchir leur mémoire.)

☹* Les élèves risquent de confondre les différentes méthodes.

☹* La rigidité éventuelle d'une telle organisation, le sentiment de routine que cela peut provoquer à la longue chez l'élève.

Pour terminer, notons que certaines réponses mettent en avant le bénéfice que l'on peut tirer d'une organisation didactique s'appuyant sur les PER, dans le sens où cela permet d'améliorer le *topos* de l'élève, de faciliter la mésogenèse, mais aussi, où cela rend plus efficace la dévolution des questions à étudier ou encore atténue la « déconcertation cognitive ».

☺*Cela permet de travailler plus efficacement avec les élèves. On leur donne *un cadre et une organisation qui deviennent familiers* pour eux et leur permet de ne jamais se sentir désorientés.

☺*La *dynamique de classe sera de plus en plus positive* au fur et à mesure que les activités de même type apparaissent.

☺*Rend vivant et cohérent l'enseignement des mathématiques. Permet de *rendre les élèves acteurs* dans leur processus d'apprentissage.

☺*Les élèves *construisent eux-mêmes leur « cours »* ils le retiennent donc mieux.

☺*Cela permet aux élèves de *gagner en autonomie* pendant les AER.

☺**Capitalisation des éléments didactiques qui créent le milieu* pour construire en profondeur.

4. Conclusion

On voit donc surgir, à travers les points positifs et négatifs de la mise en œuvre de PER, tels qu'ils sont exprimés par les élèves professeurs, et leurs essais de conception d'un PER, un complexe de conditions et de contraintes qui favorisent, qui permettent, ou au contraire qui gênent, qui empêchent la diffusion de la notion de PER. Parmi les conditions favorables, on peut citer des éléments technologiques, qui vont justifier la nécessité des PER, notamment l'amélioration de la motivation et de l'amalgamation des organisations mathématiques produites. L'amalgamation des organisations mathématiques se trouvera cependant limitée, du point de vue des praxéologies mises en œuvre, par la vision thématique des organisations mathématiques que l'on a vu certains mettre en avant et dont on sait la prégnance dans la profession : en effet, certaines structures existant dans le système d'enseignement secondaire des mathématiques en France, telles le découpage en chapitres ou encore une lecture chronogénétique du contenu du programme, poussent en avant cette vision thématique. Cette amalgamation butte ensuite sur le problème de la réalisation du moment de l'institutionnalisation et de son articulation avec les autres moments de l'étude de l'organisation mathématique régionale, voire locale. C'est ainsi que nous avons mis en évidence dans l'étude du mémoire professionnel que la synthèse arrive trop tôt, et cela d'un double point de vue. D'un côté, elle vient rompre la dynamique de l'étude et mettra ainsi en forme des organisations mathématiques diffractées. D'un autre côté, le moment technologico-théorique n'ayant pas véritablement eu lieu, faute de la conception d'une articulation – adéquate – avec le moment exploratoire, les assertions enregistrées dans la synthèse ne sont pas mises en relation avec les pratiques qui les nécessitent et n'ont ainsi que très partiellement le statut d'élément technologique.

Ces résultats sont confirmés par un ensemble d'observations cliniques à propos du système d'enseignement et on pourrait les mettre en perspective et les approfondir en analysant notamment des questions d'élèves professeurs (Artaud & Cirade, 2008). Le travail mené permet en outre de mettre en évidence des éléments de la dialectique entre problématique de base et problématique possibiliste. Des ingrédients des systèmes praxéologiques auxquels une institution accède, mis au jour dans le cadre de la problématique possibiliste, fournissent des matériels à interroger dans le cadre de la problématique de base et on peut ainsi constituer un système de médias et de milieux permettant de dégager des conditions et des contraintes agissant dans les systèmes didactiques, ces conditions et ces contraintes pouvant devenir dès lors des objets d'étude du didacticien.

Références

Artaud, M. (2010). Conditions de diffusion de la TAD dans le continent didactique. Les techniques d'analyse de praxéologies comme pierre de touche. Dans A. Bronner et al. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 233-253). Montpellier, France : IUFM.

Artaud, M. & Cirade, G. (2008, novembre). *L'enseignement et la réception de la notion de PER dans la formation des professeurs stagiaires de mathématiques*. Communication présentée au colloque international « Efficacité et équité en éducation ». Rennes, France. http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf

Artaud, M. & Jullien, M. (2009). *Séminaire de didactique des mathématiques pour les PCL2, année 2008-2009* (non publié). Université de Provence (IUFM), France.

Artaud, M. & Jullien, M. (2010). *Séminaire de didactique des mathématiques pour les PCL2, année 2009-2010* (non publié). Université de Provence (IUFM), France.

Benhadi, S., El Kaine, S. & Félix, D. (2009). *Comment dynamiser l'enseignement des mathématiques ? Le cas des fonctions en classe de seconde* (Mémoire professionnel non publié). Université de Provence (IUFM), France.

Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. *Actes de la II^{e} école d'été de didactique des mathématiques*. Orléans, France : IREM.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). Université de Provence, France.
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709

Laplanche, J. & Pontalis, J.-B. (1967). *Vocabulaire de la psychanalyse*. Paris : PUF.

La logique de la découverte de la vérité mathématique

Baghdad Benmia
ENSET d'Oran, Algérie

Abstract. Knowledge is not just "I know that *h*". The Arab civilization brought out into the open three conditions or factors of knowledge: the condition of truth; the condition of acceptance or belief; and the condition of justification. The work of 7th century mathematicians will enable us to illustrate the importance of considering two essential praxeological levels, thanks to which we intend to articulate two salient features of the anthropologic theory of the didactic (ATD): on the one hand, the modelling of a proof in terms of praxeologies, and, on the other hand, the emphasis on the process of modelling the mathematical activity in this proof.

Resumen. El saber no se resume a «sé que *h*». La civilización árabe permitió sacar a relucir tres condiciones, o factores, del saber: la condición de verdad, la de aceptación o creencia y la de justificación. Las tres tienen figuras homólogas en la prueba. A través de un ejemplo sacado de la obra de matemáticos del siglo VII, ilustraremos el interés de considerar dos niveles praxeológicos esenciales que nos permitirán articular dos rasgos destacados de la teoría antropológica de lo didáctico: por un lado la modelización de una prueba en términos de praxeologías y, por otro, la importancia atribuida al proceso de modelización de una actividad matemática en el seno de esta prueba.

Résumé. Le savoir ne se résume pas au « je sais que *h* ». La civilisation arabe a permis de mettre au jour trois conditions, ou facteurs, du savoir : la condition de vérité, la condition d'acceptation ou de croyance et la condition de justification. Toutes les trois ont des figures homologues dans la preuve. À travers un exemple choisi dans l'œuvre des mathématiciens du VII^{e} siècle nous illustrerons l'intérêt de considérer deux niveaux praxéologiques essentiels grâce auxquels nous entendons articuler deux traits saillants de la théorie anthropologique du didactique : d'une part, la modélisation d'une preuve en termes de praxéologies et, d'autre part, l'importance accordée au processus de modélisation d'une activité mathématique au sein de cette preuve.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 795-806)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 4. *La dialéctica de los media y los medios*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Problématique

Pour la théorie anthropologique, *connaître un objet O* signifie (que ce soit pour une personne ou une institution) *avoir un rapport avec lui*, c'est-à-dire *faire* quelque chose avec lui. Un savoir est un objet particulier au sein d'une société donnée : de ce point de vue, être un savoir est un statut culturel pour certains objets. Un savoir est donc producteur de connaissances pour un individu, à partir du moment où cet individu a un rapport avec ce savoir, en général en devenant sujet d'une institution. Nous interprétons la *technologie* de la *technique* utile à l'accomplissement du type de tâches T « *partager équitablement un héritage* » pratiquée par les mathématiciens du VII^e^ siècle en termes *praxéologiques* (*praxis* : [T / τ] ; *logos* : [θ / Θ]). Le couplage de [T / τ] et de [θ / Θ] se fait par [τ / θ] et constitue la *techné* permettant la médiation entre l'homme et la nature.

Pour Yves Chevallard, une praxéologie est un complexe composé de [T / τ / θ / Θ] :

- Une *tâche T* à exécuter, que l'on s'impose ou qui est imposée par des circonstances ou par un autre.
- Une *technique* τ utile à la résolution de cette tâche. Si la technique est connue la tâche est routinière, sinon elle est problématique et dans ce cas intéresse les apprentissages.
- Une *technologie* θ, c'est-à-dire une justification de la technique employée, justification nécessitant la présence d'un langage (verbal ou non verbal).
- Une *théorie* Θ, ensemble cohérent des systèmes de preuve de la technologie ; référent conforme au domaine d'apprentissage.

Le concept de situation a ici le sens de tâche, c'est-à-dire que toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et la difficulté propres. En termes de praxéologie, l'objet de savoir « *être prouvé* » est structuré par une organisation mathématique (OM) régionale (secteur) composée de trois OM locales (thèmes), chacune des trois organisations mathématiques locales étant alors présentées successivement ; on les notera [T_i / τ_i / θ / Θ], avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

2. Concept technologique. Particularisation du concept « *nombre entier* » ([τ / θ])

En didactique des mathématiques, Gérard Vergnaud (1991), en référence aux travaux de Saussure et à partir de recherches sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, propose de considérer un concept comme une entité formée d'un signifiant, d'invariants opératoires et d'un référent.

De quelle façon un « *nombre entier* » peut-il être conceptualisé ? Comment le langage contribue-t-il à la construction de la vérité mathématique ? Comment peut-on faire pour construire le concept « *nombre entier* » d'une façon pertinente pour un apprenant en lui joignant des invariants opératoires et un référent ?

2.1. La technique de [τ / θ]

Le bloc [τ / θ] représente l'unité de pensée d'un « *nombre entier* ». Dans cette unité il nous paraît indispensable de distinguer l'invariant « représenté » (le signifié) et l'invariant « représentant » (le signifiant), provenant d'un savoir constitué socialement. La technique vise l'efficacité de l'action sur les signifiants en construisant la vérité de la connaissance à partir de l'action sur les signifiés de [τ / θ]. La « technologie de la technique » doit permettre de maîtriser la tension entre la généralisation et la particularisation. Il y a nécessité de réduire le concept linguistique en un concept technologique par la prise en compte des *milieux*.

2.1.1. OM_1 : Perception

T_1. Identification des raisons du partage.

a) Les données de la perception : Les piliers de l'héritage sont ceux sur lesquels l'effectuation (du partage) se fait : défunt, individu en conflit, héritage.
b) Les causes de l'héritage :
   1) La cause principale : la mort du défunt. Pas de relation entre la cause et l'effet.
   2) Les raisons de l'héritage : *ce sont les arguments qui complètent la cause principale.* Une dénomination commune (propriété) entre les individus en conflit et le défunt ; cette propriété nous permet de déterminer une catégo-

rie d'héritiers : lien de parenté, consommation du mariage. Existence d'une relation entre les raisons et l'effet.

c) Les conditions : ce sont les objets où se limite (s'arrête) le jugement. La limitation d'une catégorie d'héritiers.

T_2 : Validation.

Validations empirique des objets de l'héritage.

2.2. La technologie de la technique de [τ / θ]

2.2.1. OM_2 : Effectuation

Lorsqu'on écoute des paroles ou qu'on lit des écrits, deux sens émanent de notre esprit : le premier à partir des mots constitués par ce langage et le deuxième déduit à partir des signifiants constituant ce langage, et ils sont dans une relation signifiant / signifié. Cette relation se fait de plusieurs manières ; la première catégorie (signifiant) est nommée *énoncé*, la deuxième (signifié) *concept*. Autrement dit, le sens est de ce qui est dit d'un objet (énoncé) ou de ce qu'on dit sur l'objet (concept). Les mathématiciens interprètent l'objet de l'expérience par une relation de représentation, et repèrent les *structures* ou *configurations* d'un premier système social. Ce parcours interprétatif est un processus qui permet de fixer un *logos* OM_2 c'est-à-dire de la tenir pour vraie à partir des éléments technologiques de la *praxis* OM_1. Le *logos* de OM_2 est *fonction* de la *praxis* de OM_1.

T_1 : Formulation. Après la configuration du système social (signifiant) les mathématiciens étaient dans l'obligation de construire de nouvelles configurations relevant d'un second système symbolique (signifié). Autrement dit construire un *texte*, de donner une *signification* au partage. La sémantique de la référence est primordiale pour notre tradition métaphysique, car elle décrit les conditions auxquelles *le langage* peut dire le *vrai*. La *signification* est conçue comme relation entre les plans du signe (signifiant, signifié) ou les corrélats du signe (concept, référent).

T_2 : Interprétation. Le processus de *semiosis* est un processus *inférentiel* puisque l'objet du signe est à reconstituer à partir du *representamen* donné. Dans notre étude, les mathématiciens *infèrent* la pensée que l'objet d'expérience (succession) est l'expression *N* en vertu du fait de la pensée que la succession dans son *origine* est *D*. Pour éliminer toute *cause* influant sur l'effectuation du partage, les mathématiciens procèdent par différence de $N - D$: $N = D$, $N > D$ et $N < D$. Après cette tâche d'effectuation, une troisième tâche devient nécessaire : c'est celle de la validation (justification) du *sens* construit à partir du parcours interprétatif *normé* par la *praxis* OM_1.

2.3. La théorie de la technique de [τ/θ]

2.3.1. OM_3 : Construction de la preuve. Justification

Le sens est défini comme parcours entre les deux plans du texte (contenu et expression), et au sein de chaque plan. Un parcours est un processus dynamique, obéissant à des paramètres variables selon les situations particulières et les pratiques codifiées. Si bien que le sens n'est pas donné, mais est construit à partir du parcours interprétatif normé par la praxis OM_1. Ce parcours interprétatif est un processus qui permet de fixer un logos OM_2, c'est-à-dire qu'on infère les éléments technologiques de l'organisation mathématique OM_2. Les éléments technologiques de l'organisation mathématique OM_3 émanent de l'articulation des éléments technologiques de OM_1 et OM_2 et justifie la praxéologie [OM_1, OM_2].

T_1 : Élaboration d'une conjecture. Pour valider le sens il faut opérer par un modèle (conjecture). Pour que le modèle opère il faut un acte de validation, autrement dit l'action d'appliquer cette conjecture à la réalité : le sens construit devient un sens pour nous tous (commun)

Construction de la conjecture. Réduire au même dénominateur. Saisir le numérateur N contenu de l'expression. *Discours*. Saisir le dénominateur commun D l'expression du contenu : *origine* de la question. Mettre D et N dans une relation d'égalité : $N/D = 1$ (unité).

T_2 : Validation de la conjecture $N/D = 1$ (unité). Première condition : la vérité de N est une condition nécessaire à l'accès à l'outil « $N/D = 1$ ». Seconde condition : le sens est l'ensemble des conditions qui permettent au signe de s'appliquer à l'objet, c'est-à-dire les propriétés de vérité du signe. Dans ce cas on ne parle pas d'objet, mais de propriétés, de traits fondamentaux qu'ils doivent satisfaire pour tomber sous le signe. Résoudre ce problème de la contradiction cognitive revient à résoudre le problème de la validité désignative des parts des héritiers, autrement dit donner un sens au texte. Les mathématiciens ont étayé leur preuve par quatre *règles opératoires*, et par la *correction* de l'« *origine de la question* ». Ces quatre règles et la correction de l'origine s'avèrent des conditions nécessaires pour *effectuer* le partage et sont des ressources pour la validation de la conjecture. Ce calcul algébrique numérique liant « parts » et « héritiers » est une ressource de la *démonstration* de $N/D = 1$.

Les règles de la conceptualisation : les règles opératoires.

1. *Identité* : le nombre de parts est identique au nombre des héritiers. Se représentent dans le même nombre.
2. *Multiple* : le nombre de parts est multiple au nombre des héritiers. Se représentent dans leurs multiples communs.
3. *PGCD :* le PGCD entre le nombre de parts et le nombre des héritiers. Se représentent dans leur diviseur commun.
4. *Primalité :* le nombre de parts et le nombre des héritiers sont premiers entre eux. Se représentent dans leur multiplication.

Ces quatre règles proviennent de la *métonymie* entre les mots placés et les mots déplacés qui font partie du *fait* du sujet et de la *correction* de l'*origine* du problème qui est le fait de l'objet de la situation. Ce calcul numérique liant « parts » et « héritiers » a pour objet toutes les espèces de détermination des inconnues aux moyens des connues. Ces règles ont été ramenées à la prescription clairement exprimée par le fait du sujet**.** Une faute consistait à ne pas faire l'action prescrite, l'existence d'une prescription fonde l'existence d'une faute. Ces règles sont un ensemble de jugement semblable et qui revient à une seule *norme* qui les réunit. Celles-ci, à la différence des phénomènes naturels qui relèvent des lois, émanent du fait de l'*origine du concept* et supposent des règles constitutives de la forme si… alors… Si on viole une de ces règles alors la faute est commise.

Cette problématique met en jeux des formes langagières au niveau de la clarté et de la signification du langage. Après la construction a priori de l'origine du concept pour un processus d'inférence, une autonomie langagière s'installe dans le but de faire connaître les programmes de cette inférence en question. Cette autonomie langagière met en place une technologie linguistique au niveau…

1) … de la classification du langage dans sa clarté et de la portée de la puissance de cette clarté. Un langage clair (forme de l'expression) *face* à un langage non clair (forme du contenu). Le langage clair : apparent, texte, interprétant, et le certain, qui fait face à un langage non clair : inapparent, problème, interpréter (phrase), et le semblable.
2) … d'une signification qui est l'accomplissement du *sens* à partir de ce langage.

La formation de cette signification qui a été établie opère au niveau du *plan de l'expression* et permet de mettre en place une *logique sémantique***,** et des règles linguistiques au niveau des trois niveaux de l'origine du concept, du concept et des règles de la conceptualisation, autrement dit au niveau des trois organisations :

– OM_1 : la signification des mots sur le sens *placés* et *déplacés* pour eux ; réalité et métaphore. Une structure langagière de la vérité.
– OM_2 : la signification des mots sur un fait *en dehors* d'eux ; concept et énoncé. Structure langagière d'interprétation.

Énoncé : c'est le sens qui correspond à la signification d'un langage a la place de l'énonciation. Le *sens* de l'énoncé dépend des conditions d'*énonciation*.

Le concept : c'est la signification d'un langage sur le jugement d'un objet et qui est non cité dans l'énoncé, autrement dit la manifestation du silencieux, de l'inerte ; concept conforme et non conforme.

– OM_3 : la signification des mots sur le jugement de point de vue *cause* jugée dans les énoncés : Une structure langagière de la justification

Dans ce contexte nous avons proposé une expérimentation à deux groupes d'élèves ; l'un suit un système d'enseignement datant du VII^e^ siècle (classe science islamique) et l'autre un système cartésien de 1^re^ année scientifique (classe de 2^de^ en France). Soit I = « Enseignement des mathématiques à des élèves sciences islamiques » et $R(I, O)$ leur rapport aux nombres entiers.

Soit I' = « Enseignement des mathématiques à des élèves de 1^re^ année scientifique ») et $R(I', O)$ leur rapport aux nombres entiers. Nous avons proposé deux types de tâches ; dans l'une la succession est inconnue (on la construit) et dans la deuxième, elle est connue (est construite). OM_1 et

OM_2 sont présupposées. Le bloc [τ / θ] organisation interne de l'activité est donnée.

التمرين الأول

مات عن:

بنتان، أب، أم، (للبنتان 3/2، للام 6/1، للأب 6/1)

Activité n° 01 : la pratique de l'unité de [τ / θ]

« Le mort a pour héritiers deux filles, son père et sa mère. Sachant qu'ils ont respectivement droit à deux tiers, un sixième et un sixième. »

التمرين الثاني

مات عن أم و أخت (للام 3/1 للأخت 2/1)

وزع 50.000 دح بينهما

Activité n° 02 : la pratique de l'unité de [τ / θ]

« Le mort a un héritage de 50 000 *dinars et pour héritiers sa sœur et sa mère. Sachant qu'ils ont respectivement droit à un demi et un tiers. »*

Comparons $R(I, O)$ et $R(I', O)$. Commençons par l'analyse de $R(I, O)$. Les élèves sont dans OM_3, les technologies des deux organisations ponctuelles OM_1 et OM_2 sont présupposées. La production des élèves est consultable en annexe.

La technique : construction de la conjecture.

– Réduire au même dénominateur.

– Saisir N le numérateur, la somme des parts des héritiers.

– Saisir D le dénominateur commun, l'origine de la question.

– Les mettre en relation : $N/D = 1$ (unité).

La technologie : validation de la conjecture $N/D = 1$ (unité). Les élèves ont justifié leur preuve par au moins une des *quatre règles opératoires* et par la *correction* de l'« origine de la question ». Pour eux, ces quatre règles et la correction de l'origine s'avère des conditions nécessaires pour *effectuer* le partage et sont une ressource à la validité de la conjecture. Ce calcul algébrique numérique liant « part » et « héritier » est ressource de la démonstration de $N/D = 1$.

La théorie : nombres entiers

Passons à l'analyse de $R(I', O)$. La production des élèves est consultable en annexe.

> *Technique :* les élèves ont résolu le problème par la règle de trois, la division, l'addition et la multiplication.
>
> *Technologie* : combinent les éléments d'un ensemble sur lequel est définie une structure (syntaxique).
>
> *Théories* : logique. Le calcul s'effectue sur un corps commutatif (le corps des nombres réels).

On constate que le *langage* est secondaire par rapport aux opérations de la pensée et à l'objet du monde. La sémiotique n'a guère de place dans cette approche qui n'accorde aucune attention aux outils *sémiotique*, ni au processus de *conceptualisation*.

Comparons les deux. $R(I, O)$ articule les ingrédients technologiques de deux organisations ponctuelle OM_1 (les dits sur l'objet du monde) et OM_2 (les actes de pensée), cette nouvelle *technologie* (langage) est spécifique à OM_3 (activité mathématique). Ce processus de conceptualisation répond à la relation entre la situation et l'action par des jugements de pertinences et à la relation entre l'action et les résultats obtenus par des jugements d'efficacité. Pour que cette conceptualisation soit possible, il faut qu'elle possède un « objet observable » qui nous permet l'accès à la représentation, c'est-à-dire à la formation en pensée d'objets, de propriétés, de conditions, de relations fonctionnelles de ces objets entre eux et une action. L'objet conceptuel « origine » nous permet d'inférer le processus de la *conceptualisation* et ce processus répond à la compréhension par des règles de conformités.

Pour $R(I', O)$, on constate que le langage est secondaire par rapport aux représentations mentales et aux opérations de la pensée. La sémiotique n'a guère de place dans cette approche, qui n'accorde aucune attention aux outils sémiotique, ni au processus de sémiotisation. On procède par une *réeffectuation* d'un geste qui consiste la mise en œuvre d'un ensemble de règles grâce auxquelles on peut combiner les éléments d'un ensemble sur lequel est définie une structure (syntaxique)**.** Pour eux le schème s'exprime en tant que règle logique, c'est-à-dire un emboîtement logique d'actions sans signification. Le calcul consiste à la mise en œuvre d'un ensemble de règles grâce auxquelles on peut combiner les éléments d'un ensemble sur lequel est définie une structure.

Conclusion

Les résultats de notre étude nous amènent à proposer quelques pistes en vue d'une ingénierie didactique. L'organisation mathématique *locale* $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ autour du thème « *être prouvée* » réunit trois conditions du savoir et ne se laisse comprendre que par elles. Ces trois facteurs sont désignés par condition de vérité, condition d'acceptation ou de croyance et condition de justification. Il s'agit dans notre recherche d'une autre façon d'enseigner les objets mathématiques entiers naturels par une mise en œuvre d'un PER en rompant avec la présentation traditionnelle sur les entiers naturels. La modélisation d'une preuve en termes de praxéologies et, d'autre part, l'importance accordée au processus de modélisation d'une activité mathématique au sein de cette preuve. La construction d'une AER et sa gestion par un enseignant a priori ne se réduisent pas à l'énoncé d'un problème à poser aux élèves ; mais celle-ci fournit une grille d'analyse d'une technologie de langage et permet à l'élève de produire lui-même une connaissance personnelle comme réponse à un problème. L'enseignant doit être en mesure de maîtriser ce *langage* (*technologie*) dans sa *pertinence* et sa *clarté* pour pouvoir conduire les élèves du passage de cette pratique (AER) à la théorie (PER). On initie un enseignement par une sémiotisation des nombres, l'élève n'est plus spectateur des objets (nombres) mais peut les construire par la mise en œuvre d'une *technique* de la pratique de l'organisation interne d'une AER à la *technologie* de cette technique PER.

Nous terminerons en citant quelques spécimens proposés par les mathématiciens arabes.

- Le mort a pour héritier deux filles, son père, sa mère. Sachant qu'ils ont respectivement droit à deux tiers, un sixième, un sixième.
- Le mort a pour héritiers huit filles, son père et sa mère. Sachant qu'ils ont respectivement droit à deux tiers, un sixième, un sixième.
- Le mort a pour héritiers cinq filles son père et sa mère. Sachant qu'ils ont respectivement droit à tiers, un sixième, un sixième.
- Le mort (femme) a pour héritiers son mari, sa tante et ses deux sœurs. Sachant qu'ils ont respectivement droit à un demi, un tiers, deux tiers.
- Le mort a pour héritier sa mère, sa sœur. Sachant qu'elles ont respectivement droit à un tiers et un demi.

Références

Bedrane Abou El-Ain Bedrane (n. d.). *Héritage, testament et donation dans la législation islamique*. Egypte : Imprimerie Achabab Alexandrie.

Ben Mohamed El-Djordjani (2003). *Le manuel des définitions*. Liban : DarAn-Nafas. (Édition originale 1339-1403.)

Benmia, B. (2006). *L'articulation numérique-algébrique dans les classes de l'enseignement secondaire. Le cas des mises en équation*. (Mémoire de master). Université Montpellier 2, France.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Dans *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, 122*, pp. 103-107. Grenoble, France : LSD-IMAG/Université Joseph Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-111.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 5*. Strasbourg, France : IREM

Mohamed Taha Abou Al-Khalifa (2004). *Les jugements de l'héritage*. Egypte : Dar Essalem.

Manuel scolaire de la législation islamique de la classe terminale 1990, Alger.

Lakatos, I. (1984). Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris : Hermann.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Annexe

Nom : **Prénom :**
Classe : Terminal Sciences Islamiques
Lycée : Mohamed Benothmane El Kebir Maraval - Oran

6

4	$\frac{2}{3}$	2 Filles.
1	$\frac{1}{6}$	père
1	$\frac{1}{6}$	mère

5

6

3	3	$\frac{1}{2}$	Sœur
2	2	$\frac{1}{3}$	mère

المسألة ردية

Sœur 30000 دج $= 3 \times 10000$

mère 20000 دج $= 2 \times 10000$

$\frac{50000}{5}$

Nom : **Prénom :**
Classe : 1er année Secondaire Scientifique. (Ex. Seconde)
Lycée : Mohamed Benothmane El Kebir Maraval - Oran

1. حساب مجموع نسبتي الأبوين

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{6}}$$

2. تأخذ من الإرث نسبة البنتان $\frac{2}{3}$ (حساب ربح الأبوين).

$$\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

1. حساب مجموع النسبتين

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

2. حساب مبلغ الأم:

$$\left.\begin{array}{l} 50000 \longrightarrow \frac{5}{6} \\ x \longleftarrow \frac{1}{3} \end{array}\right\} x = \frac{\frac{1}{3} \times 50000}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{50000}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{50000}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{300000}{15}$$

$\boxed{x = 200000 \text{ DA}}$ تأخذ الأم 20000 دج.

3. حساب مبلغ الأخت:

$$\left.\begin{array}{l} 50000 \longrightarrow \frac{5}{6} \\ x \longleftarrow \frac{1}{2} \end{array}\right\} x = \frac{\frac{1}{2} \times 50000}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{50000}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{50000}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{300000}{10} = 30000$$

$\boxed{x = 30000 \text{ D.A}}$ تأخذ الأخت 30000 دج.

Clinique et ingénierie de l'enquête codisciplinaire
Un atelier « Enquêtes sur Internet » au collège

Yves Chevallard et Caroline Ladage
UMR P3 ADEF, Université Aix-Marseille 1, France

Abstract. This presentation centres on the notion of co-disciplinary inquiry, regarded as the keystone of a new didactic paradigm, the paradigm of questioning the world. While the still dominant paradigm of "visiting works" has been extensively studied, the new paradigm has yet to come into existence, if only to be studied. The authors therefore list a number of opportunities in which to observe people doing inquiry work. They then focus on the case of a workshop for secondary school pupils created under the name "Inquiries on the Internet" and offer an analysis of its functioning, stressing both the hindrances that affect it and its main achievements.

Resumen. Esta presentación se centra en la noción de indagación codisciplinaria, considerada como la piedra angular de un paradigma didáctico nuevo, el paradigma del cuestionamiento del mundo. Mientras que el paradigma todavía dominante de la «visita de las obras» ya ha sido extensivamente estudiado, el nuevo paradigma debe todavía ponerse a existir. Por lo tanto los autores enuncian unas cuantas ocasiones en las que se puede observar a personas haciendo un trabajo de indagación. Después se centran en el caso de un taller para alumnos de secundaria creado bajo el nombre de «Investigaciones en Internet» y ofrecen un análisis de su funcionamiento, poniendo en evidencia tanto los escollos con los que se tropieza como sus principales logros.

Résumé. Cette présentation est centrée sur la notion d'enquête codisciplinaire, considérée comme la clé de voûte d'un paradigme didactique nouveau, le paradigme du questionnement du monde. Alors que le paradigme encore dominant de la visite des œuvres a été très largement étudié, le paradigme nouveau doit encore venir à l'existence. Les auteurs présentent donc un ensemble de cas dans lesquels il est possible d'observer des personnes effectuant un travail d'enquête. Ils se centrent ensuite sur un atelier pour élèves du secondaire créé sous l'étiquette « Enquêtes sur Internet » et proposent une analyse de son fonctionnement, en mettant en évidence tant les difficultés rencontrées que ses principales réussites.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 807-830)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 4. *La dialéctica de los media y los medios*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. La notion générale d'enquête codisciplinaire

1.1. La problématique de base en didactique : AER et PER

Notons $\Re(K, C, \wp, X)$ le fait que, sous des contraintes K, les conditions C provoquent la rencontre de X avec un ensemble praxéologique $\wp$ regardé généralement comme relevant d'une discipline $\check{D}$. Plus précisément, on supposera que les conditions C s'identifient aux conditions engendrées par l'étude par X d'une certaine question Q, au sein d'un système didactique $S(X ; Y ; Q)$, où l'on peut éventuellement avoir $Y = \varnothing$.

Une propriété clé de la rencontre ainsi provoquée avec $\wp$ est son caractère *plus ou moins immédiat*. La notion d'*activité d'étude et de recherche* (AER) a ainsi été introduite en TAD en termes de conditions conduisant, sous des contraintes données, à rencontrer *de façon quasi immédiate* un certain enjeu didactique $\wp$. Par contraste, la première notion de *parcours d'étude et de recherche* (PER) renvoie à des conditions provoquant une rencontre *non immédiate*, graduelle, échelonnée, avec tout un ensemble de praxéologies.

Le passage de la notion d'AER à celle de PER va de pair avec un premier desserrement de certaines contraintes dans l'organisation des rencontres praxéologiques. Mais ces notions participent l'une et l'autre de la *problématique de base* en didactique : appliquée à l'enjeu didactique $\wp$ et à l'institution enseignée X, sous les contraintes K, cette problématique revient à s'interroger sur les systèmes de conditions $\hat{C}$ vérifiant $\Re(K, \hat{C}, \wp, X)$, donc à étudier l'ensemble $\{\hat{C} \mid \Re(K, \hat{C}, \wp, X)\}$. Ce qui est premier, donc, c'est l'entité praxéologique $\wp$: celle-ci étant fixée, on cherche un système de conditions $\hat{C}$ tel que $\Re(K, \hat{C}, \wp, X)$.

Pour dire les choses autrement, l'un et l'autre types d'organisations didactiques sont *praxéologiquement finalisés*. Pour cela, ils ont moins pour but d'étudier une certaine question Q que de faire rencontrer, à travers une certaine étude de cette question, des praxéologies *fixées à l'avance*. Un PER finalisé apparaît ainsi comme un voyage organisé dont la trajectoire doit passer nécessairement par certaines praxéologies désignées par avance comme à visiter absolument. Il y a là le risque que l'étude de la question Q ne soit plus alors qu'une feinte et un alibi et ne détermine pas véritablement le parcours suivi. Loin d'exprimer la logique intrinsèque de l'étude de la question *Q*, l'organisation de l'étude est alors soumise à des logiques extrinsèques, celles des programmes ou des modes scolaires, par exemple, dont la signification et la portée échappent généralement à *X*, qui n'en saisit pas le principe organisateur, ce qui va à rebours d'une véritable éducation intellectuelle. Ce constat va conduire à un nouveau desserrement de contraintes.

1.2. Visite de savoirs ou questionnement du monde ?

La problématique de base en didactique amène à identifier un certain système $\hat{C}$ de conditions avec l'idée que l'on aurait $\Re(K, \hat{C}, \wp, X)$. Déterminer s'il en est bien ainsi est un cas particulier du problème consistant à déterminer l'ensemble $\{\hat{\wp} \mid \Re(K, \hat{C}, \hat{\wp}, X)\}$ des praxéologies que, sous les contraintes *K*, les conditions $\hat{C}$ conduisent *X* à rencontrer : on aura $\Re(K, \hat{C}, \wp, X)$ si et seulement si $\wp \in \{\hat{\wp} \mid \Re(K, \hat{C}, \hat{\wp}, X)\}$. On passe ainsi de la problématique *de base* à la problématique *possibiliste* en didactique : étant donné un système *C* de conditions, avec quelles praxéologies ces conditions vont-elles provoquer la rencontre ?

Quand on soulève une telle question, on s'aperçoit que, en un PER praxéologiquement finalisé, nombre de rencontres que l'étude de la question génératrice *Q pourraient* déterminer de façon intrinsèque sont en fait ignorées, évitées, dépréciées, refoulées. Il en est ainsi non seulement s'agissant de praxéologies $\hat{\wp}$ que, bien qu'elles relèvent de la discipline $\check{D}$, *il n'était pas prévu de visiter*, mais aussi et surtout de praxéologies *réputées ne pas appartenir à* $\check{D}$, par exemple de praxéologies tenues pour « non mathématiques » dans la classe de mathématiques, pour « non linguistiques » dans une classe de langue, etc.

Les contraintes ainsi imposées de façon plus ou moins subreptice par la discipline $\check{D}$ ne sont pas les seules à peser sur l'étude de *Q* jusqu'à pouvoir la fausser ou la marginaliser ; car *tous les niveaux* de l'échelle de codétermination didactique (ci-après) peuvent au vrai contribuer à cette dérive : Civilisation $\leftrightarrows$ Société $\leftrightarrows$ École $\leftrightarrows$ Pédagogie $\leftrightarrows$ Discipline.

Nous ne mentionnerons ici qu'une de ces contraintes, essentielle, qui s'identifie au *paradigme de l'étude scolaire* régnant, lequel définit le « contrat » passé entre société et école. S'agissant de la plupart des écoles (celle des études secondaires notamment), ce paradigme est celui *de la* *visite des œuvres*, regardées en général comme des *savoirs* : l'école a rempli son contrat vis-à-vis de la société lorsqu'elle a fait visiter aux élèves une série de savoirs désignés à l'avance. À ce paradigme dominant s'oppose le paradigme *du questionnement du monde*, dans lequel le contrat entre société et école se formule, non en termes de savoirs à visiter, mais en termes de *questions à étudier*, les savoirs reconnus et, plus généralement, les praxéologies *utiles* à l'étude d'une question étant regardés comme des moyens au service d'une fin. Si l'on se projette dans un univers scolaire régi par un tel paradigme, on voit que les contraintes de discipline, qui ne cessent pas d'exister pour autant, ne sont plus premières : l'*utilité praxéologique* prend le pas sur la célébration des savoirs établis. L'étude de *Q*, *l'enquête sur Q*, devient *codisciplinaire* : elle met en synergie, en fonction des besoins, des praxéologies relevant d'une multiplicité de disciplines $\check{D}_k$, voire des praxéologies « infra-disciplinaires », n'ayant pas d'affiliation disciplinaire reconnue.

Le paradigme du questionnement du monde a, en principe, sa terre d'élection, à savoir l'ensemble des institutions qui se vouent à la « recherche », même si quelques-unes d'entre elles se laissent parfois contaminer plus que de raison par le paradigme scolaire de la visite des œuvres. L'exploration de la notion d'*enquête sur une question* – qu'on nommera, pour des raisons évidentes, *enquête codisciplinaire* – doit aller de pair avec l'exploration des conditions d'avènement du paradigme du questionnement du monde dans les institutions scolaires qui lui sont aujourd'hui très largement fermées, et ceci pour au moins deux motifs : d'une part, l'étude de l'écologie et de l'économie des PER *finalisés* ne peut progresser si l'on n'identifie pas les contraintes qui, clandestinement ou non, pèsent d'une façon incontrôlée (et parfois dirimante) sur leur conception et leur réalisation ; d'autre part, l'étude de l'écologie et de l'économie des *enquêtes codisciplinaires* est indispensable pour avancer dans la compréhension des changements nécessaires à l'avènement éventuel, dans l'ordre scolaire régnant, du paradigme du questionnement du monde. C'est dans cette perspective que le travail présenté ici entend s'inscrire.

2. Des terrains pour la clinique de l'enquête

2.1. Quels terrains ? Narrations d'enquêtes

L'organisation du rapport du chercheur à son objet d'étude constitue un problème fondamental de la recherche. Lorsqu'on veut faire la clinique d'un type de pratiques (et donc de praxéologies), il convient de se donner des « terrains » où ces pratiques se développent et soient au moins partiellement observables. S'agissant de la clinique de l'enquête, un premier type de terrains est celui des enquêtes *faites*. Un premier sous-type est constitué, en ce cas, des publications proposant ce qu'on peut regarder comme un *compte rendu d'enquête* par l'auteur même de l'enquête. On trouvera ainsi dans la thèse de Caroline Ladage (2008, partie 1) une analyse clinique d'un travail d'enquête portant sur Google et l'Internet (Cassin, 2007).

Un second sous-type de terrains est celui des récits d'enquête dus à un narrateur autre que l'auteur. Nous illustrerons ce cas par un bref exemple qui aura le mérite de souligner la distance qui peut séparer le paradigme de la visite des œuvres du paradigme du questionnement du monde : l'exemple de Louis Pasteur (1822-1895), chimiste de formation, aux prises avec la maladie du ver à soie qui, vers 1865, ravage une industrie naguère florissante dans toute une partie du sud-est de la France. Ancien ministre de l'agriculture, Jean-Baptiste Dumas (1800-1884), sommité de la chimie et protecteur de Pasteur, se tourne vers celui-ci pour le presser d'étudier le problème. Pasteur commence par refuser car, dit-il, il ne connaît rien en la matière. Dumas rétorque : « Tant mieux, vous n'aurez d'idées que celles qui viennent de vos propres observations. » Pasteur va finalement accepter. L'enquête durera six ans ; elle le conduit à s'engager dans un domaine qu'il ignore d'abord entièrement, celui des maladies infectieuses. Il ne connaît rien non plus au ver à soie. Il se rend donc à Avignon chez Jean-Henri Fabre (1823-1915), le plus grand spécialiste français en ce domaine, afin d'acquérir des connaissances de base. Le récit de cette visite, fait par Fabre lui-même dans ses *Souvenirs entomologiques* (1879-1913), s'ouvre sur cette réflexion cruciale (cité par Lambrichs, 1993) :

> ... l'ignorance peut avoir du bon ; loin des chemins battus le nouveau se rencontre. Un de nos plus illustres maîtres, qui ne se doutait guère de la leçon donnée, me l'avait appris autrefois. À l'improviste, un jour, sonnait à ma porte Pasteur, celui-là même qui devait acquérir bientôt célébrité si grande. Son nom m'était connu. J'avais lu du savant le beau travail sur la dissymétrie de l'acide tartrique ; j'avais suivi avec le plus vif intérêt ses recherches sur la génération des Infusoires. (p. 335)

Voici alors le récit de l'entrevue et le commentaire que cela inspire à Fabre :

> Quelques paroles s'échangent sur le mal qui sévit ; et, sans autre préambule :
> – Je désirerais voir des cocons, fait mon visiteur ; je n'en ai jamais vu, je ne les connais que de nom. Pourriez-vous m'en procurer ?
> – Rien de plus facile. Mon propriétaire fait précisément le commerce des cocons, et nous sommes porte à porte. Veuillez m'attendre un instant, et je reviens avec ce que vous désirez.
> En quatre pas, je cours chez le voisin, où je me bourre les poches de cocons. À mon retour, je les présente au savant. Il en prend un, le tourne, le retourne entre les doigts ; curieusement il l'examine comme nous le ferions d'un objet singulier venu de l'autre bout du monde. Il l'agite devant l'oreille.
> – Cela sonne, dit-il tout surpris, il y a quelque chose là-dedans.
> – Mais oui.
> – Et quoi donc ?
> – La chrysalide.
> – Comment, la chrysalide ?
> – Je veux dire l'espèce de momie en laquelle se change la chenille avant de devenir papillon.
> – Et dans tout cocon il y a une de ces choses-là ?
> – Évidemment, c'est pour la sauvegarde de la chrysalide que la chenille a filé.
> – Ah !
> Et, sans plus, les cocons passèrent dans la poche du savant, qui devait s'instruire à loisir de cette grande nouveauté, la chrysalide. Cette magnifique assurance me frappa. Ignorant chenille, cocon, chrysalide, métamorphose, Pasteur venait régénérer le ver à soie. Les antiques

> gymnastes se présentaient nus au combat. Génial lutteur contre le fléau des magnaneries, lui pareillement accourait à la bataille tout nu, c'est-à-dire dépourvu des plus simples notions sur l'insecte à tirer du péril. J'étais abasourdi ; mieux que cela, j'étais émerveillé. (pp. 336-337)

D'une façon exemplaire, Fabre tire de là une leçon que la théorie de l'enquête et des PER se doit, croyons-nous, d'intégrer à son corpus :

> Il ne sait rien de la transformation des insectes ; pour la première fois il vient de voir un cocon et d'apprendre que dans ce cocon il y a quelque chose, ébauche du papillon futur ; il ignore ce que sait le moindre écolier de nos campagnes méridionales : et ce novice, dont les naïves demandes me surprennent tant, va révolutionner l'hygiène des magnaneries ; il révolutionnera de même la médecine et l'hygiène générale.
>
> Son arme est l'idée, insoucieuse des détails et planant sur l'ensemble. Que lui importent métamorphoses, larves, nymphes, cocons, pupes, chrysalides, et les mille petits secrets de l'entomologie ! En son problème, peut-être, convient-il d'ignorer tout cela. Les idées conservent mieux leur indépendance et leur audacieuse envolée ; les mouvements seront plus libres, affranchis des lisières du connu. (pp. 336-337)

On dira que ce récit nous confronte au meilleur de l'esprit de recherche. Cela, croyons-nous, ne donne que plus de prix à ses enseignements.

2.2. Quels terrains ? Observations proches

Un autre type de terrains est constitué par des terrains rapprochés, « adjacents » à l'activité du chercheur à un titre ou à un autre. Le premier sous-type, qu'on ne saurait négliger en invoquant ingénument le nom d'Heisenberg, est celui de l'expérience *personnelle* du chercheur. Dans le désert culturel où la recherche doit se développer ici, il semble indispensable que le chercheur se livre *personnellement* à des enquêtes et en analyse le développement : observer et même diriger (ou superviser) l'enquête d'autrui ne saurait remplacer le fait d'enquêter *en première personne* (la réciproque étant également vraie, bien sûr). Le travail d'une équipe de recherche en didactique de l'enquête autour d'une enquête conduite ès qualités par les membres de l'équipe nous paraît être une technique utile pour identifier de nombreux problèmes de l'enquête codisciplinaire.

Un second sous-type est constitué par ces enquêtes que le chercheur peut – par exemple en tant qu'enseignant, formateur ou responsable de formation, lorsqu'il assume par ailleurs une telle fonction –, provoquer régulièrement, dans le cadre d'une validation par exemple, chez des étudiants ou des personnes en formation (Ladage & Chevallard, sous presse). Nous ne développerons pas davantage, ici, la question de ces « terrains cliniques adjacents », tout en soulignant l'intérêt de leur création et de leur suivi.

2.3. Quels terrains ? Observatoires dédiés

La création *ab ovo* d'un terrain d'observation est en règle générale une solution plus coûteuse que celles précédemment évoquées. Une telle entreprise, qu'il convient chaque fois de lancer expressément, doit revêtir (ou du moins acquérir assez vite) une signification attractive pour l'institution de référence dont certains des sujets seront les « enquêteurs » donnant vie à l'observatoire. Cette création, nécessairement bipartite, est pour cela même clivée entre deux pôles d'intérêt, qui doivent l'un et l'autre trouver authentiquement une satisfaction effective dans la coopération entreprise et poursuivie.

L'observatoire que nous évoquerons dans ce qui suit a été créé au sein d'un collège de Marseille (France) et a fonctionné d'abord durant l'année 2008-2009. Vis-à-vis de l'institution d'accueil – le collège partenaire [1] –, il a, cette année-là, pris la forme d'un *atelier* occupant un créneau hebdomadaire de deux heures (le vendredi, de 13 h 30 à 15 h 30) en alternance avec d'autres activités sur lesquelles il avait priorité. Cet atelier proposait à des élèves volontaires des classes de 4^e^ de l'établissement une offre de formation en partie inédite, voire quelque peu insolite (ce qui participait de son attractivité), mais pour une part aussi articulée à la formation prodiguée dans le collège à ces mêmes élèves durant les séances où l'atelier ne fonctionnait pas [2]. En l'espèce, le créneau de deux

1. Il s'agit de l'un des collèges déclarés « Ambition réussite » par le Ministère de l'Éducation nationale. À cause des difficultés objectives qui les affectent, les collèges entrant dans cette catégorie reçoivent une aide particulière. En 2008-2009, relevaient de cette catégorie 254 collèges publics et 12 collèges privés, dont 24, soit 9 %, se trouvaient à Marseille.

2. L'atelier n'a fonctionné que durant neuf séances en tout.

heures était normalement dévolu à la formation des élèves concernés – une dizaine en 2008-2009 – à l'informatique et à l'Internet, alors que l'atelier lui-même s'intitulait *Atelier « Enquêtes sur Internet »*.

Désignons par X les élèves de l'atelier, par Y ses animateurs ; la problématique de travail de l'atelier peut alors être formulée simplement ainsi : une question Q étant proposée, l'atelier se constitue en un système didactique $S(X\,;Y\,;Q)$, l'enquête à mener devant en principe apporter une réponse $R^{\heartsuit}$ à la question Q, ce qu'on peut décrire à l'aide du schéma herbartien semi-développé $[S(X\,;Y\,;Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, où le milieu M est limité par principe aux ressources disponibles sur Internet (chaque élève disposant d'un ordinateur connecté).

De multiples contraintes – nous en examinerons quelques-unes ci-après – conspirent à entraver le développement de ce type d'activités. C'est ainsi que la définition relativement imprécise du contrat liant l'atelier à l'institution d'accueil, qui en un sens permet de faire vivre localement le paradigme du questionnement du monde, peut à l'inverse avoir des aspects négatifs. Une modification décidée par l'établissement et jugée par lui scolairement ou pédagogiquement anodine peut ainsi se révéler invalidante pour l'atelier. Tel changement d'horaire – passer du début de l'après-midi à la fin de l'après-midi par exemple – peut ainsi avoir des conséquences ravageuses sur le « recrutement » des élèves ou sur la disponibilité des personnels. L'atelier est ainsi une institution fragile, précaire, qui doit vivre dans l'instant. Il n'en est pas moins vrai que, ayant eu, à la fin de l'année 2008-2009, à remplir une fiche « d'auto-évaluation », les responsables de l'atelier ont apporté les précisions suivantes, qui parlent d'elles-mêmes :

4. Objectifs

- permettre aux élèves de devenir les acteurs d'une « pédagogie de l'enquête » : *atteint*
- familiariser les élèves avec les principes et les savoir-faire d'un usage raisonné d'Internet : *atteint*
- initier des professeurs à la conception et à la réalisation d'actions pédagogiques de ce type : *non atteint*

5. Ce qui a favorisé et/ou ce qui a entravé l'action

– Accueil bienveillant de la direction de l'établissement et moyens dévolus à l'action (salle multimédia, créneau horaire adapté), bonne volonté des élèves, concours sans faille d'une petite équipe dont les membres (« extérieurs » et « intérieurs ») ont vite appris à travailler ensemble.
– Ergonomie de la salle multimédia utilisée qui, conçue pour le travail individuel des élèves, a pu freiner le travail collectif visé.

3. Enquêter sur Internet

3.1. Le destin des questions

Les questions que l'on peut se poser à propos du déroulement d'une enquête sont légion. On peut notamment s'interroger sur la mésogenèse (comment se constitue le milieu M ?), sur la chronogenèse (selon quelles successions l'enquête se construit-elle et comment prend-elle fin ?), sur la topogenèse (quels rôles X et Y auront-ils assumés, à quel niveau de responsabilité ?). Dans ce qui suit, nous choisirons de porter notre attention sur le « destin » des *questions* au sein de l'atelier. La façon dont une question étudiée est traitée est en effet au cœur de l'analyse des praxéologies de l'enquête.

Notons d'emblée deux destins possibles – et communs – d'une question. Dans le premier, la question est simplement ignorée et meurt sitôt que née : il y a ainsi des multitudes de questions mort-nées. Dans le second, la question meurt parce qu'une réponse lui est apportée : « la réponse est le malheur de la question », remarquait naguère Maurice Blanchot (1969). Plus vite une réponse arrive, plus vite la question s'efface : c'est là pour l'essentiel le destin des questions dans un certain type d'enseignement qui ne fait droit aux questions que pour les effacer aussitôt, méthodiquement, selon le *schéma herbartien dégénéré* qui s'écrit $S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, avec $R^{\heartsuit} = R^{\lozenge}_{Y}$, où $R^{\lozenge}_{Y}$ est la réponse « estampillée » apportée toute faite par Y.

Par contraste, la notion d'enquête est là pour désigner l'espace intermédiaire entre ces deux destins extrêmes : tant qu'il y a enquête sur une question, cette question demeure vivante ; si, en outre, on considère qu'une enquête peut toujours être reprise, relancée, alors la question est indéfiniment promise à revivre. Tel est l'espace que les pratiques d'enquête tendent à occuper et que nous explorerons plus concrètement dans le cas de l'atelier « Enquêtes sur Internet ».

L'une des notions clés à mobiliser à cet égard est celle de *degré d'approfondissement* d'une enquête (ou d'une étude). Ce degré est nul dans le cas où la question est mort-née, et proche de zéro lorsqu'une réponse de première prise lui est apportée « toute faite », comme il en va *par exemple* dans le cas suivant, emprunté à un opuscule destiné à des lycéens français, élèves des classes de première économique et sociale (Collectif rue des écoles, 2006) :

> **Comment les messages nerveux se transmettent-ils au niveau des synapses ?**
>
> Le message nerveux se propage le long des fibres nerveuses et se transmet d'un neurone à l'autre au niveau d'une *synapse*. Cette communication ne peut se faire que dans un seul sens. Lorsque le message nerveux arrive à l'extrémité de l'axone pré-synaptique, il déclenche la libération de substances chimiques : les *neurotransmetteurs*. Ces molécules se fixent alors sur des récepteurs spécifiques situés sur la membrane du neurone post-synaptique, ce qui peut, selon la nature du neurotransmetteur, faire naître un nouveau message électrique. (p. 11)

Dans le cas d'une enquête sur la question concernée, ce petit texte devrait être regardé, non comme proposant une réponse $R^{\heartsuit}$ provisoirement terminale, mais simplement comme portant en lui *l'une* des réponses $R^{\Diamond}$ qui apparaissent dans le *schéma herbartien développé* reproduit ci-après :

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Le degré d'approfondissement d'une enquête est corrélé avec l'importance des rencontres réalisées avec des réponses $R^{\Diamond}$ et, plus généralement, avec des œuvres O : c'est en enquêtant que l'on devient « savant ». L'approfondissement de l'enquête est corrélé aussi avec la qualité de la réponse $R^{\heartsuit}$ élaborée, dans la mesure notamment où la fiabilité de $R^{\heartsuit}$ dépend de la richesse et de la pertinence de la dialectique des médias et des milieux à laquelle elle aura été soumise. En outre, cet approfondissement, et cela est crucial, est déterminé en grande partie, ainsi qu'on le verra, par les *questions* que l'on rencontrera – les questions sont des œuvres d'un genre particulier, particulièrement précieux – et par le « traitement » qui en sera fait.

3.2. Questions génératrices et questions engendrées

Les questions sur lesquelles des enquêtes ont été conduites dans l'atelier ont été proposées par les animateurs de l'atelier [3]. Avant même la nature de ces questions, c'est leur *petit nombre* qui peut surprendre le profane : en 2008-2009, en quelque 18 heures d'atelier, seules *quatre* questions ont été étudiées ; en 2009-2010, deux questions ont été abordées en quatre séances. Bien entendu, c'est d'abord la *durée de l'étude*, liée à la rupture avec le schéma herbartien dégénéré, qui explique la chose. Les quatre questions étudiées en 2008-2009 étaient les suivantes :

1. Un *milliard* (de dollars), c'est *mille* millions (de dollars) ; mais qu'est-ce qu'un *trillion* (de dollars) ?
2. Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ?
3. Pourquoi l'oignon fait-il pleurer ?
4. Est-il vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIXe siècle ?

Les deux questions examinées au premier trimestre de l'année 2009-2010 (avec un groupe d'élèves un peu moins nombreux) ont été d'abord formulées ainsi :

5. Quelle est la 500e décimale de π ?
6. Pourquoi (et de combien) le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ?

Il est intéressant de noter que ces deux dernières questions ont été explicitées aussitôt par les animateurs de l'atelier sous la forme suivante, qui rappelle à chacun le contrat relatif à la construction du milieu didactique *M* :

5′. Quelle réponse les ressources disponibles sur Internet permettent-elles d'apporter à la question « Quelle est la 500e décimale de π ? » ?

3. Une fois l'atelier lancé, des suggestions ont été sollicitées des élèves ; mais le temps a finalement manqué pour aborder les questions ainsi recueillies.

6′. Quelle réponse les ressources disponibles sur Internet permettent-elles d'apporter à la question « Pourquoi (et de combien) le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ? » ?

La première question que posent ces questions Q, en pratique, est celle-ci : va-t-on trouver sur Internet des réponses $R^\Diamond$ à Q ? Qui ne s'est jamais penché sur la question 5 (« Quelle est la 500e décimale de π ? ») peut ainsi hésiter à se prononcer avant de se lancer à la recherche de telles réponses $R^\Diamond$. En fait, on trouve sur Internet plusieurs documents promettant implicitement d'apporter réponse à la question posée. Telle page Web propose ainsi « 2400 décimales de π » ; on en a reproduit ci-après, *ne varietur*, les quelques premières centaines (voir aussi http://trucsmaths.free.fr/images/pi/pi2400.htm) :

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375
105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067
982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128
481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964
428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145
648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273 724
587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892
590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951 941 511 609 433 057
270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462
379 962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129…

Mais une question surgit alors : *Comment détecter la* 500e *décimale dans ce tableau ?* On tient là un exemple typique de *question engendrée par l'enquête* : à côté des *questions génératrices* des enquêtes (les six questions reproduites ci-dessus), l'atelier doit ainsi se positionner par rapport à une foule de questions « secondes ».

En ce point le destin des questions est de nouveau en jeu. Dans l'enquête sur une question Q, il n'est que trop facile, en effet, de « maltraiter » une question engendrée, et cela parce que, déjà, elle n'est pas l'enjeu didactique – elle apparaît comme un simple moyen au service d'une fin autre. Ici, par exemple, on peut être tenté de délaisser le document rencontré et s'efforcer de trouver des documents ne présentant pas le même problème (on découvrira qu'il en existe). Mais on peut aussi revenir subrepticement au schéma herbartien dégénéré, les animateurs fournissant alors *toute faite* leur réponse − difficulté sur laquelle nous allons revenir. L'attention au *destin* des questions est ainsi un problème *toujours vif*, au sein même d'un lieu officiellement voué à leur permettre de « s'épanouir ».

3.3. Les ressources disponibles et leur exploitation

Il arrive que l'on soit confronté à une *absence* de réponses. Tel a été le cas à propos de la question 4 : « Est-il vrai que les batailles sont devenues plus meurtrières au XIX^e^ siècle ? » Dans ce cas, les ressources de l'Internet ont permis toutefois de rassembler des données numériques permettant, par une étude appropriée, de parvenir finalement à une réponse. Celle-ci laisse apercevoir certains des moyens mobilisés pour la construire :

> Il semble en effet que les batailles du XIX^e^ siècle et au-delà (premières décennies du XX^e^ siècle) aient été plus meurtrières que les batailles du XVIII^e^ siècle. Sur un échantillon de 65 batailles du XVIII^e^ siècle dont le nombre de victimes est donné par Wikipédia (article « Liste des batailles du XVIII^e^ siècle »), la moyenne calculée (avec le tableur en ligne *MathSheet*) est d'environ 7230. Par contraste, sur un échantillon de 85 batailles du XIX^e^ siècle ou du début du XX^e^ siècle dont le nombre de victimes est donné par Wikipédia, la moyenne calculée de la même façon est d'environ 72 300 : elle est donc dix fois supérieure environ ! Si, pour éliminer l'effet éventuel des « grands nombres » (certaines batailles de la Première Guerre Mondiale ont pu faire jusqu'à un million de victimes), on élague les deux séries de nombres en éliminant les dix plus petites valeurs et les dix plus grandes, on retrouve un résultat analogue : la moyenne de la série élaguée relative aux batailles du XVIII^e^ siècle est d'environ 4300 tandis que la moyenne de la série élaguée relative aux batailles du XIX^e^-début XX^e^ est de plus de 20 000. La réponse apportée paraît raisonnablement sûre : les batailles sont devenues plus meurtrières à partir du XIX^e^ siècle.

Par-delà la simple absence de réponses $R^\Diamond$ – qui pourrait pousser à « écraser » la question Q –, on rencontre aussi des *pénuries* de réponses, qui peuvent prendre la forme paradoxale − et redoutable − d'une *profusion* de documents recopiant plus ou moins la *même* réponse fondamentale. En quelques cas, faute d'avancées scientifiques fraîches, la réponse à laquelle on parvient ne peut être tranchée. Ainsi, s'agissant de la question 2 (« Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ? »), la réponse apportée commence-t-elle par ces mots : « Sur cette question, on ne possède que des théories plus ou moins acceptées. » Dans d'autres cas, des découvertes assez récentes rendent disponibles des réponses $R^{\lozenge}$ plus élaborées (et mieux contrôlées). Ainsi en va-t-il avec la question 3 (« Pourquoi l'oignon fait-il pleurer ? »). Dans ce cas, l'atelier a finalement pris le parti d'*adapter en français* la réponse (dont la version originale était rédigée en anglais) qui a été jugée la plus affûtée ; voici à titre d'exemple le fruit de ce travail d'adaptation :

> **L'explication scientifique du fait que l'oignon fait pleurer**
>
> L'explication la plus commune semble la suivante. Quand on coupe un oignon, un gaz se dégage des cellules qui ont été écrasées par la lame du couteau. Ce gaz se propage dans l'air et entre en contact avec l'eau qui se trouve à la surface des yeux de la personne. Ce contact engendre de l'acide sulfurique. Bien que cet acide soit dilué, il est encore assez fort pour provoquer des larmes dont la fonction est d'éliminer ce produit irritant.
>
> Cette théorie de base a été complétée assez récemment (2002). Quand on tranche un oignon, même avec un couteau bien aiguisé, on écrase certaines cellules. Celles-ci contiennent certains produits soufrés, dont le produit A, ainsi que deux enzymes qui sont normalement séparées des produits soufrés. Une de ces enzymes est B et la deuxième, qui n'a été découverte qu'en 2002 par une équipe japonaise, est appelée C.
>
> Quand les deux enzymes entrent en contact avec ces produits soufrés, elles produisent des acides qui, à leur tour, sont « cassés » pour donner un composé volatile, l'oxyde de propanéthial, qui, sous forme gazeuse, va aller vers les yeux de la victime.
>
> En ce point, les spécialistes avancent deux théories. Selon la première, c'est le gaz lui-même qui, en agissant sur les terminaisons nerveuses de la cornée, fait que celles-ci déclenchent des larmes. Selon une seconde théorie, aujourd'hui dominante, l'oxyde de propanéthial produit au

> contact de l'eau de la cornée divers produits dont de l'acide sulfurique ; et c'est l'irritation provoquée par cet acide sulfurique qui produit les larmes. Ajoutons que la cuisson détruit les deux enzymes, raison pour laquelle l'oignon cuit ne fait pas pleurer.

On aura noté en passant le maniement concret de la *dialectique des boîtes noires et des boîtes claires* : certains « noms difficiles » ont été ici entièrement écartés, d'autres ont été remplacés par les lettres A, B et C, l'essentiel de l'explication étant cependant préservé [4].

3.4. « Qu'est-ce qu'un trillion ? »

Dans le cas du caractère meurtrier des guerres, une partie essentielle du travail a été faite par l'atelier. À l'opposé, dans le cas de l'oignon-qui-fait-pleurer, l'atelier a dû se contenter de suivre aussi fidèlement que possible l'exposé de travaux scientifiques spécialisés. La question 1 (« Qu'est-ce qu'un *trillion* ? ») fournit un cas intermédiaire plus complexe, où la *dialectique des médias et des milieux* a joué un rôle exemplaire pour aboutir à l'enquête la plus approfondie conduite dans l'atelier.

Dans une première étape, les élèves recherchent banalement la définition du mot *trillion* dans des dictionnaires en ligne de la langue française. Cette étape, qui comporte plusieurs sous-étapes, aboutit à la conclusion suivante : un trillion, ce serait – d'après les dictionnaires consultés – un *milliard de milliards*, nombre qui s'écrit avec 18 zéros et peut se noter 10^{18}. Là se produit pourtant un incident critique : une élève a rencontré un article paru dans un grand quotidien économique français dans lequel on précise aux lecteurs qu'un trillion, c'est *mille* milliards, soit 10^{12}. Comment expliquer ce désaccord ? Les rencontres faites sur Internet ont mis en circulation dans l'atelier, d'abord à bas bruit (parmi les élèves), ensuite plus explicitement, cette idée que, en anglais, *trillion* signifierait *mille* milliards tandis que, en français, le même mot désignerait un *milliard* de milliards.

4. Le produit A est désigné en anglais sous le nom de *S*-1-*propenylcysteine-sulphoxide*, l'enzyme B est l'*allinase*, l'enzyme C a été baptisée (toujours en anglais) *lachrymatory-factor synthase*.

La vérification de cette hypothèse, que l'atelier entreprend alors, se heurte bientôt à un nouvel incident critique : dans le dictionnaire d'Émile Littré, paru vers 1870, *trillion* signifie *mille* milliards, « comme en anglais ». Entre le français d'hier (où trillion = 10^{12}) et le français d'aujourd'hui (où trillion = 10^{18}), il se serait donc passé quelque chose. Mais quoi ? Une recherche délicate, hésitante, conduira finalement l'atelier à une conclusion que la réponse finale restituera ainsi :

- En français, il y a eu un changement entre le système de Littré et le système actuel : on a suivi la proposition (non adoptée par elle) de la conférence générale des poids et mesures de 1948. C'est ainsi que le mot trillion qui désignait autrefois 10^{12} s'est mis à désigner ensuite 10^{18}.
- Le mot « trillion » a reçu en français le sens légal de 10^{18} par un décret du premier ministre du 3 mai 1961 entré en vigueur le 1^er^ janvier 1962. Depuis cette date, parler par exemple de « 3,69 trillions » c'est parler, selon la loi, du nombre qu'on écrit aussi $3{,}69 \times 10^{18}$.

Cette rédaction est le fruit d'un grand nombre de « gestes d'enquête ». Il a fallu ainsi découvrir (et comprendre) que, lors de la conférence générale des poids et mesures de 1948, il avait été prévu de débattre d'un projet préconisant l'échelle longue (puissances de 10^6) au détriment de l'échelle courte (puissances de 10^3), mais que cet examen n'eut finalement pas lieu. Il a fallu ensuite, sur la base d'indications fragmentaires, retrouver le décret du premier ministre du 3 mai 1961 et y rechercher – non sans difficultés – l'indication formelle du passage officiel à l'échelle longue en France. L'atelier s'est même penché sur le code pénal pour y dénicher les sanctions réservées – en principe ! – aux usages fautifs (« anglo-saxons ») du mot trillion dans un texte en français. On ne s'étonnera pas, alors, que l'enquête se soit étalée sur les cinq premières séances de l'atelier : entre une enquête qu'on arrête après avoir consulté le premier dictionnaire venu et le travail réalisé par l'atelier en ce cas, la distance est immense.

4. L’engagement des élèves

4.1. Vers une culture du questionnement ?

Que l’on soit *X* ou *Y*, on ne passe pas aisément d’une culture de la visite des œuvres à une culture du questionnement et de l’enquête. Celle-ci suppose par exemple la mise en œuvre des *sept dialectiques de l’enquête*[5], qui rompent sensiblement avec la culture scolaire actuelle de la visite des œuvres.

La construction d’une *pédagogie de l’enquête* va de pair avec l’entrée de *X* et de *Y* dans un *type de tâches* fondateur qu’on peut noter H_Q et formuler ainsi : « enquêter sur la question *Q* pour lui apporter une réponse $R^{\heartsuit}$ satisfaisant certaines contraintes » (la lettre *H* est l’initiale du grec *historia*, « enquête »). Il s’agit là d’un type de tâches *coopératif* : l’accomplissement des tâches de ce type suppose la coopération de *X* et *Y*. Dans une enquête sur *Q*, chacun des acteurs du système didactique $S(X ; Y ; Q)$ doit donc connaître son *rôle* et disposer des moyens de l’exercer.

Lors de l’étude d’une question *Q* donnée, l’animateur *y* ($\in Y$) de l’atelier doit ainsi se comporter, non comme un « professeur *non directif* », qui n’oserait pas « intervenir », mais comme *le responsable d’une équipe de recherche*, responsable que l’on supposera démocrate et non pas tyrannique, mobilisateur et non pas inhibiteur, mais qui n’en assumera pas moins clairement son rôle : montrer le chemin, aider à le parcourir, apporter tel ou tel élément à la recherche en cours, etc. C’est ainsi que, de même qu’un élève *x* apporte dans le milieu *M* tel ou tel document porteur d’une réponse $R_x^{\Diamond}$, de même *y* pourra apporter une réponse (ou un fragment de réponse), $R_y^{\Diamond}$, laquelle devra être soumise au *même* type de « traitement » que toute autre réponse $R^{\Diamond}$ acceptée dans le milieu *M*.

Ce détail de l’organisation *topogénétique* du travail de l’atelier doit être mis en relation avec la *chronogenèse*. Le temps didactique de la

5. Les six premières dialectiques ont été d’abord dégagées à propos des *travaux personnels encadrés* (TPE) : voir Chevallard, 2002. La septième, dégagée significativement à l’occasion du travail dans et sur l’atelier « Enquêtes sur Internet », est celle *de l’individu et du collectif* (ou dialectique *de l’autonomie et de la synnomie*).

visite des œuvres est du temps d'horloge « comprimé », artificiellement accéléré : les enquêtes conduisant aux réponses $R^{\heartsuit} = R_y^{\lozenge}$ sont en effet essentiellement réalisées *hors de la classe*, parfois sur une très longue période de temps [6]. Par contraste, une pédagogie de l'enquête est normalement une pédagogie *de la lenteur*, que les contraintes scolaires actuelles ne permettent guère de faire vivre adéquatement [7]. À cet égard, l'apport d'un document dont la recherche sur Internet lui aura demandé peut-être plusieurs longues sessions de travail permet à *y* d'augmenter – sous forme cristallisée dans le document proposé – le *temps de travail utile* de l'atelier. Notons que, jusqu'à présent, des contraintes de niveau scolaire ou pédagogique ont en revanche dissuadé les animateurs d'associer les élèves, par le moyen d'un travail accompli *hors* des séances d'atelier stricto sensu, à cet enrichissement du temps de travail disponible.

4.2. Complexités topogénétiques

Pour *y*, la difficulté topogénétique est claire : il doit se modeler un *topos* largement *inédit* et, du même mouvement, induire les élèves à dessiner et à venir occuper un *topos* qui leur devienne propre alors même que les frontières topogénétiques usuelles à l'école s'y trouvent bousculées.

L'exemple peut-être le plus grossier de telles difficultés de pilotage est le suivant. Lors de l'examen d'un document, les élèves butent sur un mot, par exemple *salinité*, ou *inlandsis*. Ils sollicitent *y* à son propos, ce qui est un geste réflexe dans la culture scolaire de la visite des œuvres et la pédagogie de l'enseignant qui lui est associée. De son côté, *y* peut peiner à réprimer le geste réflexe en miroir : fournir *ex abrupto* une explication du mot. Or les questions ainsi soulevées sont des questions *engendrées* par l'étude d'une question génératrice (en ce cas la question Q_6 : « Pourquoi et de combien le réchauffement climatique ferait-il monter le niveau des mers ? ») et devraient donc, par principe, recevoir le même

6. On pourrait ici définir la « valeur temps » d'une réponse, en analogie avec la « valeur travail » selon Marx.

7. La chose devient évidente quand on demande à des étudiants d'université d'enquêter en première personne sur une question donnée au lieu de recevoir toute faite une réponse « magistrale » : voir Ladage & Chevallard, sous presse.

traitement qu'elle, qui ne doit pas être celui associé au schéma herbartien dégénéré.

Ce principe doit être complété par un additif clé, qui est aussi un correctif : le degré d'approfondissement de l'étude d'une question engendrée dépend du rôle qu'elle jouera dans l'étude de la question génératrice, laquelle se révèlera plus ou moins *sensible* à la réponse apportée à la question engendrée. Ce critère, qui pourra en quelques cas susciter des *reprises d'étude* de questions engendrées (pour des besoins d'approfondissement), peut aussi conduire à mettre la question engendrée *en attente d'étude*, ou encore simplement à lui donner une réponse peu travaillée, regardée comme *provisoire*, qui sera par exemple apportée par les élèves au prix de quelques instants de recherche sur Internet. Ainsi la question de la salinité pourra-t-elle être réglée très vite par une formulation express – « Monsieur, c'est la "masse de sels contenue dans 1 kg d'eau de mer", ils disent… » –, alors même qu'une dose d'approfondissement se serait peut-être révélée d'un profit non négligeable pour l'étude de la question génératrice [8]. Bien entendu, on peut penser qu'il revient à *y*, agissant comme directeur d'étude, de décider en dernier ressort ; mais encore faut-il que son « équipe », *X*, *tienne* face à la décision qu'il lui demandera de mettre en œuvre.

4.3. Enjeux didactiques et enjeux instrumentaux

L'existence même de l'atelier a été d'emblée rendue possible par quelques précieuses conditions préalablement réalisées : *docilité pédagogique* des élèves (par contraste avec une certaine *rétivité didactique*, non moins réelle), telle qu'elle est normalement instillée par l'éducation scolaire ordinaire ; *familiarité culturelle* apparente avec la problématique de l'atelier (chacun « sait » par exemple ce qu'est une *question* et ce que peut être une *réponse*) ; enfin *référence presque banale* à l'Internet (à laquelle les élèves devaient en outre s'attendre). Toutes ces conditions sont autant de facteurs favorisant une première réception convenable de l'atelier. À l'inverse, il ne va pas de soi que le changement de problématique, accepté globalement, se trouve clairement situé par les élèves par

8. On s'en rendra compte en parcourant par exemple l'article « Salinité » de l'encyclopédie Wikipédia.

rapport à leurs activités ordinaires au collège, tant ce type d'activité – l'enquête – est scolairement mal identifié. Il y a là une difficulté inévitable, sinon insurmontable, dans une société dont le rapport à la connaissance et à l'ignorance a été façonné par le paradigme scolaire de la visite des œuvres et s'alimente souvent de réponses toutes faites à des questions mal posées, voire introuvables.

En chacun des principaux points critiques d'une enquête « sur Internet » le problème de la *répartition topogénétique* entre *X* et *Y* et, solidairement, de leur *coopération didactique* peut se poser crûment. La question génératrice lancée, la première recherche de réponses sur Internet est clairement assumée par les élèves. L'examen des documents trouvés, d'abord individuel, se réalise ensuite sous la direction de *y*, avec l'aide des autres animateurs. Le repérage des questions « qui se posent » est coopératif. Le sort à réserver à telle de ces questions (mise en attente, étude immédiate rapide, étude plus approfondie, etc.) est, ainsi qu'on l'a vu, décidé par *y*, qui doit pour cela tenir compte de la dynamique de l'étude en cours. Un cycle d'étude recommence donc avec la question engendrée, à moins que l'examen de réponses à la question génératrice ne se poursuive sans attendre. Puis viendra le moment de consigner par écrit un bilan d'étape préparant, après d'autres bilans partiels successifs, la réponse finale.

On ne saurait évidemment attendre que les élèves concernés deviennent comme par enchantement des experts de l'enquête codisciplinaire sur Internet et occupent d'emblée pleinement un *topos* attestant une autonomie *qui leur est refusée partout ailleurs*. Ainsi les rédactions individuelles préparatoires à la rédaction collective d'un fragment de réponse montrent-elles souvent – il est des exceptions – que ce type de tâches, la *synthèse* par écrit d'une activité que l'on vient de réaliser, n'est pas usuellement inscrite dans le *topos* de l'élève. De même, la rédaction d'une réponse à une question « simple » ne va-t-elle nullement de soi. Voici par exemple la reproduction (quelque peu infidèle quant à la forme : dans l'original, la police utilisée était Comic sans MS en taille 24) de la réponse « rédigée » par une élève à la question « Qui est ce Mach dont le nom figure dans l'expression "bande de Mach" ? », question engendrée par l'étude la question 2 (« Pourquoi les insectes de nuit se précipitent-ils sur les sources de lumière ? ») :

> Mach pourrait être Ernst Mach, physicien et philosophe autrichien, qui serait à l'origine des bandes de Mach. Il se serait en effet consacrer a l'étude d'un certain type d'illusions visuel.

C'est ici l'occasion de souligner que, parmi les questions engendrées, figurent nombre de questions dont l'objet est l'*instrumentation* de l'étude, ce dont donne une idée cette liste dressée au cours de la dernière séance de l'atelier 2008-2009, relative uniquement à des types de tâches rencontrés du fait de l'utilisation de l'Internet :

– rechercher et utiliser un dictionnaire en ligne de la langue française (Mediadico, TLFi, Littré, etc.) ;
– rechercher et utiliser une calculatrice en ligne ;
– utiliser Google comme une calculatrice ;
– utiliser le service de traduction de Google ;
– rechercher et utiliser un dictionnaire bilingue anglais/français (Mediadico, Lexilogos, Collins, etc.) ;
– rechercher et utiliser le site *Legifrance* ;
– utiliser la recherche avancée de Google pour effectuer une recherche sur un site donné ;
– utiliser l'encyclopédie en ligne *Wikipédia* (en français) et l'encyclopédie *Wikipedia* (en anglais) et passer de l'une à l'autre à propos de deux articles qui traitent le même sujet ;
– rechercher et utiliser un tableur en ligne.

L'observation naïve montre alors un fait qui doit être regardé d'abord comme une « loi d'airain » de l'organisation topogénétique de l'étude : la dévolution à *X* d'une question à étudier est, toutes choses égales par ailleurs (indépendamment par exemple de la difficulté objective à répondre à cette question), d'autant plus aisée que la question est regardée davantage par *X* comme constituant un enjeu *instrumental* plutôt qu'un enjeu *didactique*. De cela, l'atelier 2009-2010 a fourni une vérification quasi expérimentale. Le groupe devait en effet consigner par écrit, au fur et à mesure, les « outils » praxéologiques mobilisés tout au long de son activité. Lors de la deuxième séance, ainsi, l'atelier a recensé les outils suivants (repérés ici par les types de tâches correspondants) :

1. Créer un fichier texte (.odt), lui donner un nom, le sauvegarder
2. Écrire en gras
3. Centrer un titre
4. Appeler la calculatrice de l'ordinateur, la mettre en mode scientifique
5. Copier ce qu'affiche la calculatrice de l'ordinateur et le coller dans un fichier texte
6. Sélectionner une zone de texte et faire afficher le nombre de caractères qu'elle contient
7. Éliminer les espaces (les « blancs ») dans un texte (à la main ou de façon semi-automatique)
8. Copier un texte dans un nouveau fichier et y éliminer les espaces de façon automatique
9. Télécharger une page Web connaissant son URL (à recopier)
10. Utiliser le *Big online calculator* : http://www.ttmath.org/online_calculator
11. Copier un résultat affiché par le *Big online calculator* et le coller dans un fichier texte
12. Suivre un lien figurant sur une page Web pour accéder à des informations supposées pertinentes
13. Comparer les informations données par des documents différents

Chacun de ces types de tâches est d'abord apparu problématique pour *X*. Plusieurs d'entre eux – les types de tâches 1 à 8 ci-dessus –, posaient problème du fait que les élèves n'étaient pas familiers du traitement de texte qu'ils devaient utiliser. Or, il se trouve *qu'il en allait de même des animateurs*, qui l'ont indiqué aux élèves, en sorte que le problème posé par ces types de tâches problématiques (quoique élémentaires), pour lesquels une technique était recherchée, a été affronté (et résolu, non parfois sans vicissitudes) par *X* et *Y ensemble*, plutôt que par *X* sous la supervision de *Y*.

Le rapport que les élèves ont, à cette occasion, manifesté à l'ignorance collective qui était celle de l'atelier et à la connaissance à conquérir collectivement ne se retrouve cependant qu'en partie – et toujours trop peu au gré de l'observateur pressé de voir la fin de l'histoire ! – lorsqu'ils sont mis face à des questions « didactiques » (plutôt qu'instrumentales), dont ils peuvent continuer de croire – à tort – que, à l'instar de leurs professeurs, les animateurs sont censés détenir la clé depuis toujours. Le problème topogénétique ainsi posé est capital. Il est certes loin d'être résolu. Mais un pas non négligeable nous semble désormais avoir été fait dans sa résolution.

Références

Blanchot, M. (1969). *L'entretien infini*. Paris : Gallimard.

Cassin, B. (2007). *Google-moi. La deuxième mission de l'Amérique*. Paris : Albin Michel.

Chevallard, Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. Dans T. Assude & B. Grugeon (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Collectif rue des écoles (2006). *Enseignement scientifique. Les repères essentiels*. Paris : Rue des écoles.

Ladage, C. (2008). *Étude sur l'écologie et l'économie des praxéologies de la recherche d'information sur Internet. Une contribution à la didactique de l'enquête codisciplinaire* (Thèse de doctorat non publiée). Université Aix-Marseille 1, France.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (sous presse). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & didactique*, *5*(2).

Lambrichs, L. L. (1993). *La vérité médicale. Claude Bernard, Louis Pasteur, Sigmund Freud : légendes et réalités de notre médecine*. Paris : Robert Laffont.

Trotereau, J. (2008). *Pasteur*. Paris : Gallimard.

Un cas d’infrastructure manquante : statistique et probabilités en classe de troisième

Yves Chevallard
UMR P3 ADEF, Université Aix-Marseille 1, France

Floriane Wozniak
LEPS EA 4148, Université Lyon 1, France

Abstract. This study investigates the origins of a problem that arose in a recent workshop when some participants dismissed the proposal to shift from the classical view to the frequentist view in addressing a question related to the teaching of statistics and probability. It highlights the state of confusion that presently affects the notions involved. It emphasizes the lack of and need for an appropriate epistemological and didactic “infrastructure” allowing probability theory to appear as modelling statistical variability.

Resumen. Este estudio examina el origen de un problema que ha surgido recientemente en un taller en el que algunos participantes declinaron la invitación de pasar del punto de vista clásico al punto de vista frecuentista en una cuestión sobre la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Este estudio pone de manifiesto el estado de confusión que afecta actualmente las nociones consideradas. Subraya la falta y la necesidad de una «infraestructura» epistemológica y didáctica apropiada que permita a la teoría de probabilidades aparecer como un modelo de la variabilidad estadística.

Résumé. Cette étude examine l’origine d’un problème qui a récemment surgi lors d’un atelier dans lequel certains participants ont décliné l’invitation de passer du point de vue classique au point de vue fréquentiste dans une question sur l’enseignement de la statistique et des probabilités. Cette étude met en évidence la confusion qui affecte actuellement les notions considérées. Elle souligne le besoin et la nécessité d’une « infrastructure » épistémologique et didactique appropriée qui permette à la théorie des probabilités d’apparaître comme un modèle de la variabilité statistique.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 831-853)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 4. *La dialéctica de los media y los medios*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. L'origine du problème

1.1. Un atelier à l'école d'été de didactique des mathématiques

En août 2009, dans le cadre de la 15e école d'été tenue à Clermont-Ferrand (France), nous avons animé un atelier associé au cours donné en cette même école d'été par Yves Chevallard sous le titre *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. L'atelier lui-même portait ce sous-titre : « L'aléatoire et la variabilité ». La tâche que nous lui avions assignée était d'étudier la question Ω_3 suivante[1] : « Que pourrait être un scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3e aujourd'hui ? » C'est dans ce cadre qu'un problème que nous avions mal anticipé a surgi ; et c'est à tenter d'élucider ce problème que nous consacrerons le présent travail.

1.2. Une question cruciale à propos de la question étudiée

Pour fabriquer le scénario de PER demandé, l'atelier devait lui-même s'engager dans un parcours d'étude et de recherche relatif à la question Ω_3. Si, classiquement, nous désignons par X l'ensemble des « étudiants », c'est-à-dire des participants à l'atelier (qui étaient environ une dizaine), par Y les aides à l'étude et directeurs d'étude, soit les deux auteurs de ces lignes, l'atelier devait fonctionner comme un système didactique $S(X\,;Y\,;\Omega_3)$. Rappelons le classique schéma herbartien « semi-développé » (où M est le *milieu didactique*), suivi de sa forme « développée » :

$$[S(X\,;Y\,;Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}\,;$$
$$[S(X\,;Y\,;Q) \curvearrowright \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}.$$

Les œuvres $R_i^{\Diamond}$ sont des réponses à la question posée, Q, qui vivent dans certaines institutions de la société, et qui auront été amenées dans le milieu M par le système didactique $S(X\,;Y\,;Q)$. Les œuvres notées O_j relèvent d'autres types d'œuvres : ce peuvent être par exemple des théories, des expériences, des questions (les questions sont des créations humaines, à l'égal des théories).

La formulation de la question à étudier, Ω_3, porte en elle une question, Q, qu'on ne peut manquer : « En quoi et comment les probabilités

1. Les élèves de la classe de 3e sont des élèves de 14 ou 15 ans.

modélisent-elles la variabilité statistique ? » L'étude au moins sommaire de cette question *Q* commande l'étude de Ω_3. Or c'est là qu'un problème va surgir ; et c'est là aussi qu'un manque déterminé, dans la culture courante de la noosphère française de l'enseignement des mathématiques, va devenir manifeste.

2. De la variabilité statistique au calcul des probabilités

2.1. La probabilité comme fréquence limite

Quelle réponse peut-on, à un niveau élémentaire, apporter à *Q ?* Imaginons un générateur aléatoire quelconque, ✦ (oméga inversé), et attachons-nous à un certain événement *A* qu'une sortie de ✦ peut ou non réaliser. Supposons que nous envisagions *n* sorties de ✦, avec *n* « assez grand » ; combien de fois pouvons-nous nous attendre à voir l'événement *A* se réaliser ? L'observation montre que ce nombre n_A variera avec la série de *n* sorties observées. Peut-on alors donner au moins une *approximation* de n_A ? La réponse, classique, est positive. Ce dont on peut connaître une approximation, plus exactement, c'est la *fréquence* (relative) n_A/n de réalisation de l'événement *A*. Cette approximation, qu'on peut appeler « fréquence théorique » de *A*, est connue comme étant la *probabilité* de *A*, p_A. De la relation $n_A/n \approx p_A$ on tire alors que $n_A \approx np_A$. Par exemple, si la probabilité de *A* est 40 % et si $n = 178$, alors $n_A \approx 178 \times 40\ \% = 71{,}2$.

On aura noté que l'approximation obtenue est *la même* pour *toutes* les séries de *même* longueur *n*, alors que l'observation montre que le nombre n_A dépend en général de la série parmi l'ensemble des séries de longueur *n* observables. (Bien entendu, la « qualité » de cette approximation dépend de *n*.) Cela s'explique par la nature même du nombre appelé *probabilité*. Celui-ci se définit en effet à partir d'un résultat *expérimental* (et non pas mathématique) : quand le nombre *n* croît « indéfiniment », les fréquences n_A/n semblent « converger » vers un même nombre, p_A, qu'on pourrait appeler « fréquence limite » et qu'on nomme *probabilité* de *A*. C'est là ce qu'on peut appeler la *loi expérimentale des grands nombres*. Le *modèle* de la variabilité statistique adopté est alors celui déjà vu : $n_A/n \approx p_A$. Il est commun à *toutes* les séries de *n* sorties du générateur aléatoire ✦.

2.2. Des manques épistémologiques clés

Ce qui précède fait déjà apparaître des éléments clés *absents* de la culture probabiliste courante de la profession en France. Un point crucial, à cet égard, est le suivant : ici, c'est la probabilité (ou fréquence théorique) qui est regardée intrinsèquement *comme une approximation de la fréquence observable*, et non pas l'inverse, même si la relation d'approximation est symétrique ; et c'est cela – la probabilité comme approximation de la fréquence empirique – qui est central dans la modélisation probabiliste de la variabilité statistique.

Un autre manque essentiel se situe au niveau immédiatement supérieur dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique : non pas, donc, au niveau du *domaine* de la statistique et des probabilités, mais à celui de la *discipline* mathématique tout entière. « Faire des mathématiques », au collège en particulier, doit s'entendre d'abord comme signifiant « fabriquer des mathématiques », et cela doit s'entendre à son tour, en l'espèce, comme signifiant *mathématiser* une réalité *non mathématique,* en constituer une *théorie mathématique,* hypothético-déductive, que ce soit en arithmétique et en algèbre, en géométrie ou en statistique. Sauf à accepter une formidable dégradation épistémologique des mathématiques enseignées, il convient de travailler avec les élèves à fabriquer ces mathématiques comme *mathématisant une réalité non encore mathématisée ou encore faiblement mathématisée*.

Dans le cas de la statistique et des probabilités, on part d'un état de non-mathématisation préalable : la variabilité statistique est d'abord une réalité empirique, expérimentée, expérimentale, *extérieure aux mathématiques*. La loi *expérimentale* des grands nombres évoquée plus haut est, non pas un fait mathématique, mais *un phénomène statistique* qui relève de la *statistique expérimentale,* comme un phénomène physique relève de la physique expérimentale. Pour en arriver à une loi *théorique* des grands nombres, il faudrait avancer *beaucoup* dans la construction d'une théorie probabiliste de la variabilité statistique – beaucoup plus qu'on ne saurait raisonnablement le faire en classe de troisième par exemple.

Ajoutons une remarque encore : lorsqu'on énonce la loi expérimentale des grands nombres, qui est au fondement de la mathématisation de la variabilité statistique, le mot de « convergence » utilisé – « les fréquences convergent vers un certain nombre » – n'a aucune raison de désigner l'une des mathématisations de la métaphore de la convergence (empruntée historiquement à l'optique) préalablement élaborées, par exemple en analyse. Il s'agit là d'une notion prémathématique, *en attente de mathématisation*. Ce qui importera, ultérieurement, c'est que la théorie mathématique construite à partir de la loi expérimentale des grands nombres contienne un théorème – une loi *théorique* des grands nombres – qui confirme théoriquement la loi expérimentale des grands nombres.

2.3. Le calcul des probabilités comme moyen

La loi expérimentale des grands nombres est le point de départ de la statistique théorique, c'est-à-dire de la statistique *mathématisée*. Comment utilise-t-on les probabilités p_A ? Le premier point est le suivant : en règle générale, on dispose, non de p_A, mais d'une *estimation* de p_A. Lorsqu'on dispose donc d'estimations des probabilités des événements A, B et C, on peut *calculer* une estimation de la probabilité d'un événement D qui s'exprime « algébriquement » à l'aide de A, B et C. En usant de la formulation ensembliste des événements, on aura par exemple : $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$. Si on a estimé (empiriquement) que $p_A \approx 40$ %, $p_B \approx 30$ % et $p_{A\cap B} \approx 5$ %, on aura : $p_{A\cup B} \approx 40$ % + 30 % – 5 % = 65 %. Tel est l'intérêt, tel est le rôle premier du *calcul* des probabilités dans l'étude de la variabilité statistique.

2.4. Le calcul des probabilités : ses règles

Comment se forment les *règles* du calcul des probabilités ? Un exemple permettra d'illustrer le principe de cette formation ; considérons la question suivante :

> Un tireur fait mouche dans 80 % des cas ; un autre (placé dans les mêmes conditions), atteint le but dans 70 % des cas. On demande quelle est la probabilité pour que le but soit touché si les deux tireurs le visent simultanément. (On considère que le but est atteint, indifféremment, s'il l'est par une ou par deux balles.)

Lors d'un tir couplé des deux tireurs, désignons par A l'événement « Le premier tireur atteint la cible », par B l'événement « Le second tireur atteint la cible » ; nous voulons connaître la probabilité de l'événement

$C = A \cup B$, « Le premier ou le second tireur atteint la cible ». Comme précédemment, on a d'abord : $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} = 80\,\% + 70\,\% - p_{A\cap B} = 150\,\% - p_{A\cap B}$. Nous ne connaissons pas $p_{A\cap B}$; pour conduire le calcul à son terme, nous allons supposer que les événements A et B sont « indépendants », hypothèse qui se traduit ici par l'égalité $p_{A\cap B} = p_A \times p_B = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56 = 56\,\%$. On a finalement : $p_{A\cup B} = 150\,\% - p_{A\cap B} = 94\,\%$. Tel est donc le résultat obtenu « par le calcul des probabilités » : sur une série de 985 tirs couplés, par exemple, la cible devrait être atteinte environ 925,9 fois. La réalisation de 985 tirs pourra donc *par exemple* se solder par 931 tirs à la cible. Le calcul des probabilités n'est ici qu'un *moyen* pour obtenir une approximation du résultat statistique qu'on pourra ensuite observer empiriquement : il permet de faire une *prédiction*.

Le problème des tireurs à la cible est emprunté à un petit livre des probabilistes russes B. V. Gnedenko (1912-1995) et A. Ia. Khintchine (1894-1959) intitulé *Introduction à la théorie des probabilités* (1964). Voici la solution qu'ils proposent *lorsqu'on ne dispose pas encore du calcul des probabilités* :

> Admettons que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Lors de 80 de ces tirs environ, le but sera atteint par le premier tireur. Restent 20 tirs environ qui sont manqués en ce qui le concerne. Mais nous savons que le second tireur fait mouche en moyenne 70 fois sur 100, c'est-à-dire 7 fois sur 10. Nous pouvons donc escompter que, sur les 20 tirs où le premier tireur manque le but, il l'atteindra, lui, 14 fois environ. Par conséquent, sur 100 tirs couplés, le but sera touché approximativement 80 + 14 = 94 fois. La probabilité pour que le but soit atteint en cas de tir simultané de nos deux tireurs est donc de l'ordre de 94 %, ou 0,94. (p. 9)

Ici, en fait, une série de 100 tirs est regardée comme une très longue série ; mais on pourrait aussi bien reformuler ces solutions en y remplaçant le nombre 100 par l'entier indéterminé n, supposé « aussi grand qu'on veut ». Voici ce qu'on obtiendrait :

> Admettons que les tireurs effectuent n tirs couplés. Lors de 0,8 n de ces tirs environ, le but sera atteint par le premier tireur. Restent 0,2 n tirs environ qui sont manqués en ce qui le concerne. Mais nous savons que le second tireur fait mouche en moyenne 70 fois sur 100, c'est-à-dire 7 fois

> sur 10. Nous pouvons donc escompter que, sur les 0,2 n tirs où le premier tireur manque le but, il l'atteindra, lui, $0{,}7 \times 0{,}2\,n = 0{,}14\,n$ fois environ. Par conséquent, sur n tirs couplés, le but sera touché approximativement $0{,}8\,n + 0{,}14\,n = 0{,}94\,n$ fois. La probabilité pour que le but soit atteint en cas de tir simultané de nos deux tireurs est donc de l'ordre de 94 %, ou 0,94.

Les auteurs ajoutent alors ce commentaire crucial, qui motive l'ensemble de leur ouvrage :

> Le problème que nous venons d'envisager est très simple. Il ne nous en conduit pas moins à une conclusion très importante. Il est souvent utile, en effet, de déterminer la probabilité de certains événements, d'après celle d'autres événements, moins complexes. C'est là un procédé qui trouve de très nombreuses applications dans toutes les sciences et dans tous les domaines d'activité pratique comportant des opérations ou des phénomènes massivement répétés.
>
> Il serait évidemment très malcommode d'avoir, en présence de chaque nouveau problème de ce genre, à définir un mode particulier de solution. La science tend toujours à établir des règles générales, susceptibles d'être appliquées mécaniquement ou quasi mécaniquement à la solution de problèmes similaires.
>
> Dans le domaine des phénomènes caractérisés par une répétition multiple, la science qui s'occupe d'établir de telles règles a nom théorie des probabilités. Le présent ouvrage en expose les fondements. (pp. 9-10)

C'est bien en ce sens que, à un niveau élémentaire, *les probabilités modélisent la variabilité statistique*, ou plutôt *commencent* à modéliser la variabilité statistique. Or c'est là précisément que le problème annoncé a surgi lors de l'atelier de l'école d'été mentionné plus haut : dans la non-réception, voire dans le rejet par certains participants, de cette réponse et de ce qui la fonde, la problématique *fréquentiste*, qui est au cœur de ce que nous nommerons plus largement la problématique *statistique* en probabilités.

D'où tire-t-on alors concrètement les règles du calcul élémentaire des probabilités ? La réponse figure dans toute une catégorie d'ouvrages, élémentaires ou avancés, traitant du calcul des probabilités. Considérons ainsi l'ouvrage fondateur de A. N. Kolmogorov (1903-1987) : ses « Fondements du calcul des probabilités » (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*) parus en allemand en 1933 chez Julius Springer, que nous citerons ici dans l'édition en anglais de 1956 (*Foundations of the Theory of Probability*). Dans le chapitre I de son livre, intitulé *Elementary Theory of Probability*, Kolmogorov donne les axiomes de la théorie élémentaire, non sans préciser dans une note de bas de page que « *the reader who wishes from the outset to give a concrete meaning to the following axioms is referred to* § 2 » (nous irons voir le paragraphe 2 un peu plus loin). Ces axiomes font l'objet du premier paragraphe du chapitre *Axioms*, où le mot « *field* » désigne une algèbre de parties d'un ensemble :

> Let E be a collection of elements ξ, η, ζ…, which we shall call *elementary events*, and $\mathfrak{F}$ a set of subsets of E; the elements of the set $\mathfrak{F}$ will be called *random events*.
>
> I. $\mathfrak{F}$ is a field of sets. II. $\mathfrak{F}$ contains the set E. III. To each set A in $\mathfrak{F}$ is assigned a non-negative real number $\mathrm{P}(A)$. This number $\mathrm{P}(A)$ is called the probability of the event A. IV. $\mathrm{P}(E)$ equals 1. V. If A and B have no element in common, then $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
>
> A system of sets, $\mathfrak{F}$, together with a definite assignment of numbers $\mathrm{P}(A)$, satisfying Axioms I-V, is called a *field of probability*.

Le paragraphe 2 du chapitre I auquel fait référence la note citée plus haut s'intitule *The Relation to Experimental Data*. Kolmogorov y explicite ainsi le fondement fréquentiste du calcul des probabilités :

> *The Empirical Deduction of the Axioms*. In general, one may assume that the system $\mathfrak{F}$ of the observed events A, B, C… to which are assigned definite probabilities, form a field containing as an element the set E (Axioms I, II, and the first part of III, postulating the existence of probabilities). It is clear that $0 \leq m/n \leq 1$ so that the second part of Axiom III is quite natural. For the event E, m is always equal to n, so that it is natural to postulate $\mathrm{P}(E) = 1$ (Axiom IV). If, finally, A and B are non-intersecting (incompatible), then $m = m_1 + m_2$ where m, m_1, m_2 are respectively the number of experiments in which the events $A + B$, A, and

> *B* occur. From this it follows that $m/n = m_1/n + m_2/n$. It therefore seems appropriate to postulate that $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (Axiom V).

Il y a là l'essentiel de la manière dont les axiomes du calcul élémentaire des probabilités *naissent de la modélisation des fréquences empiriques*. Voici un second exemple choisi parmi la foule des exposés fréquentistes existants. Sixto Ríos (1913-2008) a été appelé « *el padre de la estadística española* ». Son livre *Modelización* (1995) comporte un chapitre intitulé *Modelos probabilísticos. Azar, incertidumbre y probabilidad*. Sous le titre *Regularidad estadística*, S. Ríos y écrit d'abord :

> Podemos decir que ninguno de estos fenómenos es determinista, sino aleatorio. Una *característica* de estos fenómenos es que *no se puede predecir el resultado de cada experiencia y observación particular.*
>
> Esta característica indica la necesidad de nuevos métodos para el estudio de estos fenómenos. La idea intuitiva inicial, que ha sido el punto de partida para introducir el método estadístico, es la *estabilidad de las frecuencias o ley de la regularidad estadística: si se lanza un gran número de veces una moneda, se observa que se obtiene aproximadamente el mismo número de C y de F, es decir, se puede predecir la proporción de C y de F en una gran serie de experiencias.* (p. 157)

Présentant ensuite le « *Modelo matemático de los sucesos observables y de las probabilidades* », il note quatre propriétés des fréquences qui seront à la base des axiomes du calcul des probabilités. Les trois premières s'énoncent successivement ainsi : $0 \leq fr(A) \leq 1$; $fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$ lorsque « *A y B son sucesos incompatibles* ». La quatrième propriété mérite d'être citée avec le commentaire qui l'accompagne :

> 4.ª PROPIEDAD. *Si una cierta experiencia se repite n veces, se observa que la frecuencia $f(A) = n'/n$ de un suceso fijado tiende a estabilizarse (aproximarse a un valor fijo), entendiendo esta locución en sentido experimental.*
>
> La comprobación experimental de este comportamiento regular de las frecuencias es esencial para que un fenómeno se pueda considerar como aleatorio y aplicarle el *modelo matemático del cálculo de probabilidades*. (p. 161)

Ce que Kolmogorov nommait « the relation to experimental data » est ici encore au cœur de la construction du calcul des probabilités. On s'interrogera maintenant sur les conditions de sa mise à l'écart implicite, voire de son désaveu explicite.

3. Le calcul des probabilités devient autonome et se naturalise

3.1. La définition « classique » des probabilités

L'habitat du calcul des probabilités dans l'enseignement secondaire français comme dans une certaine culture commune a été longuement occupé *et reste largement occupé* par ce que l'auteur d'un traité de statistique, Pierre Dagnelie (1973), nomme la définition *classique* de la notion de probabilité, qu'il formule ainsi :

> Si *m* résultats peuvent se produire avec des chances égales au cours d'une expérience aléatoire, et si *k* de ces résultats conduisent à la réalisation de l'événement A, on définit classiquement la *probabilité* de l'événement A comme étant le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles ou également possibles… (p. 142)

L'auteur explicite alors une critique tout aussi classique de cette « définition ». Tout d'abord, elle est circulaire puisqu'elle « revient à définir la notion de probabilité à partir de la notion d'égale probabilité des différents cas ». Surtout, elle « n'est pas suffisamment générale, car elle n'est utilisable que quand les différents cas envisagés sont également probables et dénombrables ». Un autre auteur, Ian Hacking (1975), est, sur ce sujet, plus violent :

> In 1703 Leibniz told Bernoulli that Witt had computed annuities by the 'usual method of equally possible cases'. Leibniz was wrong about de Witt, but his remark shows he was familiar with equipossibility. It is commonly supposed that this concept originated with Laplace around the end of the eighteenth century, but in fact it was commonplace at the beginning. Laplace did define probability as the ratio of favourable cases to the total number of equally possible cases, but so did Leibniz in 1678. The definition was in full vigour a century after Laplace and is still not dead. Here is an historical problem. How could so monstrous a definition

> have been so viable? Its inadequacy seems evident to us. I could quote any of a score of eminent critics. (p. 122)

On ne s'attardera pas ici à montrer que la définition « laplacienne » joue un rôle d'obstacle épistémologique et didactique à la mathématisation probabiliste de la variabilité statistique. Mais on montrera maintenant quelle *juste* place elle peut venir occuper dans la problématique statistique en probabilités.

3.2. La juste place de la « définition » classique

Si la définition « classique » ne peut en effet être acceptée, la définition classique « étendue », qui fait intervenir plus généralement ce qu'un document officiel relatif à l'enseignement des probabilités [2] nomme des « considérations de symétrie ou de comparaison », est parfaitement compatible avec la définition fréquentiste, à cela près *qu'elle n'est pas une définition*, mais un moyen d'*estimer* certaines probabilités à partir desquelles d'autres probabilités pourront être *calculées*. De cela, Gnedenko et Khintchine donnent l'exemple suivant :

> Exemple 1. – Les obligations d'un emprunt d'État portent un numéro de série composé de cinq chiffres. On demande quelle est la probabilité pour que le dernier chiffre du numéro d'une série bénéficiant du tirage à lots, désignée par le hasard, soit un 7 (par exemple, le n° 59 607).
> Selon la définition que nous avons donnée de la probabilité, nous devrions, pour répondre à cette question, consulter une longue liste de tirages antérieurs et noter combien de séries gagnantes portaient un numéro terminé par le chiffre 7, le rapport entre le nombre ainsi relevé et le nombre total des séries gagnantes définissant la probabilité cherchée. Mais nous avons toutes raisons de supposer que n'importe lequel des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 a exactement la même chance d'apparaître en terminaison du numéro d'une série gagnante. Aussi supposons-nous sans hésitation aucune que la probabilité en question est égale à 0,1. Il nous serait d'ailleurs aisé de vérifier la justesse de cette « prévision » théorique : en nous référant à n'importe quelle liste suffisamment longue de tirages, nous nous convaincrions que chacun des

2. Nous y revenons plus loin. Voir Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'Enseignement scolaire [MEN-DESCO], (2008).

> 10 chiffres d'unité « sort » en dernière position approximativement dans 1 cas sur 10. (p. 19)

Il s'agit là, en vérité, d'un type de situations *parfaitement intégré* dans les exposés fréquentistes classiques du calcul des probabilités. Dans son *Calcul des probabilités* (1966), Alfred Rényi écrit ainsi :

> La « définition classique » n'est plus considérée aujourd'hui comme une définition mais seulement comme une méthode pour calculer les probabilités, dans une algèbre de probabilité finie dont les événements élémentaires, pour certaines raisons (par exemple propriétés de symétrie), ont la même probabilité. (p. 34)

La « définition » classique devient ainsi une technique possible, judicieuse en certains cas, d'estimation de probabilités. Or cette technique va s'imposer dans la culture probabiliste élémentaire au point de devenir *coextensive à la notion de probabilité*.

3.3. La définition fréquentiste perd sa visibilité

Comment cela se produit-il ? Le *produit* du processus de mathématisation de la variabilité statistique – le calcul des probabilités – va d'abord s'imposer à travers sa *structure*, au détriment de sa *fonction*, qui devient peu à peu invisible. Chez nombre d'auteurs qui paraissent formellement fréquentistes, et pour qui cela va même de soi, le calcul des probabilités *dissimule vite sa propre genèse*. Dans leur *Initiation aux probabilités* (1970), ainsi, Louis Guerber et Paul-Louis Hennequin établissent que l'on a, avec des notations évidentes, $0 \leq f(A) \leq 1$, $f(\Omega) = 1$ et, si $A \cap B = \varnothing$, $f(A + B) = f(A) + f(B)$, avant de conclure : « Ce sont ces propriétés qui vont nous suggérer l'axiomatique des probabilités sur un ensemble fini » (p. 65). Mais il semble qu'il n'y ait là guère plus qu'une référence à un échafaudage que l'on peut rapidement oublier, au profit du calcul qui, à partir de là, aura pris son essor. Plus près de nous, dans son livre *Probabilités et statistique pour les sciences de la vie* (2002), François Dress écrit ainsi : « Le passage d'une *description* de type ensembliste des phénomènes aléatoires à l'élaboration d'un véritable *modèle mathématique* se fait en introduisant les mesures de probabilité. » Il ajoute :

> Le point essentiel est que le concept mathématique de *probabilité* modélise les notions intuitives de *proportion* et de *fréquence*. Quand on

> pose, par exemple, que la probabilité d'être immunisé contre la tuberculose est de 0,8, on modélise le fait qu'environ 80 % de la population est immunisée contre la tuberculose. Quand on pose, par exemple, que la probabilité d'obtenir le 3 lorsque l'on jette un dé est égale à 1/6, on modélise le fait que, lorsque l'on répète un très grand nombre de fois le jet d'un dé (non truqué), le quotient du nombre de fois où l'on a obtenu le 3 sur le nombre total de jets, c'est-à-dire la fréquence du 3, est très voisine de 1/6 (d'autant plus voisine que le nombre de jets est plus grand). De ces axiomes découlent les propriétés *additives* des probabilités, d'usage permanent, qui sont récapitulées ci-dessous… (pp. 2-3)

Nous sommes là sur le seuil – non encore franchi – d'un processus d'oubli et d'occultation du fondement fréquentiste du calcul des probabilités [3]. Mais que se passe-t-il lorsque, délibérément ou non, ce fondement est ignoré ? Comment les auteurs concernés mettent-ils en place la notion de probabilité ? Dans un petit livre intitulé *Probabilités, erreurs,* publié d'abord en 1923 et que nous citerons ici dans sa 14e et dernière édition parue en 1967, les auteurs, Émile Borel (1871-1956) et Robert Deltheil (1890-1972), auxquels s'ajoute Roger Huron (né en 1913) à partir de la 9e édition parue en 1954, proposent, dans la première section de leur premier chapitre, un assez long développement dans lequel, après avoir évoqué le lancer d'un « dé à jouer », le tirage d'une carte d'un jeu « bien battu », l'extraction d'une boule d'une urne, ils introduisent la notion de résultats *également probables*, solidifié dans un *principe de symétrie* (p. 8) d'où découle la définition « laplacienne » de la probabilité (p. 9). Comment se gèrent alors les situations où *il n'y a pas équiprobabilité* des « cas élémentaires », en particulier parce que le nombre d'issues possibles est infini ? Ayant introduit la notion de variable aléatoire dans la 2e section du chapitre I, les auteurs ouvrent par cette déclaration la 3e section, « Probabilités dénombrables, probabilités continues » :

3. Le conflit entre une notion « subjectiviste » et une notion « objectiviste » (c'est-à-dire fréquentiste) de probabilité est ancien et parcourt toute l'histoire des probabilités au XXe siècle. Nous renvoyons là-dessus le lecteur intéressé aux textes de Glenn Shafer et Vladimir Vovk intitulés respectivement *The origins and legacy of Kolmogorov's* Grundbegriffe (2005) et *The Sources of Kolmogorov's* Grundbegriffe (2006).

> **Variable aléatoire pouvant prendre une infinité dénombrable de valeurs.** – Les deux premières parties du présent chapitre sont basées sur la définition traditionnelle de la probabilité, qui postule l'existence de cas élémentaires tous également possibles. D'un point de vue plus purement théorique, on peut remplacer cette définition par celle consistant à dire qu'on attribue à chaque événement aléatoire un coefficient p, vérifiant la double inégalité $0 \leq p \leq 1$, et à admettre comme deux postulats fondamentaux le principe des probabilités totales et le principe des probabilités composées. (p. 35)

Les auteurs poursuivent ainsi :

> Se plaçant à ce nouveau point de vue, on peut généraliser la notion de variable aléatoire d'ordre fini et imaginer une variable aléatoire X pouvant prendre une infinité dénombrable de valeurs : $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ avec les probabilités respectives $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$; il faut, bien entendu, que la série $p_0 + p_1 + \cdots + p_n + \cdots$ soit convergente et ait pour somme l'unité. (p. 36)

On voit comment le calcul des probabilités devient ainsi *une réalité en soi et pour soi, dont l'origine statistique semble perdue*. Bien entendu, ce qui est fait ici à propos d'un ensemble infini dénombrable de cas élémentaires, pour lequel l'équiprobabilité n'a pas de sens, peut être fait aussi pour un ensemble fini (sa justification, en ce cas, tient précisément au fait que l'équiprobabilité des événements élémentaires n'est pas toujours assurée). Ce qui demeure est la *structure formelle, axiomatique*, du calcul des probabilités, comme on le voit dans cette définition proposée par Albert Jacquard (1976) :

> *Une* épreuve *est* probabilisable *si, compte tenu des opinions ou des informations que nous avons sur les conditions de son déroulement, nous sommes en mesure d'attacher à chacun de ses résultats possibles r_i un nombre p_i qui traduit le niveau de notre confiance dans sa réalisation*. Par convention, nous choisissons des nombres p_i positifs d'autant plus grands que notre confiance dans le résultat r_i est plus élevée et tels que leur somme soit égale à 1 : $p_i \geq 0, \ \sum_{i \in R} p_i = 1$. Les nombres p_i sont les *probabilités* des résultats r_i. La probabilité $P(E_1)$ d'un événement E_l correspondant aux résultats r_k, r_i et r_m de l'épreuve est, par définition,

> $P(E_1) = p_k + p_i + p_m$. Ou de façon générale : $P(E_1) = \sum_{i \in R_1} p_i$ où R_1 est le sous-ensemble de résultats entraînant la réalisation de l'événement E_1. (pp. 15-16)

Le calcul des probabilités est ainsi apparemment dissocié de son fondement statistique. Il devient autonome et oublie ses origines statistiques, quand il ne les renie pas. Dans la culture courante, le regarder comme modélisant la variabilité statistique ne va dès lors plus de soi.

3.4. La notion de probabilité se naturalise

Tout se passe ainsi comme si le calcul des probabilités n'était plus un moyen au service d'une fin et passait désormais au statut de *fin en soi*. Alors que les auteurs « fréquentistes » devaient le construire en motivant ses règles, il est présenté dans l'exposé devenu le plus commun aujourd'hui comme une pure idéalité mathématique existant de façon indépendante de toute autre considération, et notamment de ses origines statistiques, désormais refoulées. *Les probabilités ne s'autorisent plus que d'elles-mêmes*.

Pour que cela se produise, il a fallu que la notion de probabilité devienne une hypostase dans la culture, ou du moins *dans une certaine culture*. Nous observerons ce processus d'hypostasiation dans le livre de Michael C. Gemignani, *Calculus and Statistics*, dont la première édition est de 1970 et dont nous citerons ici l'édition parue chez Dover en 2006. Le premier chapitre de ce livre s'intitule *The Basic Concepts of Function and Probability* et comporte quatre sections : *Sets and functions* ; *The notion of probability* ; *The basic laws of probability* ; *More basic facts about probability*. Le premier symptôme d'une évolution alors en cours touchant le statut de la notion de probabilité se lit dans le fait suivant. La deuxième section, *The notion of probability*, est en fait consacrée à la notion d'*événement* et à *l'algèbre* des événements. En quoi alors mérite-t-elle son titre ? Cette section comporte – à l'instar des autres – un ensemble d'*exercices* ; le sixième et dernier des exercices proposés, qui précède immédiatement la section suivante, *The basic laws of probability*, a l'énoncé que voici :

> We have not yet defined what is meant by the probability of an event; however, the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities. If A is any event, we let $P(A)$ denote the probability of A. In each of the following, A and B are events. Decide which of the following statements are true and which are false. Justify each of your assertions. a) $P(A \cup B)$ is at least as large as $P(A)$. b) $P(A \cap B)$ is no larger than $P(B)$. c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. d) $P(A \cap B)$ is less than or equal to $P(A)P(B)$. e) If A and B are mutually exclusive, then $P(A \cap B)$ will have the smallest value permitted for a probability. f) If A is twice as probable as B, then $P(A) = 2P(B)$. (p. 10)

Ainsi donc, bien que la notion de probabilité *n'ait pas encore été définie*, l'auteur postule que « *the reader should already have some intuitive ideas about the properties of probabilities* ». La chose est d'autant plus insolite que, classiquement, l'auteur va *ensuite* (pp. 11-15) tirer les axiomes de la théorie des probabilités des propriétés des fréquences, écrivant à ce propos :

> If we assume that for a large number of trials, $R(A)$ is a “good” estimate of $P(A)$, then the probabilities should satisfy the same relationships that relative frequencies satisfy. In particular, motivated by the relationships among relative frequencies derived in this section, we make the following *assumptions* about probabilities…

Si l'auteur propose ainsi une axiomatique des probabilités calquée sur le comportement des fréquences empiriques, cette genèse-là apparaît déjà comme un bricolage technique, et non plus comme l'expression d'un *lien organique entre fréquences et probabilités*. Désormais, le calcul des probabilités est premier. Si, dans le cas fini, nombre d'auteurs avancent d'abord la définition « laplacienne », ils passent ensuite à la définition axiomatique présentée désormais *comme allant de soi*.

3.5. Estimation contre pari

De rares auteurs mentionnent la place de la statistique dans une telle construction. Ainsi en va-t-il d'Emmanuel Lesigne (2001), qui note sèchement :

> Il est important de noter que, dans ce modèle, les probabilités des éventualités sont données *a priori* ; le travail qui consiste à déterminer ces

> probabilités à partir d'observations relève de la Statistique qui est une branche mathématique sœur, mais distincte, du Calcul des Probabilités. La Statistique mathématique utilise les outils et résultats qui sont présentés dans cet opuscule.

Comme souvent, ce qui est mis en avant ici, c'est le problème de l'*estimation :* on ne connaît pas $P(A)$ et on l'*estime* à partir d'une fréquence observée sur une série de n réalisations de l'expérience, n étant supposé assez grand. Or c'est le point de vue inverse qui signe la problématique statistique : ayant estimé la probabilité $P(A)$, on veut *prédire* – ainsi qu'on l'a vu plus haut – le nombre de réalisations de A dans une série de n sorties. C'est là la problématique de la prédiction ou du *pari :* on parie que, dans une série de 178 sorties, A sera réalisé quelque 71 fois par exemple. Bien entendu, la statistique *théorique*, prenant appui sur la théorie des probabilités, permettra d'expliciter les paris qu'on peut prendre, les prédictions qu'on peut faire « raisonnablement », comme le précisaient jadis Georges Reeb (1920-1993) et Aimé Fuchs (1925-2006) dans ce passage de leurs *Statistiques commentées* (1967) :

> La proportion $F = N/n$ des boules blanches contenus dans un échantillon d'effectif n extrait d'une urne contenant la proportion p de boules blanches est approximativement distribuée selon la loi normale $\mathfrak{N}(p, \sqrt{pq/n})$ sous réserve que n soit grand (mieux : $npq > 7$). (Ici, $q = 1 - p$.) (p. 52)

Ce théorème est alors appliqué à une urne contenant les proportions p = 0,20 et q = 0,80 de boules blanches et noires, dans laquelle on prélève un échantillon de n = 50 boules ; ici $np = 10$, $nq = 40$, $\sigma = \sqrt{pq/n} \approx 0{,}06$. On établit aisément que, par exemple, le risque de se tromper en pariant que la proportion de boules blanches sera comprise entre 0,10 et 0,30 est inférieur à 10 %. Si l'on ne veut prendre qu'un risque de 5 % environ, on établit de même qu'il faudra accepter pour *intervalle de pari* (ou *intervalle de prédiction*) l'intervalle [0,08 ; 0,32]. À ce stade de développement déjà avancé de la théorie statistique, comme au démarrage – en classe de 3^{e} – de la modélisation probabiliste de la variabilité statistique, qui nous intéresse seul ici, le *pari* est le *but* premier par rapport à *l'estimation*, qui n'est qu'un moyen (indispensable, certes) au service d'une fin : *prédire la fréquence que l'on s'attend à observer*. Pari ou estimation ? C'est là une question clé sur laquelle interroger un exposé de calcul des probabilités pour reconnaître s'il prend en charge la variabilité statistique.

4. Ambiguïtés, confusions, manques : un problème de la profession

4.1. Les probabilités dans le programme de la classe de 3^e^

Le *Bulletin officiel* n° 6 hors série du ministère de l'Éducation nationale français qui paraît le 19 avril 2007 (MEN-DESCO, 2007) comporte, pour la classe de 3^e^, une innovation : le domaine d'études classiquement intitulé *Organisation et gestions de données, fonctions* est découpé en quatre secteurs d'études, dont le quatrième est inédit à ce niveau : *Notion de fonction* ; *Fonction linéaire, fonction affine* ; *Statistique* ; *Notion de probabilité*. Pour ce dernier secteur, les « capacités » attendues des élèves sont libellées ainsi : (a) connaître et utiliser des notions élémentaires de probabilité ; (b) calculer des probabilités dans des contextes familiers. Voici le commentaire correspondant :

> La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités). La notion de probabilité est utilisée pour traiter des situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement à partir des situations précédentes. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*. (p. 59)

On aura noté la référence faite en passant – entre parenthèses – à la définition fréquentiste des probabilités. On notera aussi que les *usages* du calcul des probabilités pour *« modéliser »* certaines *« situations de la vie courante »* ne sont pas davantage explicités, comme s'ils étaient supposés bien connus.

En mars 2008 paraît un document d'accompagnement d'une trentaine de pages intitulé *Probabilités au collège* (MEN-DESCO, 2008), dont les deux premières sections traitent successivement des « probabilités définies à partir de considérations de symétrie ou de comparaison » et de l'« approche fréquentiste de la probabilité »[4]. La première section ne propose pas de définition explicite de la notion de probabilité. Quoique le document soit très informé, on y rencontre donc les mêmes apories que dans les ouvrages déjà mentionnés, augmentées ici d'un discours de convenance pluraliste qui s'exprime en termes d'*interprétation de la notion de probabilité*. Tout se passe comme si les dés étaient à l'avance pipés. Dans un cas, on ferait appel à une idée spontanée, préconstruite, quasi naturalisée de « chance », qui n'aurait pas besoin de justification (la probabilité d'obtenir pile vaudrait *par nature* 1/2 lorsqu'on lance une « bonne » pièce, etc.). Dans l'autre cas, au lieu d'une préconstruction à coût quasi nul, on aurait la lourde construction fréquentiste, que tout conspire ainsi à tenir à distance de la culture commune des professeurs de mathématiques français.

Il n'est pas sans intérêt de noter que la problématique du *pari* n'est pas absente du document d'accompagnement, qui est ainsi à l'évidence un lieu de tensions. Mais elle n'y apparaît que dans la savante annexe 2, *Éléments d'histoire de la notion de probabilité*, en une section 2 intitulée « Probabilité de type fréquentiste ». Tandis que la sous-section 2.3 a pour titre « Théorèmes de convergence et estimation d'une probabilité », la section 2.2, intitulée « Théorèmes de convergence et fluctuation d'échantillonnage », aborde le problème de l'intervalle de pari, appelé aussi, nous dit-on, « de probabilité » ou « de fluctuation ». Ce choix de vocabulaire est significatif de ce que la problématique du pari reste ici *dominée*. Elle

---

4. Le programme du 19 avril 2007 n'aura d'application que durant l'année scolaire 2008-2009, un nouveau programme ayant été publié le 28 août 2008 qui entrera en vigueur à la rentrée 2009 (MEN-DESCO, 2008). En matière de probabilités, un changement notable distingue ce programme du précédent, le premier alinéa du commentaire étant maintenant libellé ainsi : « La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). » Si la référence aux fréquences n'a donc pas totalement disparu, elle se fait désormais si discrète qu'on peut voir en cet effacement le symptôme d'un rejet du fondement fréquentiste du calcul des probabilités.

le restera dans le programme de la classe de seconde (MEN-DESCO, 2009a, 2009b), où une technique d'obtention d'un intervalle de pari (au seuil de 95 %) est proposée mais est déclarée « non exigible ».

4.2. Les manuels

Aucun des manuels de mathématiques de troisième « conformes » au programme en vigueur durant l'année 2008-2009 n'échappe aux effets de l'absence, dans la culture de la noosphère de l'enseignement des mathématiques, d'une infrastructure solidement établie en matière de probabilités, absence dont, nous l'avons noté, les textes officiels portent les stigmates. Nous en citerons deux, assez différents, à titre d'exemples. L'ouvrage de la collection *Triangle* (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2008) propose d'abord une « définition intuitive » formulée ainsi : « Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la “chance” qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé *probabilité* de l'événement » (p. 99). Une seconde « définition » *de fait* apparaît ensuite sous le titre « Probabilité et fréquence » : « Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement » (p. 100). Enfin, une troisième « définition » présente, sous le titre « Calculer une probabilité », un cas particulier de la « définition intuitive » : « Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient : nombre de résultats favorables à l'événement / nombre de résultats possibles » (p. 100). Aucun lien n'est établi sérieusement entre ces trois « définitions ».

Le manuel de la collection *Dimathème* (Andrieu, Fourton, Lanoëlle & Perrinaud, 2008) opère plus subrepticement. Dans une « Première approche » concernant le lancer d'un dé, à propos de l'événement A « On obtient un nombre impair », il demande de dénombrer cas favorables et cas possibles, de calculer leur rapport et glisse alors dans un encadré intitulé perfidement *Info :* « On dit que la probabilité de l'événement A est 1/2. On note p(A) = 1/2 » (p. 180). Cela ne l'empêchera pas, certes, de proposer un peu plus loin cette définition : « La probabilité d'un événement A est la proportion probable [*sic*], parmi tous les cas possibles, des cas où A sera réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience. La probabilité de l'événement A se note *p*(A) » (p. 184). Les auteurs, qui, à l'évidence, se réfèrent assez étroitement au document d'accompagnement de mars 2008, donnent alors – dans une *Info* encore – cette double précision, qui articule *estimation* et *pari* : « Les statistiques permettent d'évaluer la fréquence de phénomènes constatés lors d'expériences passées. Les probabilités permettent de prévoir la fréquence probable de phénomènes lors d'expériences dont on ne connaît pas le résultat. » Mais le lien entre les deux « définitions » par ailleurs évoquées est, là encore, inexistant. Si l'on a là, sans doute, tous les ingrédients d'une infrastructure adéquate du calcul des probabilités, celle-ci ne parvient pas à émerger.

4.3. Infrastructure et ingénierie didactique

L'état actuel du curriculum mathématique secondaire français montre, en ce qui concerne la statistique et les probabilités, une profonde désorganisation, alors même que les moyens d'une réorganisation n'ont plus à être inventés – ils doivent seulement être *retrouvés*. Comme en matière d'algèbre, l'évolution non régulée de l'enseignement conduit à enseigner ici une *syntaxe* dépourvue de *sémantique* : je peux savoir que, si les événements A et B sont incompatibles, alors la probabilité de l'événement $A \cup B$ sera la somme de la probabilité de A et de celle de B ; mais qu'est-ce au juste que la probabilité d'un événement ? Dans l'état de choses actuel, la réponse ne fait pas de doute : c'est ce qu'on obtient en calculant selon les règles du calcul des probabilités…

Récapitulons ce que, par contraste, l'étude ébauchée jusqu'ici permet d'énoncer. Tout d'abord, la probabilité $\mathrm{P}(A)$ est une valeur numérique hypothétique vers laquelle on croit voir « converger » les fréquences de réalisation de A lors de n réalisations de l'expérience aléatoire considérée, quand n croît : tel est le postulat empirique fondateur. Cette valeur hypothétique n'est connue expérimentalement que de façon approchée. Pour construire un modèle *probabiliste* de la variabilité statistique, on établit d'abord des règles du calcul des probabilités qui fasse de celui-ci un modèle (régional) du calcul des fréquences. Pour bâtir alors un modèle (local) d'une expérience aléatoire donnée, on *estime* la probabilité de certains événements A_1, A_2… en usant des données d'observation disponibles ou, faute de telles données, en tentant de s'appuyer sur le « principe de symétrie ». À partir de ces valeurs, on peut calculer *dans ce modèle* la probabilité de tout événement A appartenant à l'algèbre d'événements engendrée par A_1, A_2… Cette probabilité est regardée comme une valeur approchée de la fréquence de réalisations de l'événement A dans une série de n sorties, pour n assez grand, ce qui permet de *prédire* – approximativement – le nombre de fois où A se produira dans une telle série.

Telle est donc, en résumé, l'infrastructure sur laquelle pourra s'élever une réponse à la question Ω_3 : « Que pourrait être un scénario de PER qui fasse vivre les probabilités comme modélisant la variabilité statistique dans une classe de 3^e^ aujourd'hui ? » Cette réponse reste à construire.

Références

Andrieu, X., Fourton, J.-L., Lanoëlle, A. & Perrinaud, J.-C. (2008). *Dimathème 3^e^*. Paris : Didier.

Borel, É., Deltheil, R. & Huron, R. (1967). *Probabilités, erreurs*. Paris : Armand Colin.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2008). *Mathématiques 3^e^*. Paris : Hatier.

Dagnelie, P. (1973). *Théorie et méthodes statistiques. Applications agronomiques. Vol. 1. La statistique descriptive et les fondements de l'inférence statistique* (2^e^ éd.). Gembloux, Belgique : Les Presses agronomiques de Gembloux.

Dress, F. (2002). *Probabilités et statistique pour les sciences de la vie* (2^e^ éd.). Paris : Dunod.

Gemignani, M. C. (2006). *Calculus and Statistics*. Mineola, NY : Dover.

Gnedenko, B. V. & Khintchine, A. Ia. (1964). *Introduction à la théorie des probabilités*. Paris : Dunod.

Guerber, L. & Hennequin, P.-L. (1970). *Initiation aux probabilités* (2^e^ éd.). Paris : APMEP.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. New York, NY : Cambridge University Press.

Jacquard, A. (1976). *Les probabilités* (2^e^ éd.). Paris : PUF.

Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability* (2e éd.). New York, NY : Chelsea. http://www.kolmogorov.com/Foundations.html

Le Goff, A. & Peynaud, F. (2008). *Maths 3e Brevet*. Paris : Magnard.

Lesigne, E. (2001). *Pile ou face. Une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités*. Paris : Ellipses.

Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'Enseignement scolaire (2007, 19 avril). Annexe 2 – Mathématiques. *Bulletin officiel* no 6 hors série. http://www.education.gouv.fr/bo/2007/hs6/default.htm

Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'Enseignement scolaire (2008). *Probabilités au collège*. http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/17/6/doc_acc_clg_probabilites_109176.pdf

Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'Enseignement scolaire (2009a). *Mathématiques. Programme pour la classe de seconde*. http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/20/1/pgm2nde2009_109201.pdf

Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'Enseignement scolaire (2009b). *Ressources pour la classe de seconde. Probabilités et statistiques*. http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/17/9/Doc_ressource_proba-stats_109179.pdf

Reeb, G. & Fuchs, A. (1967). *Statistiques commentées*. Paris : Gauthier-Villars.

Rényi, A. (1966). *Calcul des probabilités*. Paris : Dunod.

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid : Alianza Universidad.

Shafer, G. & Vovk, V. (2005). *The origins and legacy of Kolmogorov's* Grundbegriffe. [Document interne] http://www.probabilityandfinance.com/articles/04.pdf

Shafer, G. & Vovk, V. (2006). The Sources of Kolmogorov's *Grundbegriffe*. *Statistical Science, 21*(1), 70-98. http://www.probabilityandfinance.com/articles/STS154.pdf

La prueba, un tipo de tarea específica. Su razón de ser en el proceso de algebrización de las matemáticas escolares

Gema I. Fioriti y Fernando J. Bifano

Centro de Estudios en Didácticas Específicas, Escuela de Humanidades, Universidad Nacional de San Martín, Argentina

Abstract. According to the research carried out this last decade within the framework of the anthropological theory of the didactic, we can say that school algebra is mainly conceived as generalized arithmetic. Facing this didactic option, we propose an alternative entrance to the algebraic work coming from a mathematical organization focused on arithmetic problems where questions about technology are posed such as the justification of resolution strategies and their scope of validity.

Résumé. Selon des recherches menées il y a une dizaine d'années dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, on peut dire que l'algèbre scolaire est majoritairement conçue comme une arithmétique généralisée. Face à cette option didactique, nous proposons comme alternative une entrée dans le travail algébrique à partir d'une organisation mathématique centrée sur des problèmes de calcul arithmétique, où sont problématisées des questions d'ordre technologique comme la justification des stratégies de résolution et la portée de validité de ces dernières.

Resumen. Según investigaciones realizadas esta última década en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico, se puede decir que el álgebra escolar es concebida mayoritariamente como una aritmética generalizada. Frente a esta opción didáctica, se propone como alternativa una entrada al trabajo algebraico a partir de una organización matemática centrada en problemas de cálculo aritmético, donde se problematizan cuestiones de orden tecnológico como la justificación de las estrategias de resolución y el alcance de validez de las mismas.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 855-871)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 4. *La dialéctica de los media y los medios*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. Introducción

Desde nuestro punto de vista, se puede entender la actividad matemática en el marco más general de las actividades humanas. Por ello el marco de referencia de una teoría de corte antropológico parece pertinente para comprender aquellos fenómenos que se manifiestan cuando se trata de enseñar y aprender matemática en diferentes contextos institucionales y escolares.

Dentro de este encuadre, enseñar, estudiar, aprender matemáticas e incluso hacer matemáticas adquieren significados bien definidos. Así por ejemplo, desde nuestra perspectiva, nos adherimos a la idea de que «estudiar matemática es efectivamente hacerla, en el sentido propio del término, construirla, fabricarla, producirla» (Charlot, 1986). Esta definición está estrechamente vinculada a la forma de entender las matemáticas en el contexto general de las actividades humanas. Pues hacen matemática no una pequeña élite que por naturaleza o cultura tiene acceso al mundo del conocimiento, sino que es accesible a todos si se respetan ciertas reglas.

La asociación entre hacer y estudiar matemáticas, como posibilidad real para todos, tiene fuertes implicaciones para su enseñanza efectiva. Pues si estudiar matemática significa ir mucho más allá que la simple repetición y aplicación de técnicas sin sentido, su enseñanza deberá considerar la posibilidad de confrontar a los alumnos con problemas que promuevan diferentes estrategias para su resolución. Así como cada disciplina tiene una especificidad en su quehacer, que determinan formas particulares de producir, comunicar y validar conocimientos, la matemática en particular no escapa a esta forma de trabajo.

Consecuentemente, el proceso de estudio de las matemáticas en los diferentes contextos institucionales deberá contemplar en los distintos momentos actividades específicas para la producción, validación y comunicación del conocimiento construido (Sadovsky, 2005).

Este proceso de estudio requiere de un director de estudio. Aquí reside la importancia de la función del docente, quien «dirige el estudio mientras los alumnos estudian, los padres ayudan a los hijos a estudiar y a dar sentido al esfuerzo que se les exige» tal como describen Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997).

2. La prueba en el contexto de la TAD

En este marco general de caracterización de la actividad matemática como un quehacer en el conjunto de las actividades humanas y las instituciones sociales, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD, en adelante) brinda herramientas que permiten problematizar el proceso de estudio de las matemáticas en contextos institucionales. Esta postura epistemológica implica un cambio en la concepción habitual acerca de la Didáctica de la Matemática instalada en el imaginario social y que separa de alguna manera los objetos distintivos de la misma —las matemáticas— de los alumnos, profesores, manuales, etc. excluyendo casi a todos los demás objetos. La radicalidad del enfoque se basa en que toda actividad humana se puede describir en un único modelo resumido en la noción de praxeología (Chevallard, 1999).

Solidariamente con este constructo están las nociones de tarea y tipo de tareas. Por tarea se entiende toda aquella acción que puede expresarse por un verbo: por ejemplo, ordenar un ambiente, estrechar la mano a un vecino, leer un instructivo, factorizar una función polinómica, dividir un número por otro, derivar una función, etc. Como es deducible, la noción de tarea, o de tipo de tareas, tiene un objeto relativamente preciso. Así, si bien cambiar una pieza puede considerarse un tipo de tarea, cambiar simplemente no lo es. Entonces calcular, construir, expresar, probar o demostrar constituyen lo que se denomina género de tareas que exigen un determinativo preciso (Íbid., p. 222).

En torno a un tipo de tareas, se encuentra al menos un técnica que se constituye en la manera de llevar a cabo esa tarea; una tecnología que justifica la aplicación de dicha técnica y una teoría que enmarca tal discurso tecnológico en un contexto más amplio de cuestiones más o menos explícitas que justifican y explican en un nivel superior. Todo esto en su conjunto es lo que constituye una praxeología puntual. En otras palabras, es un saber y un saber hacer, puesto que una praxeología (también llamada organización praxeológica) está constituida en esencia por un bloque práctico-técnico —tareas y técnicas— y otro tecnológico-teórico —tecnología y teoría—.

En el caso de la enseñanza de las matemáticas, se puede ver cómo los temas de estudio se pueden identificar con una tecnología determinada, como por ejemplo el teorema de Pitágoras, pero muchas otras también con ciertos tipos de tareas: factorización, resolución de ecuaciones, etc. Esto da sentido a la conveniencia de plantear temas de estudio en matemáticas desde la noción de organización praxeológica que, de alguna manera, integra en un tipo de organización, discurso y técnica.

En el caso concreto de nuestra problemática de interés —la prueba—, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿puede esta considerarse como un género de tareas, dentro de dicho marco teórico?

Si es así, existe una praxeología relativa al tipo de tarea dado —probar, demostrar en nuestro caso—, que requiere una manera de hacer; es decir, una técnica. De todas formas, esta manera de hacer requiere una especificidad. Entonces, «probar en geometría» no tiene por qué responder al mismo tipo de técnica que «probar en álgebra». Es decir, la técnica tiene cierto alcance de validez. Por tanto, hay técnicas más potentes que otras. ¿Se podrá establecer un paralelismo entre los tipos de pruebas definidos por Nicolás Balacheff (2000) y esta noción de limitación/potencia de una técnica?

Otra cuestión a observar es que la técnica no tiene por qué ser algorítmica; de hecho, dentro del contexto de las actividades humanas, son las menos las que pueden operarse en forma mecánica siguiendo una serie de pasos. El hecho de que haya un innegable progreso hacia la algoritmización de ciertas técnicas tiene que ver con el contexto institucional que busca economizar el uso de las técnicas. Pensando sobre el recurso de la inducción completa para probar problemas en el campo de los números naturales, ¿se puede decir que esta manera de hacer es un tipo de prueba, en cierta forma algorítmica? Eso quiere decir que hay determinadas maneras de hacer reconocidas institucionalmente y por tanto otras que son inaceptables. Por ejemplo, un dibujo, en cierto contexto institucional podrá ser aceptado como prueba válida de una conjetura, mientras que en otro no.

Es conveniente explicitar una postura que hemos asumido como encuadre general: partimos de concebir a la prueba dentro del proceso de la transposición didáctica; para evitar caer en la «doble ingenuidad» descrita según Gilbert Arsac (1988) de: o bien plantearse el problema de la enseñanza de la demostración sin reparar en su estatuto epistemológico, o bien ignorar el proceso traspositivo de la misma para considerar el problema de su enseñanza.

Diferenciamos entre la demostración en matemáticas y la prueba en la enseñanza de las matemáticas. Reservar el término demostración para la actividad matemática y utilizar el de prueba para el contexto de su enseñanza evidencia un proceso indudablemente traspositivo de la noción. Esta distinción está basada en investigaciones precedentes (Balacheff, 2000).

Por todo lo expuesto, entendemos que se hace necesario un estudio más profundo de algunas praxeologías matemáticas en torno a problemáticas didácticas centrales del proceso de estudio de las matemáticas escolares. En este trabajo, daremos cuenta del lugar de la prueba en las distintas fases del *proceso de algebrización* de las matemáticas escolares en torno al trabajo con *programas de cálculo aritmético* (en adelante, PCA).

3. La prueba en el proceso de algebrización de las matemáticas escolares

Hay abundante bibliografía acerca del proceso de algebrización de las matemáticas escolares (Bolea, 2002; Bolea, Bosch & Gascón, 1998, 2001; entre otras), y algunas específicas de dicho proceso a partir de los PCA en el trabajo de Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón (2007), que tomaremos como marco de referencia para el trabajo.

Retomando la hipótesis central de que el álgebra escolar, más que una obra matemática, es un instrumento de recolección de obras, los investigadores citados hablan del «proceso de algebrización de una organización matemática» (Bolea et al., 1998).

En consonancia con tal hipótesis, asumimos otro supuesto vinculado con la manera en que «vive» el álgebra en las instituciones escolares. Nos referimos a la concepción como una aritmética generalizada (Gascón, 1993, 1994 y 1999). Desde esta perspectiva, y frente a esta identificación casi unívoca del álgebra escolar con la manipulación formal de expresiones algebraica, una organización matemática (en adelante, OM) centrada en problemas aritméticos, se erige como entrada a dicho proceso de algebrización. Los PCA pueden ser concebidos como objetos *para-*

matemáticos en la medida en que se plantean cuestiones tecnológicas como la justificación de las estrategias de resolución y el alcance o validez de ellos. Esto constituye el punto de partida de la entrada a la OM, como indican N. Ruiz et al. (2007):

> Para generar una problemática tecnológica en torno a los problemas aritméticos, se requiere partir de cuestiones que provoquen la necesidad de considerar y tratar las técnicas o procesos de resolución como objetos de estudio en sí mismos. Esta objetivación del proceso de resolución de un problema aritmético constituye precisamente la primera función (y no la menos importante) de la noción de PCA. (p. 658)

Tomando como referencia esta definición sobre la función de los PCA dentro del proceso de algebrización, y apoyados en que la prueba es también de alguna manera una noción *paramatemática* en el contexto de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), estamos en condiciones de esbozar nuestra problemática didáctica a investigar en los siguientes términos:

¿Podría considerarse a la prueba como una respuesta válida a los cuestionamientos tecnológicos en torno a los problemas aritméticos? ¿Qué problemáticas tecnológicas se constituyen como su razón de ser en dicho contexto? ¿Cómo se inserta la prueba en el contexto de las fases del proceso de algebrización de las matemáticas escolares en un tipo de OM como los PCA?

Con el propósito de dar respuesta a estos interrogantes, esbozaremos un análisis a priori de una posible secuencia [1] de PCA que abarcan las distintas fases del proceso de algebrización.

1. La misma en extenso fue propuesta para su análisis en el marco de una serie de seminarios dictados por el Dr. Josep Gascón, en el ámbito de la Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática 2007, celebrada en Buenos Aires del 23 al 25 de julio. Por motivos de extensión, aquí solo recuperamos algunos problemas que permiten dar cuenta de las distintas fases del proceso de algebrización.

3.1. La prueba y su rol dentro de los PCA: un análisis a priori de las fases del proceso de algebrización de las matemáticas escolares

3.1.1. OM inicial: Punto de partida del proceso de algebrización

(*a*) *Los PCA para ser dictados.*

En general podemos decir que todos tienen una estructura similar, «piensa un número...» y luego una serie de operaciones aritméticas simples —que los alumnos es de esperar que dominen como conocimientos previos necesarios— que se deben ir aplicando según la secuencia del dictado. Hay una primera serie de elementos que constituyen un tipo de técnica característica de una organización matemática puntual de inicio (OM inicial) que es aritmética y consiste en la ejecución del PCA.

En estos primeros programas, no parece necesario «convocar a las letras» [2] para su ejecución. A pesar de que un problema pide operar con el consecutivo del número pensado, basta con recordar cuál fue el número pensado para considerar el siguiente. En el último PCA de la secuencia podría ser interesante recurrir al uso de algún símbolo para discutir con los alumnos acerca de por qué a todos les da el mismo resultado:

> «Piensa un número. Súmale el doble del número. Divídelo por 3. Réstale el número pensado. Súmale 75».

(*b*) *Ejecutar un CA de dos formas diferentes: primero «paso a paso» y «luego en línea».*

> «Piensa un número. Multiplícalo por 4. Súmale 5 al resultado. Multiplícalo por 8. Divídelo todo por 3».

Esta nueva tarea, si bien no podemos decir que implica otra técnica de resolución, estamos en condiciones de afirmar que tiene un cierto grado de evolución con relación a la anterior. El hecho de que la consigna dada pida ejecutar los PCA en dos formas diferentes, es decir «paso a paso» y «en línea», puede tener la intención de reflexionar con los alumnos acerca de la necesidad de usar paréntesis, así como la cantidad mínima de estos. Esto puede interpretarse como un signo de esta evolución. Además,

2. Este término ha sido acuñado por otro investigador de las prácticas algebraicas como Abraham Arcavi y fue utilizada por él en una serie de conferencias dictadas en Argentina a fines del año 2007.

creemos que este objetivo se podría quizás trabajar conjuntamente con la incorporación de la máquina de calcular, dado que la necesidad de los paréntesis también podría surgir como consecuencia de la divergencia de resultados obtenidos en forma «manual».

Por otra parte, es de esperar que ante la tarea surjan dificultades por el uso «indiscriminado» del signo igual, dado que en más de una oportunidad el enunciado expresa que hay que aplicar determinada operación al resultado.

3.1.2. OM_1: Primera fase del proceso de algebrización

(*a*) *«Adivina el resultado de ejecutar el PCA sin conocer el número pensado. Debes justificar por qué se obtendrá siempre el resultado predicho, sea cual sea el número pensado».*

La resolución aritmética de estos problemas, es decir la ejecución del PCA indicado, proporciona siempre el mismo resultado numérico, independientemente del número pensado inicialmente. Aparece, por tanto, una cuestión tecnológica —según mi criterio, lo que aparece es una solución especial que abre un nuevo problema, ningún cuestionamiento de la técnica aritmética—, ¿por qué se obtiene el mismo resultado independientemente del número pensado?, que no se puede responder fácilmente con las técnicas aritméticas de la OM inicial.

Esto hace surgir la necesidad de introducir alguna formulación escrita (simbólica) del PCA para explicar e intentar dar respuesta a la pregunta del problema, entrando en la primera fase del proceso de algebrización, M_1: Problemas resolubles mediante expresiones algebraicas.

Se propone lo que el autor denomina la tarea de «hacer de mago» e inventar un PCA tal que permita adivinar el resultado que se obtiene sin ejecutarlo, aún sin conocer el número sobre el que se ha aplicado. Este tipo de tarea implica comprender que las operaciones involucradas de alguna manera suponen procesos inversos para poder volver al punto de partida.

> Piensa un número, réstale 10, multiplícalo por 10, súmale 100 y divídelo por 10. ¿Te da el número que habías pensado?

$$\frac{(x-10)\cdot 10+100}{10}$$
$$\frac{x\cdot 10-10\cdot 10+100}{10}$$
$$\frac{x\cdot 10-100+100}{10}$$
$$\frac{x\cdot 10}{10}$$
$$x$$

El pedido de justificación acerca de por qué siempre se obtendrá el resultado supone cierta construcción de una tecnología en torno a la técnica aplicada. La aplicación de las técnicas de simplificación implica cadenas de operaciones que en conjunto son neutrales.

(*b*) *«Adivina el resultado de ejecutar el PCA sin conocer el número pensado. ¿A qué problema se refiere? Debes justificar por qué se obtendrá siempre el resultado predicho, sea cual sea el número pensado».*

Hay una cierta evolución en la tarea pero sin llegar a caracterizar una nueva fase de OM. La evolución está marcada porque los alumnos tienen dos opciones: o resolver la expresión aplicando técnicas de simplificación y cotejar el resultado o partir del resultado como si fuera cierto y plantear una igualación entre el PCA y el resultado y tratar de no hallar inconsistencias a la hora de aplicar simplificaciones algebraicas. Para ilustrar estas estrategias proponemos estos modelos de resolución basados en dos programas, uno verdadero y otro falso, que permiten marcar las distintas cuestiones que pueden surgir con una y otra técnica: [3]

> PCA 1. Piensa un número, multiplícalo por 4, súmale 698, divide el resultado por 2 y resta el doble del número pensado. ¿Te da 349?
>
> PCA 2. Piensa un número, réstale el triple del número anterior del que habías pensado y súmale el doble del consecutivo del que habías pensado. ¿Te da 8?

[3] En forma ex profesa hemos utilizado el símbolo Θ en vez de la *x*, para evitar caer en el típico estereotipo de identificar la incógnita de una ecuación exclusivamente con la letra *x*.

En el primer caso obtenemos una igualdad que se cumple siempre:

$$\frac{\Theta \cdot 4 + 698}{2} - 2\,\Theta$$
$$2\,\Theta + 349 - 2\,\Theta = 349$$

y en el segundo caso una igualdad que no se cumple nunca:

$$\Theta - 3 \cdot (\Theta - 1) + 2 \cdot (\Theta + 1)$$
$$\Theta - 3\,\Theta + 3 + 2\,\Theta + 2$$
$$5 \neq 8$$

El elemento que fundamenta la clasificación de este tipo de problemas dentro de la primera fase del proceso de algebrización es que la inclusión de algún símbolo no numérico se vuelve necesaria para la justificación tecnológica que explique más allá de la técnica. La incertidumbre acerca del resultado torna necesaria una fundamentación acerca de la verdad o falsedad del mismo. Esta justificación viene de la mano del uso del elemento simbólico no numérico, cuya manipulación en términos de operaciones permite arribar o no al resultado posible.

Si bien es cierto que, cuando el problema es falso, basta con un contraejemplo, el poner en paralelo una y otra estrategia puede ser de utilidad para reflexionar nuevamente con los alumnos acerca del lugar del signo igual en este tipo de problemas, dado que en aritmética el signo se reserva para dar un resultado de una cuenta mientras que al introducirse en la modelización algebraica tiene un connotación diferente asociada con la equivalencia de expresiones. Si bien el modelo de resolución de la derecha recurre al armado de una ecuación, no es necesario para su resolución el dominio de ciertas operatorias específicas del «cálculo ecuacional» como podrían ser el «pasaje de términos» o el aplicar la misma operación a ambos miembros, dado que no hay una expresión sino un resultado numérico. El dominio de este tipo de técnicas caracterizará el pasaje a la segunda fase que puede verse en el tipo de problemas que sigue a continuación.

3.1.3. OM_2: Segunda fase del proceso de algebrización

(*a*) *«Dado el resultado de ejecutar un PCA, adivina el número al que se le ha aplicado».*

Con este tipo de tareas, se inaugura una nueva fase, la segunda del proceso de algebrización que denominaremos M_2: Problemas resolubles mediante «ecuaciones».

A pesar de que en la mayoría de los enunciados de la serie se da el resultado, no puede aplicarse el patrón de análisis síntesis para resolverlos, dado que en el medio de los pasos a ejecutar se involucra alguna operación con el número pensado.

> Al cuádruple del número pensado, súmale 10 y súmale el doble del número pensado. ¿Te da 88?

Esta segunda fase se caracteriza por las condiciones de equivalencia entre dos PCA. La resolución exige una nueva técnica de manipulación de un objeto matemático llamado ecuación.

$$\begin{aligned}
&4x+10+2x=88\\
&6x+10=88\\
&6x=88-10\\
&6x=78\\
&x=\frac{78}{6}\\
&x=13
\end{aligned}$$

El hecho de no haber margen de incertidumbre sobre el resultado implica que se trata de una igualdad. Para poder determinar el número pensado en forma inequívoca, se necesita de la manipulación —las técnicas diversas que ello implica— de este nuevo objeto definido como ecuación.

(*b*) *«Es posible…». Debes justificar en qué casos la igualdad se cumple para todos los números. En qué casos se cumple solo para algunos números y si en algún caso no se cumple la igualdad para ningún número.*

Este tipo de problemas constituyen, a nuestro entender, un tipo de tarea que puede evolucionar hacia la producción de pruebas por parte de los alumnos.

La justificación de las condiciones de igualdad exige la construcción de una nueva tecnología alrededor de la técnica del cálculo ecuación. Es este sentido, que nosotros consideramos como plausible la evolución de este tipo de problemas hacia la producción de pruebas. El elemento no numérico, tiene su razón de ser en la medida que posibilita validar la conjetura acerca de si el enunciado propuesto se cumple siempre, a veces o nunca:

> ¿Puede ser que si a un número lo multiplicamos por 9, le sumamos 2, le sumamos 15 y le restamos 30 se obtenga como resultado el doble de ese número?

$$\begin{aligned}&9x+2+15-30=2x\\&9x-13=2x\\&7x=13\\&x=\frac{13}{7}\end{aligned}$$

En este ejemplo, al hallar un resultado para el valor desconocido, se necesita interpretar que este es el único valor que satisface el enunciado. En otros casos, si obtengo una igualdad tipo 5 = 5 significará que para cualquier número pensado se cumplirá lo pedido, y si llego a una contradicción se tomará como evidencia para validar que no es posible cumplir con lo pedido más allá del número elegido. Esta serie de argumentaciones constituyen la base del discurso tecnológico que legitima la técnica aplicada y esta misma puede ser tomada como un tipo de prueba.

(*c*) *«Es posible…». Debes justificar en qué casos la igualdad se cumple para todos los números. En qué casos se cumple solo para algunos números y si en algún caso no se cumple la igualdad para ningún número.*

La diferencia con la secuencia anterior denominada «Es posible…» está en la complejidad de las técnicas involucradas, dado que se pide analizar la equivalencia entre dos PCA. Esto puede llevar a distintas estrategias de resolución: trabajar ambos PCA por separado y ver si son equivalentes las respuestas obtenidas, igualarlos y trabajarlos en forma ecuacional para poder interpretar el resultado en el sentido propuesto en el punto anterior. De una u otra manera, estamos dentro de la misma fase evolucionada hacia la prueba, pues el pasaje a una nueva etapa exigirá el manejo de determinadas técnicas de modelización que se evidencia en la secuencia siguiente.

3.1.4. OM_3: *Tercera fase del proceso de algebrización*

(*a*) *¿Qué es mejor?*

En este tipo de problemas, los alumnos necesitan saber que aplicar un porcentaje de aumento implica multiplicar por dicho porcentaje, así como la diferencia a 1 del porcentaje de descuento.

Por otra parte, la cantidad de operatorias de aumento y/o descuento en un mismo mes para una misma tienda hacen que necesariamente se deba recurrir a una traducción en términos simbólicos de las condiciones para poder decidir.

> Sobre un precio del artículo nos hacen una rebaja de 50 $, después un aumento del 12% y finalmente un descuento de 6 $.

Una vez hecha la traducción, habrá que aplicar cierta operatoria (sumas y multiplicaciones) para poder llegar a la comparación entre dos expresiones. Este tipo de tareas se sitúa en la tercera y última fase del proceso de algebrización que proponen N. Ruiz et al. (2007): «M_3: problemas cuya resolución requiere una modelización algebraica junto con ciertas técnicas de modelización».

La característica clave de esta última fase del proceso de algebrización es la necesidad de justificación de la equivalencia o no entre dos PCA. Aquí se abren diferentes caminos, dado que, por ejemplo, los PCA escritos en forma canónica $an + b$ admiten la representación gráfica como rectas. En ese caso se pueden analizar varias cuestiones tales como: las condiciones de partida, a partir de la compra de qué cantidad de productos puede convenir una u otra tienda, si hay alguna cantidad de productos que se pueden comprar al mismo costo independientemente de la tienda de venta, etc.

	Tienda A	Tienda B	¿Dónde compramos?
Febrero	Sobre el precio del artículo nos hacen el 10% de descuento y después un aumento de 3 $	Sobre el precio del artículo nos hacen un aumento de 10 $ y después un descuento del 10%	

Tabla 1. Ejemplo de tarea planteable en OM_3

Al planteo original el docente podría proponer las tablas 1 y 2 a completar con los alumnos para poder institucionalizar cuestiones tales como: pendiente, ordenada al origen, rectas paralelas, interpretaciones de estos parámetros en el contexto del problema, etc. La tabla 2 aquí propuesta solo muestra un ejemplo:

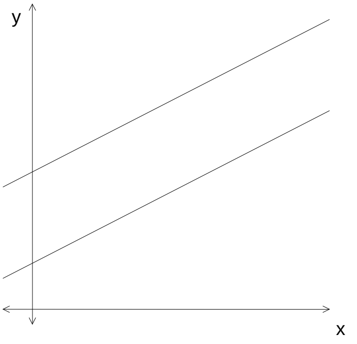
	Tienda A	Tienda B	Comentarios
Expresión simbólica	$0{,}90 \cdot x + 3$	$(x + 10) \cdot 0{,}90$ $0{,}90 \cdot x + 9$	Aplicando técnicas de simplificación se intenta comparar expresiones para sacar conclusiones: - Tienen la misma pendiente - La ordenada al origen es diferente y eso determina la elección
Represen-tación gráfica			- Las rectas no se cortan; eso implica que, independientemente de la cantidad de artículos, conviene la tienda A porque nos resulta más barato

Tabla 2. Ejemplo de propuesta a la tarea planteada en OM_3

El esquema propuesto a continuación (ver figura 1) compendia las distintas fases del proceso, junto con las características y limitaciones de cada una de estas etapas; y puntualiza el lugar y rol de la prueba en dicho proceso[4]:

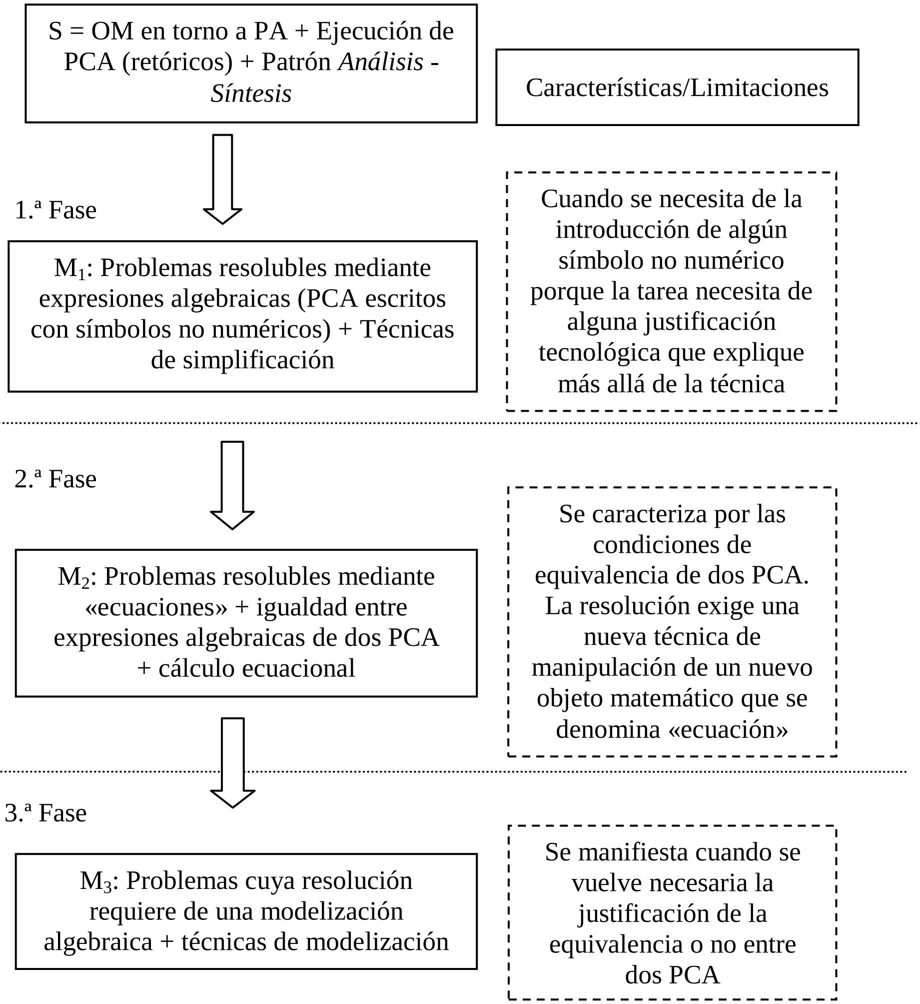


Figura 1. Fases del desarrollo del proceso de algebrización

4. El esquema está adaptado de los propuestos a lo largo del desarrollo del tema en Ruiz, Bosch & Gascón (2007).

4. Conclusiones y perspectivas de investigación

Entendemos que los análisis anteriores son suficientes para sostener la hipótesis de que la prueba puede ser considerada como una respuesta válida a los cuestionamientos de orden tecnológico de los problemas aritméticos. Sumadas a las razones de orden epistemológico que justifican la necesidad de la prueba en el trabajo matemático (Rav, 1999), las problemáticas vinculadas con la justificación de equivalencia entre dos PCA, según nuestra perspectiva, constituyen en cierta manera parte de la razón de ser de la prueba como un tipo de tarea específico y se transforman en una herramienta crucial en la validación. La prueba, entonces, se inserta entre la segunda y tercera fase del proceso de algebrización, en virtud de sus componentes tanto de orden práctico-técnico como los de carácter tecnológico-teórico.

De todas maneras, entendemos que se hace necesario un estudio más amplio sobre el lugar que puede cobrar la prueba dentro de otro tipo de OM, no vinculadas necesariamente al proceso de algebrización. Un estudio de estas características podrá aportar elementos para estudiar en qué medida el carácter técnico-tecnológico de la prueba puede darle sentido a su existencia en las matemáticas escolares.

Referencias

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l’apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 247-280.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Proceso de algebrización de las matemáticas escolares. *Jornadas SIIDM BAEZA 98*, Universidad de Jaén, Baeza, febrero-marzo de 1998.

Charlot, B. (1986). *Faire des Mathématiques: le plaisir du sens.* (Conferencia pronunciada en Cannes, marzo de 1986.)

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/ Horsori.

Chevallard, Y. (2004). *Séminaire PCL2 de Mathématiques – IUFM d'Aix-Marseille, séance 18.* http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/cd_2007.html

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, *11*(1), 77-88.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, *6*(3), 37-51.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(3), 295-332

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*, 5-41.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 655-676). Montpellier, Francia: IUFM.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.